

# ホイスラーモードサイドバンド波を 形成する周波数ギャップの検討

池 田 慎

## 1. 序論

地球磁気圏に侵入した単色ホイスラーモード波は、ドップラーシフトしたサイクロトロン共鳴相互作用により、サイドバンド波を生成すると思われる [Park<sup>1)</sup>, Rastani et al.<sup>2)</sup>]。そのサイドバンド波生成共鳴電子は、ホイスラーモード波の位相ポテンシャル内に捕捉されていない非捕捉電子である可能性があり、 $U_z$ - $\xi$  位相図上のセパレートリックスから外側に、あるギャップをもった軌道上を運動している。この軌道ギャップは、磁気圏内で、単色ホイスラーモード波から生じる雑音波動により非捕捉電子が散乱・減速・加速される事によって生じると、筆者は考えている。さらにこの軌道ギャップは周波数空間にギャップを作り、サイドバンド波を形成すると考えられる。この論文では、そのギャップ形成の可能性について簡単に報告する。

## 2. 運動方程式

考えている系では、外部磁場、コールドプラズマ密度、入射ホイスラーモード波の振幅はいずれも一定であると仮定している。これは、定常状態

2 ホイスラーモードサイドバンド波を形成する周波数ギャップの検討 池田 慎

を念頭に置いた物理過程を考えているからである。この場合でも、サイドバンド波が生成される可能性を考える。方程式は、単色ホイスラーモード波とドップラーシフトした非線形サイクロトロン共鳴の下での、電子の運動方程式である。それらはホイスラーモード共鳴速度  $V_R = (\omega - \Omega_0)/k < 0$  で動く座標系で記述される<sup>3), 4)</sup>。

$$\frac{dU_{\perp}}{dt} = \left[ U_z - \frac{\Omega_0}{k} \right] \omega_1 \sin \xi \quad (1)$$

$$\frac{dU_z}{dt} = -U_{\perp} \omega_1 \sin \xi \quad (2)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = kU_z + \frac{U_z - \frac{\Omega_0}{k}}{U_{\perp}} \omega_1 \cos \xi \quad (3)$$

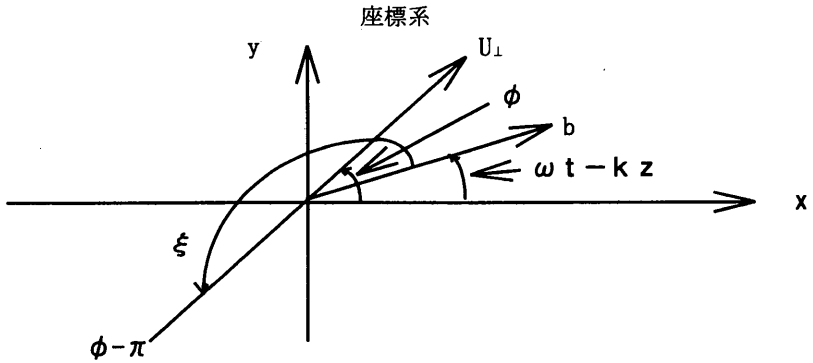


図1 実験室系でのパラメータ間の関係図

座標系は実験室系で図1に示されている。共鳴電子の磁場に垂直な速度成分  $U_{\perp}$  と平行な速度成分  $U_z$ 、そして位相  $\xi$  は、振子の方程式に従う成分  $U_{\perp 0}$ 、 $U_{z 0}$ 、 $\xi_0$  と、それらに加わる擾乱項  $U_{\perp 1}$ 、 $U_{z 1}$ 、 $\xi_1$  に分離される。これは、セパラトリックス近傍での数値解析を、数値誤差に対して安定に行なうためである。

