

ホイスラーモードサイクロトロン 共鳴電子の相対論的運動方程式

池 田 慎

1. 序論

地球磁気圏内の単色ホイスラー波は、ドップラーシフトしたサイクロトロン共鳴相互作用により、サイドバンド波を生成すると考えられている^{1),2)}。このサイドバンド生成共鳴電子はホイスラーモード波の位相ポテンシャル内に捕捉されていない非捕捉電子である可能性があり、位相図上のセパトリックスから外側に、あるギャップをもった軌道上を運動している。これらの共鳴電子のエネルギーについて、Sonwalkar et al.(1997)³⁾、Ikeda (2002)⁴⁾は言及しており、磁力線方向の共鳴エネルギーは $E_z = 0.3\text{keV} \sim 1.0\text{keV}$ 、磁力線に垂直方向のエネルギーは、 $E_{\perp} = 0.6\text{keV} \sim 11.0\text{keV}$ であった。特にこの論文において、サイブル信号のVLF波の多点観測から、共鳴電子雲の磁力線に垂直方向のエネルギーは、 $E_{\perp} \sim 12\text{keV}$ であると推定される [Ikeda et al.(1988)]⁵⁾。

これまで、この範囲の電子は、ホイスラーモード波との波動一粒子相互作用に関して非相対論的取扱をされてきたが、改めて相対論的取扱が必要かどうか検討する必要がある。何故ならローレンツファクター γ は、

-
- 1) 池田 慎、武蔵大学人文学会雑誌、第33巻、第2・3号、裏P 164 (2002)
 - 2) 池田 慎、武蔵大学人文学会雑誌、第34巻、第4号、裏P 170 (2003)
 - 3) Vikas S. Sonwalkar, D. L. Carpenter, R. A. Helliwell, M. Walt, U. S. Inan, D. L. Caudle, and M. Ikeda, J. Geophys. Res., 102, P14363 (1997)
 - 4) M Ikeda, Indian J. Radio & Space Phys., 31, P121 (2002)
 - 5) M. Ikeda, K. Tsuruda, and S. Machida, J. Geomag. Geoelectr., 40, P227 (1988)

$1 + \frac{E_{\perp} + E_{\parallel}}{m_0 c^2} \approx 1.01$ 程ではあるが、サイドバンド波の生成に関して重要なセパラトリックス近傍では、相対論的効果が微妙に出現する可能性があるからである。ただし m_0 は電子の静止質量、 c は光の速さである。

この論文では、サイドバンド波生成に対する相対論的効果を検討するのに先立ち、ホイスラーモードサイクロトロン共鳴座標系における電子の相対論的運動方程式を定式化する事を試み、いくつかの計算例も紹介する。

2. 共鳴電子エネルギーの推定

1979 年にカナダケベック州で行われた南極サイプル信号の多点観測によって、その VLF 信号の電離圏からの出口が推定された。その解析から磁気圏内の電子雲のドリフト速度が見積もられる。地上レベルで、そのドリフト速度は約 20 km/分であった [Ikeda et al. (1988)]⁵⁾。バウンス平均された赤道面上での電子雲の ∇B ドリフト角速度 $\left\langle \frac{d\phi}{dt} \right\rangle$ は、次式で近似される⁶⁾。

$$\left\langle \frac{d\phi}{dt} \right\rangle = \frac{3}{eB_0 a^2} Lg(\alpha) \left(\frac{1}{2} mV^2 \right) \quad (1)$$

ただし、 a は地球半径 (6.4×10^6 m)、 B_0 は赤道面磁場で、 3.12×10^{-5} Wb/m²、 L は $L=4.1$ 、 e は電荷量 (1.6×10^{-19} クーロン) である。さらにピッチ角 α の関数 $g(\alpha)$ は次式で与えられると考える。

$$g(\alpha) \approx 0.7 + 0.3 \sin \alpha \quad (2)$$

したがって、赤道面上でのドリフト速度 V_{eq} は、

$$V_{eq} = La \left\langle \frac{d\phi}{dt} \right\rangle \quad (3)$$

6) J. G. Roederer, "Dynamics of Geomagnetic Trapped Radiation", Springer -Verlag, P57, (1970)

