ホイスラーモード波と相対論的電子のサイクロトロン共鳴条件 池田慎

# ホイスラーモード波と相対論的電子の サイクロトロン共鳴条件

# 池 田 愼

## 1. 序論

近年、ホイスラーモード波と相対論的粒子の相互作用が注目されている。 特に、内部磁気圏からの放射線帯粒子の消滅の原因として、このホイスラ ーモード波と相対論的粒子のサイクロトロン共鳴も検討されている [例え ば、Inan and Bell (1991)<sup>1)</sup>、Zheng et al. (2006)<sup>2)</sup>、Singh and Singh (2004)<sup>3)</sup>]。この論文では、これまでのサイプル送信実験 [Sonwalkar et al. (1997)<sup>4)</sup>、Ikeda (2002)<sup>5)</sup>] で得られている磁気圏データを使い、ホイ スラーモード波と相対論的電子の具体的な共鳴条件を、数値で求める。パ ラメータとして磁場に垂直な電子速度を使い、共鳴速度  $V_R$ 、ローレンツ ファクター y、運動エネルギー  $W=m_0c^2(y-1)$ の変化を図で紹介する。

#### 2. 相対論的共鳴条件の導出

ホイスラーモード波の伝搬方向(z方向)と相対論的電子の共鳴速度 (-z方向)の表示を [図1]に示す。既に共鳴速度の大きさ $V_R$ は次式の ように求められている<sup>1)、3)</sup>。ただし、 $m_0$ は電子の静止質量であり、cは光 の速さである。 武蔵大学人文学会雑誌 第40巻第3号





#### 図1 実験室系での座標系

ホイスラーモード波の k ベクトル、磁場  $B_0$ 、相対論的電子の速度方向  $V_z$  は、 いずれも z 方向。一方、ホイスラーモード波との共鳴速度  $V_R$  は – z 方向である。 案内中心座標系は静止系に対して  $V_z$  で運動し、完全共鳴座標系は静止系に対 して、–  $V_R$  で運動する。

$$V_{R} = \frac{\frac{1}{\gamma} \Omega_{e} - \omega}{k}$$
(1)

さらに、ローレンツファクター yは、

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_{\perp}^2 + V_z^2}{c^2}}}$$
(2)

となる。ただし、Ω<sub>e</sub>は電子のサイクロトロン角振動数の大きさ、ωはホ イスラーモード波の角振動数、kはホイスラーモード波の波数である。さ らに、V<sub>1</sub>は電子の磁力線に垂直方向の速度成分の大きさ、V<sub>z</sub>は電子の磁 力線に平行方向の速度成分の大きさである。完全共鳴には、さらに次の拘 束条件が必要となる。

145 (2)

ホイスラーモード波と相対論的電子のサイクロトロン共鳴条件 池田愼

$$V_R = -V_z \tag{3}$$

方程式(1)、(2)、(3)を同時に満たす完全共鳴速度*V<sub>R</sub>*は、次のように 表わされる。

$$V_{R} = \frac{-\omega \pm \Omega_{e} \sqrt{\left(1 + \frac{\Omega_{e}^{2}}{c^{2}k^{2}}\right)\left(1 - \frac{V_{\perp}^{2}}{c^{2}}\right) - \frac{\omega^{2}}{c^{2}k^{2}}}}{k\left(1 + \frac{\Omega_{e}^{2}}{c^{2}k^{2}}\right)}$$
(4)

上式の複号のうち+をとるとき、 $V_R$ は非相対論的電子とホイスラーモー ド波との完全共鳴時の、共鳴速度の大きさを表わす事になる。 $V_R$ が正の 場合は、通常のホイスラーモード波とのサイクロトロン共鳴に対応する。  $V_{\perp}$ がパラメータとして徐々に大きくなると、この $V_R$ は減少する傾向を示 す。ある程度  $V_{\perp}$ が大きくなると、この  $V_R$ は負になる。この場合の相互 作用は、ランダウ共鳴に対応する。この完全共鳴時のローレンツファクタ ー  $\gamma$ は、次のように表わされる。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_{\perp}^{2} + V_{R}^{2}}{c^{2}}}}$$
(5)

又、対応する運動エネルギー Wは次のようになる。

$$W = m_0 c^2 (\gamma - 1) \tag{6}$$

3. サイプル送信実験から得られた磁気圏パラメータと、V<sub>P</sub>、y、Wの変化

Sonwalkar et al. (1997)<sup>4)</sup>と Ikeda (2002)<sup>5)</sup>は、サイプル送信実験により、 サイプル信号の伝搬してきたL値は $L \approx 5.1$ 、その伝搬通路の赤道面近く の電子密度 $N_e$ は 280/cc、サイプル信号がホイスラーモード波になった時 のその周波数fは、2.4kHz であること等を明らかにした。地磁気を双極 子磁場と仮定すると、 $L \approx 5.1$ の赤道面磁場は $B_0=231 \times 10^{-9}$ テスラとなる。 又、この時ホイスラーモード波の赤道面付近での波長は約2.6kmになる。