$$U_{\perp} = U_{\perp 0} + U_{\perp 1} \quad (4)$$

$$U_z = U_{z 0} + U_{z 1} \quad (5)$$

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 \quad (6)$$

これらの変数の従う方程式は、厳密に次のように表される。

$$\frac{d\xi_0}{dt} = kU_{z0} \quad (7)$$

$$\frac{dU_{z0}}{dt} = -U_{\perp 0} \omega_1 \sin \xi_0 \quad (8)$$

$$U_{\perp 0} = \text{constant} \quad (9)$$

$$\frac{dU_{\perp 1}}{dt} = (U_{z0} + U_{z1} - \frac{\Omega_0}{k}) \omega_1 \sin(\xi_0 + \xi_1) \quad (10)$$

$$\frac{dU_{z1}}{dt} = -2 U_{\perp 0} \omega_1 \sin \frac{\xi_1}{2} \cos(\xi_0 + \frac{\xi_1}{2}) - U_{\perp 1} \omega_1 \sin(\xi_0 + \xi_1) \quad (11)$$

$$\frac{d\xi_1}{dt} = kU_{z1} + \frac{U_{z0} + U_{z1} - \frac{\Omega_0}{k}}{U_{\perp 0} + U_{\perp 1}} \omega_1 \cos(\xi_0 + \xi_1) \quad (12)$$

$\omega$  と  $k$  はホイスラーモード波の角振動数と波数である。 $\Omega_0$  は地球磁場に対する電子サイクロトロン角振動数、 $\omega_1$  はホイスラーモード波の波動磁場  $b$  に対する電子サイクロトロン角振動数である。波動は  $z$  の負の領域から正の領域に向かっている。位相  $\xi$  はベクトル  $U_{\perp}$  と波動磁場ベクトル  $b$  の間の位相である。この論文では、非相対論的な取扱いをし、 $t$  は実験室系の時間である。

### 3. 振子方程式の解

振子方程式系(7)~(9)は次のような解をもつ。 $\zeta$  を楕円関数の母数として、 $0 < \zeta < 1$  の捕捉電子に対しては、

$$U_{z0} = \frac{2\zeta}{k} \sqrt{kU_{\perp 0} \omega_1 \text{cn}(F(\theta_0; \zeta) + \sqrt{kU_{\perp 0} \omega_1 t}; \zeta)} \quad (13)$$

$$\sin \theta_0 = \frac{1}{\zeta} \sin \frac{\xi_0}{2} \quad (14)$$

$$\sin \frac{\xi_0}{2} = \zeta \text{sn}(F(\theta_0; \zeta) + \sqrt{kU_{\perp 0} \omega_1 t}; \zeta) \quad (15)$$

$$\cos \frac{\xi_0}{2} = \operatorname{dn}\left(F(\theta_{0i}; \zeta) + \sqrt{kU_{\perp 0}\omega_1 t}; \zeta\right) \quad (16)$$

ただし、楕円関数の母数 $\zeta$ は軌道によって異なる定数で、次のように与えられる。

$$\zeta = \sqrt{\sin^2 \frac{\xi_{0i}}{2} + \frac{kU_{z0i}^2}{4U_{\perp 0}\omega_1}} \quad (17)$$

一方、 $\zeta > 1$  の非捕捉電子に対しては、複号同順で、

$$U_{z0} = \pm \frac{2\zeta}{k} \sqrt{kU_{\perp 0}\omega_1} \operatorname{dn}\left(F\left(\frac{1}{2}\xi_{0i}; \frac{1}{\zeta}\right) \pm \sqrt{kU_{\perp 0}\omega_1}\zeta t; \frac{1}{\zeta}\right) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \sin \xi_0 = & 2 \operatorname{sn}\left(F\left(\frac{1}{2}\xi_{0i}; \frac{1}{\zeta}\right) \pm \sqrt{kU_{\perp 0}\omega_1}\zeta t; \frac{1}{\zeta}\right) \operatorname{cn}\left(F\left(\frac{1}{2}\xi_{0i}; \frac{1}{\zeta}\right) \right. \\ & \left. \pm \sqrt{kU_{\perp 0}\omega_1}\zeta t; \frac{1}{\zeta}\right) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\cos \xi_0 = 1 - 2 \operatorname{sn}^2\left(F\left(\frac{1}{2}\xi_{0i}; \frac{1}{\zeta}\right) \pm \sqrt{kU_{\perp 0}\omega_1}\zeta t; \frac{1}{\zeta}\right) \quad (20)$$