ホイスラーモードサイクロトロン共鳴電子の相対論的運動方程式

で与えられ、ダイポール磁場として地球磁場を近似すれば、地上でのドリフト速度 V_g は、磁気緯度 $\theta = 60.4^\circ$ として、

$$V_g = a \cos \theta \left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle \quad (4)$$

となる。結果的に $V_g = 20 \text{ km/min}$ とすると、(4) より、

$$\left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle = \frac{V_g}{a \cos \theta} \approx 1.1 \times 10^{-4} / \text{sec} \quad (5)$$

さらに、ピッチ角 $\alpha = 55^\circ$ と仮定すると、(1) より

$$\frac{1}{2} mV^2 = \frac{eB_0 a^2}{3Lg(\alpha)} \left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle \approx 12 \text{ keV} \quad (6)$$

となる。

同じような方法で、ドリフトとホイスラーモードサイクロトロン共鳴を考慮する事により、電子のエネルギー (E) とピッチ角 (α) が、 $E = 0.6 \text{ keV}$ から 11.0 keV 、 $\alpha = 40^\circ$ から 80° であるという結果が得られている³⁾。この場合のローレンツファクター $\gamma = (1 + E / m_0 c^2)$ は、1.01 から 1.03 程度にしかない。 γ が 1 に十分近ければ相対論的效果は大きく現われないが、この場合は一般的に相対論的效果は無視できる。確かにそうであろうか。非捕捉粒子が共鳴によりセパトリックス近傍にある場合、散乱に対する相対論の影響が顕著に現われる可能性があり、それはサイドバンドの周波数のギャップに影響を与えるだろう。そこで、この効果を検討するために、相対論を考慮したホイスラーモード共鳴電子の運動論方程式が導出された。

3. 相対論的運動方程式の導出

静止系でのホイスラーモード波と外部磁場の統合電磁場を F_{ij} で表わすと、地球に固定した静止系での相対論的運動方程式は、次のように表わされる。

$$\frac{d}{d\tau} P_i = -eF_{ij}v_j \quad (7)$$

ただし、4 元運動量、4 元速度、ローレンツファクター γ は次のように表わされる。

$$P_j = (im_0\gamma c, m_0\gamma V_x, m_0\gamma V_y, m_0\gamma V_z) \quad (8)$$

$$v_j = (i\gamma c, \gamma V_x, \gamma V_y, \gamma V_z) \quad (9)$$

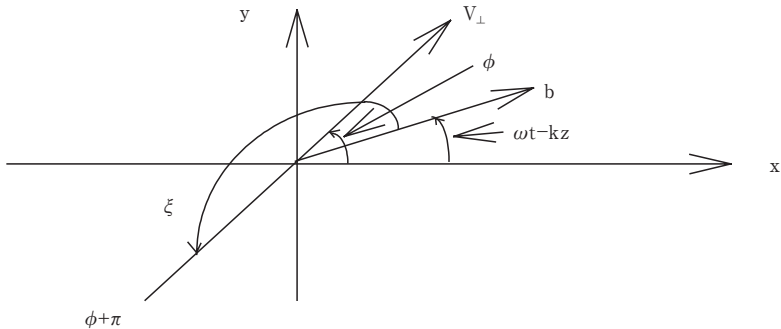
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (10)$$

$$\beta = \frac{1}{c} \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (11)$$

V_x, V_y, V_z は静止系での電子の速度であり、 τ は固有時間である。 i は虚数単位である。静止系での座標系は図 1 に示されている。静止系でのサイクロトロン共鳴条件は、特殊相対性理論を考慮すると次のようになる。

図 1 静止系での座標系

$$\xi = (\phi + \pi) - (\omega t - kz)$$



$$\omega - kV_z - \frac{1}{\gamma} \Omega_0 = 0 \quad (12)$$

上式は、静止系での近似式と考えられるが、この論文では最初の試みとし

ホイスラーモードサイクロトロン共鳴電子の相対論的運動方程式

て、(12) の共鳴条件を使用する。波動の進行方向と共鳴電子の速度方向は逆向きなので、

$$\omega + kV_R = \frac{1}{\gamma} \Omega_0 \quad (13)$$

したがって、

$$V_R = \frac{\frac{1}{\gamma} \Omega_0 - \omega}{k} > 0 \quad (14)$$

静止系での、それぞれの速度間関係は図2に示されている。静止系から、電子のガイディングセンターの速度 V_z で動く慣性系 (g系) へのローレンツ変換 L_g は次のように表わされる。