これらのデータを使うと、 $V_{\perp}$ をパラメータとして、完全共鳴速度  $V_R$ の 変化は [図 2] に示される。さらに、ローレンツファクター  $\gamma$ の変化は [図 3] に、運動エネルギー Wの変化は [図 4] に示されている。

[図 2] には、上記のデータを使い、方程式(1)、(2)、(3) から得られ たグラフが示されている。横軸が  $V_{\perp}$ で、縦軸が  $V_{R}$  である。 $V_{R}$  を変数と して、逆に  $V_{\perp}$ を求めると次のようになる。

$$V_{\perp} = c \sqrt{1 - \left(\frac{k^2 V_R^2}{\Omega_e^2} + \frac{V_R^2}{c^2}\right) - \frac{2\omega k V_R + \omega^2}{\Omega_e^2}}$$
(7)

上式の根号内の関数は  $V_R$  の 2 次関数であるから、ある  $V_R$  で  $V_\perp$ はピーク を持つ。つまり、敢えて厳密な数値で表現すると、[図 2] のグラフは  $V_R = -6.207277 \times 10^6$ m/sec の時、最大値  $V_{\perp max} = 2.9972799 \times 10^8$ m/sec のピ ークを示す。 $c = 2.99792458 \times 10^8$ m/sec が光の速さなので、 $V_{\perp max} < c$  は維持



### 図2 完全共鳴速度

相対論的電子の  $V_{\perp}$ に対して、完全共鳴速度  $V_R$  の変化を表す。完全共鳴速度  $V_R$  の最大値は  $V_R$ =1.05×10<sup>7</sup>m/sec であり、最小値は、 $V_R$ =-6.226661375×10<sup>6</sup>m/sec である。

ホイスラーモード波と相対論的電子のサイクロトロン共鳴条件 池田愼 されている。

さらに、ローレンツファクター y が無限大になる可能性もある。(1)式 より、この時

$$V_{R0} = -\frac{\omega}{k} \tag{8}$$

になり、

$$V_{\perp 0} = c \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{c^2 k^2}}$$
(9)

である。この場合、(4)式の複号のうち、 – をとる必要がある。この場合 も敢えて厳密な数値を計算で導くと $V_{R0}$ = – 6.226661375×10<sup>6</sup>m/sec、 $V_{\perp0}$ = 2.99727787×10<sup>8</sup>m/sec であり、 $\gamma_0$ は無限大になる。実際にこのような数 値は、電子のシンクロトロン放射による放射抵抗等を考えると現実的では ないが、ホイスラーモード波と相対論的電子のサイクロトロン共鳴におい て、このような数値解が存在し得る事を明らかにする事は、重要であると 考える。

 $V_{\perp}=0$ の電子は、サイクロトロン運動をせずにロスコーンに入り、磁気 圏から失われる。実際にこのような電子の $V_R$ は、磁気圏パラメータを使 って導き出される。この数値は、[図2]の $V_R$ の最大値であり $V_R$ =  $1.05 \times 10^7$ m/secとなる。実は使用した磁気圏パラメータはホイスラー解 析と、サイプル送信実験によるホイスラーモード波の伝搬速度と観測地の 磁気緯度から決められた<sup>4)</sup>。したがって、この数値は観測されている伝搬 速度と一致しているのは当然である。ただし、実際の共鳴電子はこれらの 波動を増幅させているのに関与しており、有限な $V_{\perp}$ を持っているはずで ある。しかし、この $V_{\perp}$ の範囲は、一般にピッチ角を使用した推定モデル から類推されるのみであり、衛星観測からは難しいと思われる。 $V_{\perp}$ は、 [図2]において示されているように、徐々に増加し、最大値 $V_{\perp max}$ に達 する。その後減少し、(9)式で表される $V_{\perp0}$ に到達する時、(5)式で表わ される $\gamma_0$ と $W_0$ は無限大に達する。ただし、この領域は電子が光速度に 近い速度で運動している状態を意味しており、サイクロトロン共鳴にとっ ては現実的ではないかもしれない。又、空間的な不均質が、ホイスラーモ ード波の波長や相対論的電子のラーモア半径に匹敵すると、共鳴そのもの も従来の Kennel and Petschek 型の相互作用<sup>6)</sup>とは異なると考えなければ ならない。

[図 3] には  $\gamma$  の変化グラフが示されており、横軸には完全共鳴状態にあ る時の  $V_{\perp}$ 、縦軸はその時の  $\gamma$  である。横軸は  $V_{\perp}$ の一価関数になるように、 最大値  $V_{\perp max}$  までが示されている。 $V_{\perp max}$ に対応する  $\gamma$  は 864.3 にまで達 している。さらに、[図 4] には、(6)式で表わされる運動エネルギー Wの変化グラフが示されており、 $V_{\perp max}$ に対応する W は 441.1MeV にも達 する。 $V_{\perp}$ =0.0m/sec のとき、 $\gamma$  は 1.00062 であり、W は 0.315keV である。