F は第 1 種不完全楕円積分を表しており、sn, cn, dn は Jacobi の楕円関数である。i は  $t=0$  での初期条件を表わす添字である。

#### 4. 計算結果

方程式系(1)~(3)の数値積分結果は、上述した解に、方程式系(10)~(12)の数値解を重ねる事によって得られる。数値積分結果の一例は図 2, 図 3, 図 4 に示される。数値計算で使われたパラメータは、次のように示される。

キャリアー信号の周波数	2.5kHz
キャリアー信号の飽和振幅磁場	11m $\gamma$ (PT)
キャリアー信号の波長	2.8km
地球磁場強度	245 $\gamma$
電子サイクロトロン周波数	6.84kHz
コールド電子密度	250/cc

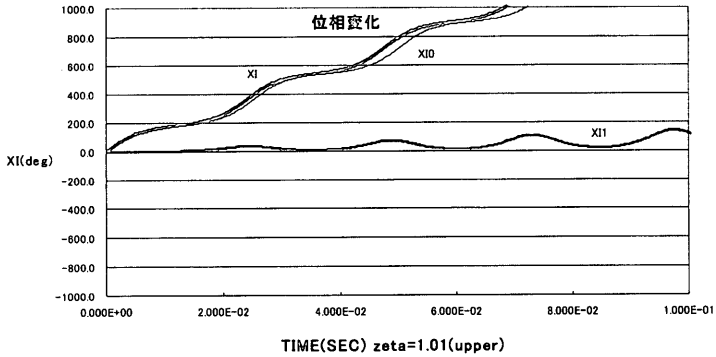


図2  $\zeta = 1.01, U_z > 0$  非捕捉電子の位相 ( $\xi_0, \xi_1, \xi$ ) 変化

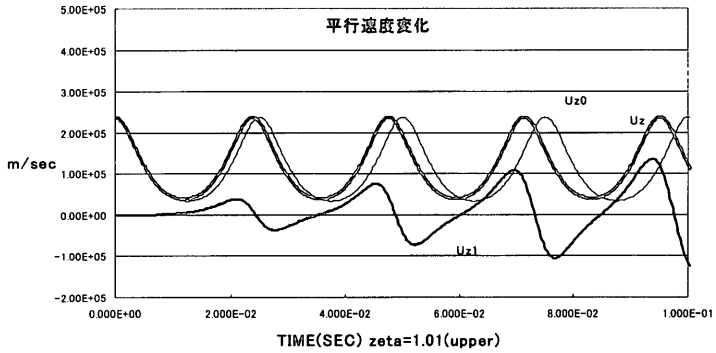


図3  $\zeta = 1.01, U_z > 0$  非捕捉電子の平行速度 ( $U_{z0}, U_{z1}, U_z$ ) 変化

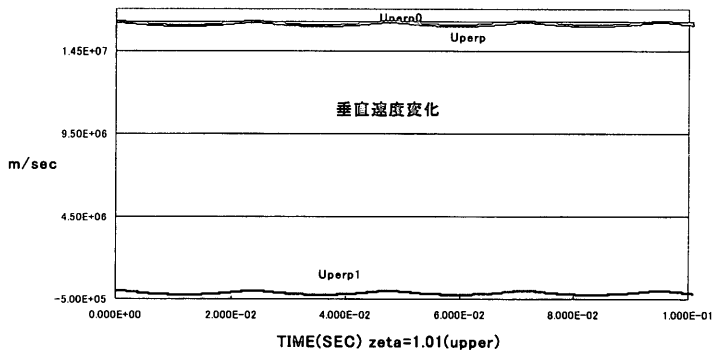


図4  $\zeta = 1.01, U_z > 0$  非捕捉電子の垂直速度 ( $U_{\perp 0}, U_{\perp 1}, U_{\perp}$ ) 変化  
 $U_{\perp 0}(U_{perp0}), U_{\perp 1}(U_{perp1}), U_{\perp}(U_{perp})$