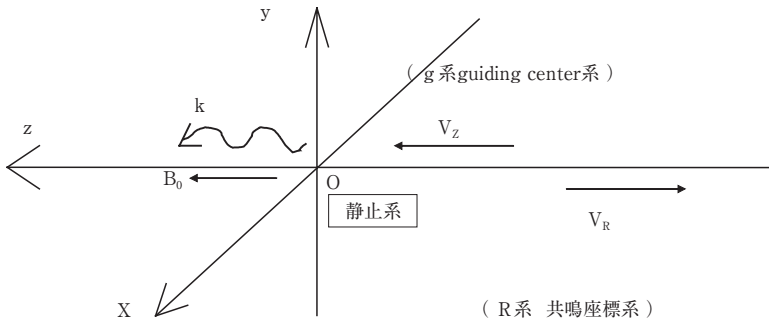
$$L_g = \begin{pmatrix} \gamma_g & 0 & 0 & -i\beta_g\gamma_g \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta_g\gamma_g & 0 & 0 & \gamma_g \end{pmatrix} \quad (15)$$

ただし、

$$\beta_g = \frac{V_z}{c} \quad (16)$$

$$\gamma_g = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_g^2}} \quad (17)$$

図2 静止系での速度の表示



g 系から見た共鳴速度 V_{gR} は、z 軸方向に進む速度として、次のように表わされる。

$$V_{gR} = \frac{V_z + V_R}{1 + \frac{V_z V_R}{c^2}} \quad (18)$$

ここでさらに、g 系から共鳴速度で動く R 系に移るローレンツ変換を考えると、次のように表わされる。

$$L_{gR} = \begin{pmatrix} \gamma_{gR} & 0 & 0 & i\beta_{gR}\gamma_{gR} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta_{gR}\gamma_{gR} & 0 & 0 & \gamma_{gR} \end{pmatrix} \quad (19)$$

ただし、

$$\beta_{gR} = \frac{V_{gR}}{c} = \frac{1}{c} \frac{V_z + V_R}{1 + \frac{V_z V_R}{c^2}} \quad (20)$$

$$\gamma_{gR} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{gR}^2}} \quad (21)$$

したがって、運動方程式(7)は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} P_i &= -eF_{ij} L_g^{-1} L_{gR}^{-1} L_{gR} L_g v_j \\ &= -eF_{ij} L_g^{-1} L_{gR}^{-1} U_j \end{aligned} \quad (22)$$

R 系で見た四元速度 U_j は次のように表わされる。

$$U_j = L_{gR} L_g v_j \quad (23)$$

さらに固有時 τ は静止系の時間 t で表わすと、

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt \quad (24)$$

静止系での統合電磁場 F_{ij} は次のように表わされる。

ホイスラーモードサイクロトロン共鳴電子の相対論的運動方程式

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & i\frac{E_x}{c} & i\frac{E_y}{c} & i\frac{E_z}{c} \\ -i\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ -i\frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ -i\frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

さらに、共鳴電子の座標系 R での速度 U_j は次のように表わされる。この時のローレンツファクターを γ_u とすると、

$$U_j = (i\gamma_u c, \gamma_u U_x, \gamma_u U_y, \gamma_u U_z) \quad (26)$$

方程式 (23) より

$$\gamma_u = \frac{\gamma_{gR}\gamma}{\gamma_g} \quad (27)$$

$$U_x = \frac{\gamma_g}{\gamma_{gR}} V_x \quad (28)$$

$$U_y = \frac{\gamma_g}{\gamma_{gR}} V_y \quad (29)$$

$$U_z = \frac{V_z + V_R}{1 + \frac{V_z V_R}{c^2}} \quad (30)$$

となる。さらに、静止系での電磁場を右回り円偏波として次のように表現する。

$$E_x = \frac{\omega}{k} b \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (31)$$