図3 完全共鳴におけるローレンツファクター

相対論的電子の  $V_{\perp}$ <2.99728×10<sup>8</sup>m/sec に対して、ローレンツファクター y の最大値は 864.3、最小値は 1.00062 である。



ホイスラーモード波と相対論的電子のサイクロトロン共鳴条件 池田愼

相対論的電子の  $V_{\perp} < 2.99728 \times 10^8 \text{m/sec}$  に対して、運動エネルギー W の最 大値は 441.1MeV、最小値は 0.315keV である。

# 4. まとめ

この論文では、ホイスラーモード波と相対論的電子の完全共鳴条件が検 討された。さらに、サイプル送信実験により得られた具体的な磁気圏パラ メータ<sup>4),5)</sup>を使い、具体的な数値例をこの完全共鳴条件から導いた。

(1)  $V_{\perp}=0$ の電子の完全共鳴速度  $V_R$ は、磁気圏パラメータを使って導き出される。この数値は  $V_R$ の最大値であり、 $V_R=1.05 \times 10^7$ m/secとなる。ホイスラー解析と、サイプル送信実験によるホイスラーモード波の伝搬速度と観測地の磁気緯度から、磁気圏パラメータが推定された。これらを使って非相対論的共鳴速度が見積もられ、 $V_R=1.05 \times 10^7$ m/secとなった。この結果は  $V_{\perp}=0$ の下で求められた  $V_R$ に一致している。

140 (7)

図4 完全共鳴における運動エネルギー

武蔵大学人文学会雑誌 第40巻第3号

(2) 共鳴条件の下で、 $V_{\perp}$ =2.9972779×10<sup>8</sup>m/secの時、運動エネルギー  $W=mc^{2}(y-1)$ とローレンツファクターyは無限大に達する。何らかの方 法で、ホイスラーモード波と相対論的電子の共鳴は、無限大のエネルギー まで可能になるかもしれない。

(3)  $V_{\perp}$ に最大値があり、それは $V_{\perp}$ =2.9972799×10<sup>8</sup>m/secとなり、この時運動エネルギー $W=mc^{2}(\gamma-1)=441.1$ MeV、ローレンツファクター  $\gamma=864.3$ である。

(4) 相対論的な共鳴条件を考慮すると、サイプル電波のような電力線放 射<sup>7)</sup>を利用する事により、地上電波観測は、内部磁気圏に流入してくる高 速電子群のエネルギー等を推定する手段として有効である。宇宙天気予報 の一つの手段となりうるだろう。

以上の検討から、ホイスラーモード波と相対論的電子の相互作用には、 従来の Kennel and Petschek 型の相互作用<sup>6)</sup>とは異なる相互作用の存在が 予想され、磁気圏相対論的粒子の消失にも関連して、一層の検討が必要で あると思われる。又、相対論的効果の重要性も明らかになり、これらはホ イスラーモードサイドバンド波の生成や電力線放射との相互作用にも、重 要な役割を果たすと予想される。

謝辞

この研究は、筆者が気象大の藤田茂教授との手紙の交換の中で発展した 結果です。藤田茂教授には、心から御礼申し上げます。又、その基礎とな ったのは、武蔵大学特別研究員として、2002 年から 2003 年にかけて国立 極地研究所に滞在し、計算機を使いながら発展させたものです。国立極地 研究所の多くの方々に感謝の意を表したいと思います。さらに、その期間 中、筆者をカナダでの素晴らしいオーロラ観測に誘って下さった文部省宇 ホイスラーモード波と相対論的電子のサイクロトロン共鳴条件 池田慎

宙科学研究所鶴田浩一郎名誉教授には、心から御礼申し上げます。最後に、 特別研究員に推薦し、なかなか研究がはかどらない筆者を多くの点で支え て下さった武蔵大学の学生、教員、スタッフの皆様に心から感謝申し上げ ます。有難うございました。

[註]

- 1) U. S. Inan and T. F. Bell, Geophys. Res. Lett., 18, 49, (1991)
- 2) Y. Zheng et al., J. Geophys. Res., 111, A10204, (2006)
- 3) D. P. Singh and U. P. Singh, Indian J. Radio & Space Phys, 33, 234, (2004)
- 4) V. S. Sonwalkar et al., J. Geophys. Res., 102, 14363, (1997)
- 5) M Ikeda, Indian J. Radio & Space Phys., 31, 121 (2002)
- 6) C. F. Kennel and H. E. Petschek, J. Geophys. Res., 71, 1, (1966)
- 7) L. A. D. Sa' and R. A. Helliwell, J. Geophys. Res., 93, 1987, (1988)