共鳴電子の地球磁場に垂直なエネルギー  $E_{\perp}$  0.75keV

共鳴電子の地球磁場に平行なエネルギー  $E_z$  0.42keV

方程式(18)の複号のうち、 $\zeta = 1.01$ ,  $U_z > 0$  を持つ非捕捉電子の位相  $\xi$  (XI),  $\xi_0$  (XIO),  $\xi_1$  (XII) の時間変化は図 2 に示されている。磁力線に平行な速度について、共鳴速度  $V_R$  からのずれ  $U_z$ ,  $U_{z0}$ ,  $U_{z1}$  の時間変化は図 3 に示されている。磁力線に垂直な速度について、 $U_{\perp}$ ,  $U_{\perp 1}$ ,  $U_{\perp 0}$  の時間変化は図 4 に示されている。

図 3 の  $U_z$  と  $U_{z0}$  を比較すると、明らかに  $U_z$  の方が周期は短い。これは図 2 において、 $\xi$  (XI) が  $\xi_0$  (XIO) より勾配が大きくなっている事に对应している。この原因は、擾乱  $\xi_1$  (XII),  $U_{z1}$ ,  $U_{\perp 1}$  が重なる事により周期が短くなったためである。つまり池田<sup>5)</sup>が示したように、共鳴速度の座標系で現われる電場が、セパトリックスの直ぐ外側の非捕捉電子を加速したためと考えられる。それがさらに、位相バンチング電流を作る原因になっていると思われる。

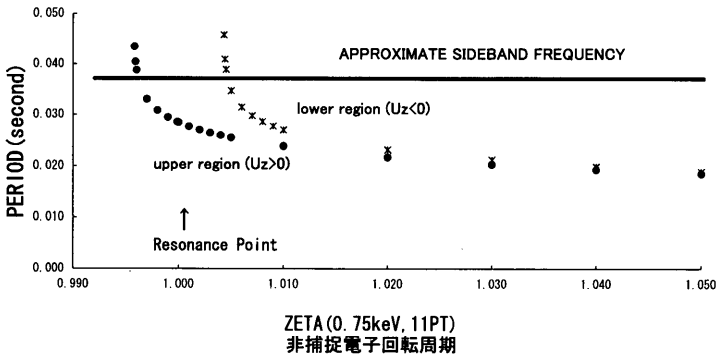


図 5  $\zeta$  に対する非捕捉電子の回転周期

図 5 には、非捕捉電子の軌道周期が  $\zeta$  に対して示されている。電場による加速、あるいは減速効果により、共鳴速度  $V_R$  に対して非対称な影響が現われている。もし対称ならば、 $U_z > 0$  をもつ非捕捉電子の周期と、 $U_z$

$< 0$  をもつ非捕捉電子の周期は重なったはずである。しかし、 $U_z < 0$  をもつ非捕捉電子に対しては減速効果が作用しており、結果的に  $1.0042 \geq \zeta > 1$  の非捕捉電子は捕捉されるし、 $\zeta \geq 1.0043$  の非捕捉電子の周期は長くなる。逆に  $U_z > 0$  をもつ電子に対しては、 $\zeta \geq 0.996$  の捕捉電子は加速により非捕捉電子になり、 $U_z > 0$  かつ  $\zeta > 1.0$  の非捕捉電子は加速により周期が短くなっている。この周期が位相バンチングにより作られるサイドバンド生成電流の周期に対応しており、逆数がサイドバンド周波数に対応するはずである。 $\zeta$  が大きくなる場合、位相バンチングしたサイドバンド電流は小さくなり、サイドバンド周波数の上限を与える事になると想像される。