$$E_y = -\frac{\omega}{k} b \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (32)$$

$$E_z = 0 \quad (33)$$

$$B_x = b \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (34)$$

$$B_y = b \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (35)$$

$$B_z = B_0 \quad (36)$$

この結果、方程式(22)は次のような4個の方程式で表わされる。

$$\frac{d}{dt} V_{\perp} = \frac{\Omega_{\omega}}{\gamma} (V_z - \frac{\omega}{k}) \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi) - \frac{1}{\gamma} V_{\perp} \frac{d\gamma}{dt} \quad (37)$$

$$\frac{d}{dt} V_z = -\frac{\Omega_{\omega} \gamma_u}{\gamma^2} U_{\perp} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi) - \frac{1}{\gamma} V_z \frac{d\gamma}{dt} \quad (38)$$

$$\frac{d}{dt} \varphi = \frac{1}{\gamma} \left[\Omega_0 - \Omega_{\omega} \frac{V_z - \frac{\omega}{k}}{V_{\perp}} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi) \right] \quad (39)$$

$$\frac{d}{dt} \gamma = -\Omega_{\omega} \gamma_u \frac{\omega U_{\perp}}{ck} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi) \quad (40)$$

上式において、 φ は静止系における速度ベクトルの位相である。

$$\Omega_{\omega} = \frac{eb}{m} \text{は波動磁場 } b \text{ に対するサイクロトロン角振動数であり、} \Omega_0 = \frac{eB_0}{m}$$

は外部磁場 B_0 に対するサイクロトロン角振動数である。さらに、

$$V_x = V_{\perp} \cos \varphi \quad (41)$$

$$V_y = V_{\perp} \sin \varphi \quad (42)$$

$$U_{\perp} = \frac{\gamma_g}{\gamma_{gR}} V_{\perp} \quad (43)$$

とした。ここで、 φ から ξ に変数変換する。

$$\xi = \varphi - (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + \pi \quad (44)$$

この時、方程式(37)～(40)は次のように変換される。

ホイスラーモードサイクロトロン共鳴電子の相対論的運動方程式

$$\frac{d}{dt}V_{\perp} = \frac{\Omega_{\omega}}{\gamma}(V_z - \frac{\omega}{k})\sin\xi + \frac{\Omega_{\omega}}{\gamma}\gamma_u \frac{\omega}{ck} \frac{U_{\perp}}{c} V_{\perp} \sin\xi \quad (45)$$

$$\frac{d}{dt}V_z = -\Omega_{\omega} \frac{\gamma_u}{\gamma^2} U_{\perp} \sin\xi + \Omega_{\omega} \frac{\gamma_u}{\gamma} \frac{\omega}{ck} \frac{U_{\perp}}{c} V_z \sin\xi \quad (46)$$

$$\frac{d}{dt}\xi = kU_z(1 + \frac{V_z V_R}{c^2}) + \frac{\Omega_{\omega}}{\gamma} \frac{V_z - \frac{\omega}{k}}{V_{\perp}} \cos\xi \quad (47)$$

$$\frac{d}{dt}\gamma = -\Omega_{\omega}\gamma_u \frac{\omega}{ck} \frac{U_{\perp}}{c} \sin\xi \quad (48)$$

これらの方程式系(45)～(48)を使って、共鳴座標系における軌道を求めなければならない。

4. 計算パラメータと結果

数値計算で使われたパラメータは次に示される。いずれも静止系での数値である。

キャリアー信号の周波数 $f = \frac{\omega}{2\pi}$	2.5kHz
キャリアー信号の飽和振幅磁場 b	11mγ
地球磁場強度 B_0	245 γ
コールド電子密度	250/cc
共鳴電子の地球磁場に垂直な速度 U_{\perp}	6.0×10^7 m/s (約 10.2keV)
共鳴電子の地球磁場に平行な速度 U_z	-1.216×10^7 m/s (約 0.42keV)
	から
	-1.26×10^7 m/s (約 0.45keV)