周期が長くなり、無限大に達する場合は、その軌道上に停留点がある事を意味しており、位相共鳴が現われた事を意味する。図5に示されているように、位相共鳴点は、この場合  $\zeta = 1.0042$  近くと、 $\zeta = 0.996$  近くに2ヶ所ある事が分かる。

## 5. バンドギャップ形成の検討

実際には、前章で示した位相共鳴点近くの軌道が安定に存在する可能性は低いかもしれない。方程式系(1)~(3)において、運動の不変量の一つは次のように表される。それは、 $V_R$  と共に動く共鳴座標系において、

$$\frac{1}{2} m U_z^2 - \frac{m \omega_1}{k} U_{\perp} \cos \xi = \text{const.} \quad (21)$$

である。

$$\xi = \pi \quad (180^\circ) \quad (22)$$

の時、方程式(2)と  $U_{\perp} > 0$ 、 $U_z > 0$  より、 $U_z$  は極小値をとる事が分かる。図6参照。そこには、 $\zeta = 0.03, 0.1, 0.3, 0.5, 0.9, 0.996, 1.001, 1.0042$  (lower),  $1.01$  の軌道が  $U_z - \xi$  (XI) 位相図の中に示されている。計算の初期値は、 $U_z > 0$ 、 $\xi = 0$  で与えられたが、「lower」と記された $\zeta$

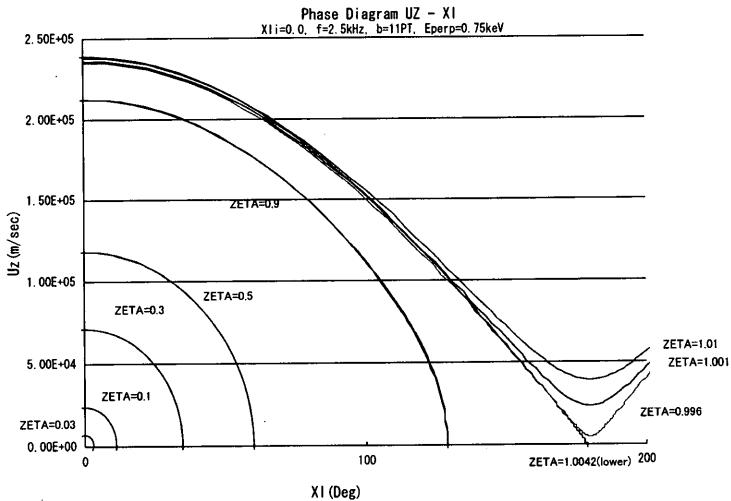


図6 U<sub>z</sub> > 0 かつ 0° ≤ ξ ≤ 200° の範囲の U<sub>z</sub> - ξ (XI) 位相図

に対しては、初期値は U<sub>z</sub> < 0, ξ = 0 で与えられた。非捕捉電子の平行速度 U<sub>z</sub> は 180° で極小値をとっており、この 2 次元位相図上で、軌道が交差しているように見える。

したがって、運動エネルギー  $\frac{1}{2} mU_z^2$  も極小値をとる事が分かる。

$$\frac{dU_z}{dt} = 0 \quad (23)$$

これは、位相ポテンシャル  $-\frac{m\omega_1}{k} U_{\perp} \cos \xi$  のなだらかな山の頂上を非捕捉電子がゆっくりと越えて行く事を意味している。