上記共鳴電子の地球磁場に平行な速度の「-」符号は、図2から分かるように、ホイスラーモード波の進行方向(+方向)と逆向きに共鳴電子が進行している事を意味している。又、非相対論的な方程式系^{1),2)}は、方程式(45)から(48)において、

$$\gamma = \gamma_u = \gamma_g = \gamma_{gR} = 1 \quad (49)$$

$$c \rightarrow \infty \quad (50)$$

とにおいて得られる。

図 3 共鳴座標系における相対論的共鳴電子の(静止系)時間一位相変化

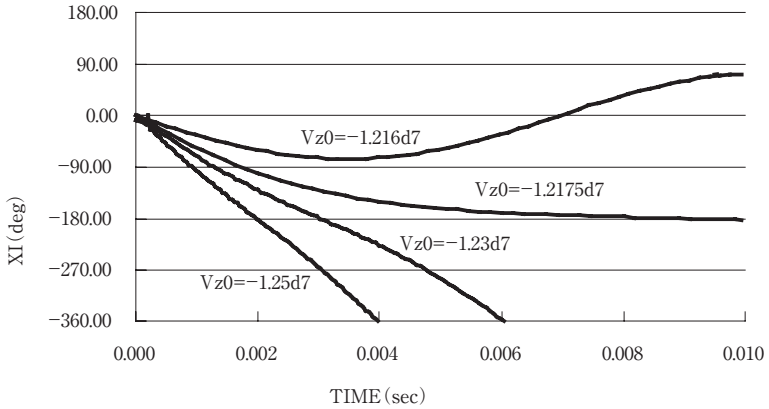


図 4 共鳴座標系における非相対論的共鳴電子の(静止系)時間一位相変化

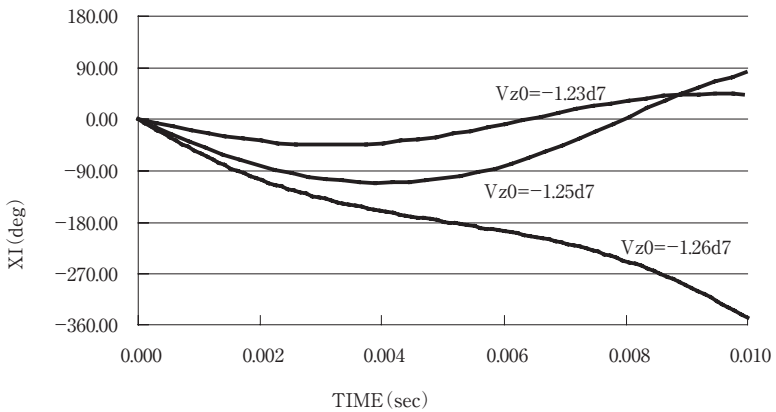


図3から図6に、相対論的方程式(45)―(48)と、非相対論的方程式から得られた結果の比較を示した。静止系における時間 $t = 0$ を、計算の開始時刻とする。静止系における磁場に平行な初期速度 V_{z0} をパラメータとして、共鳴座標系における位相 ξ を、静止系の時間に対してプロットした。図3が、その相対論的方程式系による結果で、図4が非相対論的方程式系による結果である。図3から、相対論的な効果を考慮すると、セパトリックスは $V_{z0} = -1.2175d7$ と $-1.216d7$ の間になるが、相対論的效果を考慮しない場合は、図4からセパトリックスは $V_{z0} = -1.26d7$ と $-1.25d7$ の間になる。つまりセパトリックスの下限は、相対論的な効果を考慮すると、絶対値が小さくなる。これは、方程式(14)より、共鳴速度の絶対値が $\gamma (> 1)$ の効果により小さくなった事に対応している。その大きさは $0.05d7$ の減少に対応し、その減少分は4%にも達している。2章で示したように、これは γ の変化率(1%~3%)より大きい。すべてのパラメータ計算は将来の研究課題ではあるが、この違いは意外に大きく、相対論的な計算を無視する事は難しいと思われる。

図5 共鳴座標系における相対論的共鳴電子の位相図 ($U_z - \xi (XI)$)