この位相ポテンシャルの頂上付近では、キャリアー信号からの力がほとんど無くなる。もし、雑音がこの物理過程に加わっていたなら、頂上付近で雑音の影響は最も大きくなり、容易に軌道は大きくずれてしまうだろう。この時、雑音の影響が U<sub>z</sub> を減速させ、位相 ξ (XI) を乱し、サイドバンド波を生成する位相バンチング電流を消滅させる可能性がある。次に、この U<sub>z</sub> に対する散乱を定式化してみよう。キャリアー信号の増幅によるスペクトルブロードニングを雑音の主候補と考え、雑音電磁波の磁場の効果



が電場の効果より大きいと考える。ある軌道上で停留点に近づく際に、方程式(3)より、

$$\frac{\Delta \xi}{\Delta t} \approx k U_{z \min} \quad (24)$$

ただし、 $U_{z \min} (> 0)$  は軌道上の  $U_z$  の極小値とする。この論文では、減速効果により、非捕捉電子が捕捉される場合を仮定する。方程式(2)において雑音効果を考慮し、 $\xi$  が  $\pi - 1$  から  $\pi$  に、1 ラジアン変化する間に最も効率よく散乱が行われると仮定して、荒い見積りをする。

$$\Delta \xi \approx \pi - (\pi - 1) = 1 \quad (25)$$

$$\frac{0 - U_{z \min}}{\Delta t} \approx -U_{\perp 0} \frac{eb_N}{m} \sin(\pi - 1) \approx -U_{\perp 0} \frac{eb_N}{m} \sin \frac{\pi}{2}$$

$b_N$  を雑音磁場として上式を整理すると、

$$\frac{U_{z \min}}{\Delta t} \approx U_{\perp 0} \frac{eb_N}{m} \quad (26)$$

方程式(24)~(26)をまとめ、 $\Delta t$ 、 $\Delta \xi$  を消去すると、

$$U_{z \min} \approx \sqrt{\frac{U_{\perp 0}}{k} \frac{eb_N}{m}}$$

逆に上式から  $b_N$  を導き出すと、

$$b_N \approx \frac{m}{e} \frac{k U_{z \min}^2}{U_{\perp 0}} \quad (27)$$

つまり、 $\zeta$  で決まる軌道上の極小速度 ( $U_{z \min}$ ) をさらに減速・散乱させるには、雑音磁場振幅は  $b_N$  以上でなければならない。方程式(27)で決まる  $b_N$  は、サイドバンドギャップを形成する近似的な下限の雑音磁場振幅と考えられる。

## 6. 議論と問題点

雑音磁場振幅  $> b_N$  の時、 $U_{z \min}$  を持つ  $\zeta$  の軌道は散乱され、サイドバン

ド生成電流は作られない。一般的にキャリアー信号は増幅により、振幅は増大し、周波数幅が広がる。キャリアー周波数に近い ( $\sim 30\text{Hz}$ ) 周波数帯のサイクロトロン共鳴領域では、たとえ地上で観測されなくとも、この磁場振幅は大きいのでサイドバンド生成電流が作られず、結果的にサイドバンドギャップが形成される可能性がある。もしキャリアー信号の磁場振幅  $b$  がさらに大きくなると、キャリアー波の周波数帯がさらに広がり、サイドバンドギャップの周波数帯が上昇すると想像される。これが、キャリアー信号の磁場振幅  $b$  に対して、ホイスラーモードサイドバンド波の周波数が上昇する原因になるとと思われる。2章で導入したモデルにおいて、Ikeda<sup>4)</sup>によると、サイドバンド周波数は次のように与えられる。

$$f_2^{\pm} = \frac{1}{2K\left(\frac{1}{\zeta_2^{\pm}}\right)} \sqrt{kU_{\perp 0}\omega_1\zeta_2^{\pm}} \quad (28)$$

ただし、 $K$  は第1種完全楕円積分であり、 $\zeta_2^{\pm} \approx 1.0000010176$ 、 $K\left(\frac{1}{\zeta_2^{\pm}}\right) \approx 7.9$ である。 $b$  が大きくなると、 $\omega_1$  も大きくなり、結果的に  $f_2^{\pm}$  が  $b$  と共に大きくなる事を表わしている。図5において、 $b=11\text{m}\gamma$  の時、(28)式で表わされるサイドバンド周波数の逆数  $1/f_2^{\pm}$  が太線で示されている。 $\zeta_2^{\pm}$  の位置は図5上で、Resonance Point として、矢印で示されている。例えば、周期0.036秒より長い周期の部分は、キャリアー周波数に近づくため(ゼロのサイドバンド周波数)、キャリアー周波数帯の雑音効果により、サイドバンドギャップになるとと思われる。

実際のサイドバンドギャップの広がりについては、キャリアー信号の周波数帯スペクトル、散乱・加速・減速過程等に依存するため、大まかな議論をしているこの論文では確定できない。しかしながら、外部磁場、コールドプラズマ密度、入射ホイスラーモード波の振幅がいずれも一定である場合においても、サイドバンドギャップが形成される一つの可能性を示していると思われる。

サイドバンドギャップ形成のより詳細な物理過程の検討には、波動を經由した捕捉電子と非捕捉電子の結合も含んだ、非常に複雑な問題等を考え

る必要がある。ただし、第1次の近似として、非捕捉電子のバンチングサイドバンド電流のスペクトルを計算する事がその第一歩であると思われる。筆者は、それらのスペクトルの詳細を、近い将来求めるつもりである。

電力線放射の高調波が磁気圏内で増幅する事によって、準単色ホイスラーモード波は生成され、地上まで伝搬し観測される。地上で観測される準単色ホイスラーモード波のサイドバンド波とブロードな特性を解析する事により、磁気圏プラズマの特性が明らかにされる。宇宙環境の一つの観測項目として、電力線放射の高調波を考えるならば、内部磁気圏のプラズマ特性が明らかになり、その後の磁気圏、放射線帯、電離圏等の変化が予測される。もちろん、電力線放射の高調波の影響と準単色ホイスラーモード波の影響はいくつかの点で異なる。周波数の異なる2種類以上の単色ホイスラーモード波と共鳴電子の相互作用は検討される必要がある課題である<sup>6),7)</sup>。しかしそれは将来の研究課題であろう。

## 謝辞

この研究は、筆者が武蔵大学特別研究員として、2002年から2003年にかけて国立極地研究所に滞在し、計算機を使いながら発展させたものです。国立極地研究所の多くの方々へ感謝の意を表したいと思います。又、イギリス、ケンブリッジ大学 British Antarctic Survey の Andy Smith 博士、サザンプトン大学 D. Nunn 教授には貴重なアドバイスと問題点を指摘して頂き、大変感謝致しております。又インド、F.G.M. Government College の Dinesh Pal Singh 博士からは激励を頂き、深く感謝致します。最後に、武蔵大学において、筆者を特別研究員に推薦し、多くの点で協力して下さいました学生、教員、スタッフの皆様には心から御礼申し上げます。有難うございました。

## [註]

- 1) C. G. Park, J. Geophys. Res., 86, 2286 (1981)
- 2) K. Rastani et al., J. Geophys. Res., 90, 4128 (1985)

12      ホイスラーモードサイドバンド波を形成する周波数ギャップの検討 池田 慎

- 3) M. Ikeda, Proceedings of The Fifth International School/Symposium for Space Simulation, P21 (1997)
- 4) M Ikeda, Indian J. Radio & Space Phys., 31, 121 (2002)
- 5) 池田 慎, 武蔵大学人文学会雑誌, 第33巻, 第2・3号, 裏P164 (2002)
- 6) L. A. D. Sa', J. Appl. Phys. 66, 3482 (1989)
- 7) S. K. Matsoukis, Geophys. Res. Lett., 25, 265 (1998)

(2003年1月9日 受理)

7