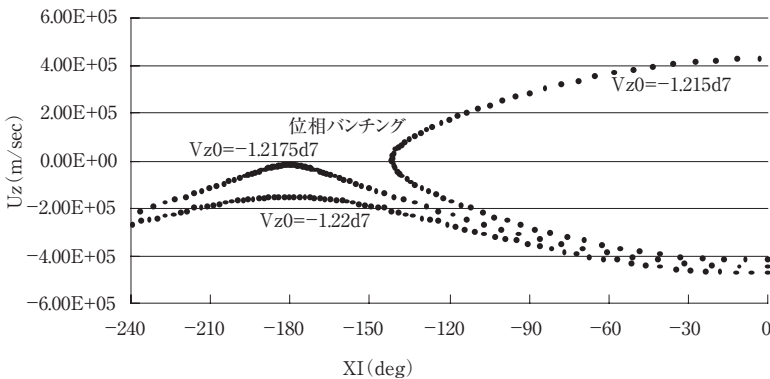


図 6 共鳴座標系における非相対論的共鳴電子の位相図($U_z - \xi$ (XI))

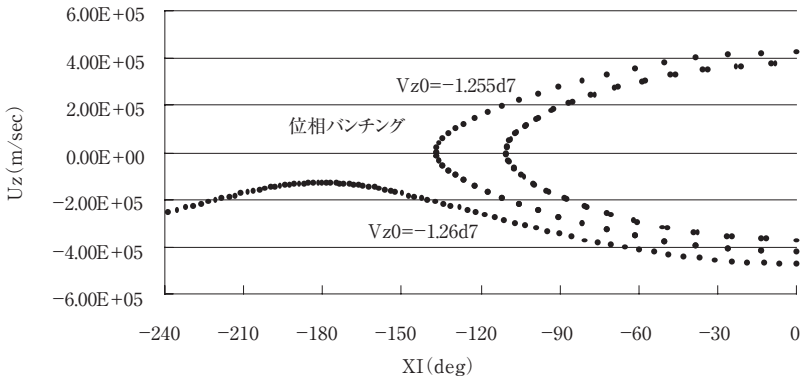


図 5 と図 6 には、共鳴座標系における相対論的共鳴電子の位相図($U_z - \xi$ (XI))と、共鳴座標系における非相対論的共鳴電子の位相図($U_z - \xi$ (XI))が、それぞれ示されている。セパトロリックスはいずれも共鳴速度 V_R を中心としたほぼ同じ速度範囲を示しており、共鳴電子はいずれも $\pm 4.02E+05$ の U_z の範囲で捕捉されている事が分かる。その外側の電子の軌道が非捕捉電子を表している。軌道を表す点は等時間(静止系)でプロットされており、 $\pm 180^\circ$ で位相バンチングが生じていることが見て取れる。相対論的効果を考慮すると、慣性の影響が重要になるため、位相バンチングの影響は一層重要になると考えられる。したがって、サイドバンド電流に対して相対論的効果は有効である事が想像される。

以上の図 3 から図 6 の結果を考慮すると、共鳴電子のエネルギーが 10keV 程であっても、サイドバンド電流に対する特殊相対性理論の効果は無視できない事が予想される。もちろん、使われたこれらの相対論的方程式系(45)から(48)は、共鳴電子のエネルギーが 0.75keV であっても適用できる。今後、ホイスラーモードサイドバンド電流の計算を行う際には、これらの方程式系を使用することが必要と思われる。

謝辞

この研究は、筆者が武蔵大学特別研究員として、2002年から2003年にかけて国立極地研究所に滞在し、計算機を使いながら発展させたものです。国立極地研究所の多くの方々に感謝の意を表したいと思います。又、イギリス、ケンブリッジ大学 British Antarctic Survey の Andy Smith 博士、サザンプトン大学 D. Nunn 教授 には貴重なアドバイスと問題点を指摘して頂き、大変感謝致しております。又インド、F.G.M. Government College の Dinesh Pal Singh 博士からは、現在でも激励を頂き、深く感謝致しております。さらに、この期間中、筆者をカナダでの素晴らしいオーロラ観測に誘って下さった文部省宇宙科学研究所鶴田浩一郎名誉教授には、心から御礼申し上げます。最後に、特別研究員に推薦し、なかなか研究がはかどらない筆者を多くの点で支えて下さった武蔵大学の学生、教員、スタッフの皆様に心から感謝申し上げます。有難うございました。

(2005年5月19日 受理)