生産可能集合の正則近似について

伊藤　成康[a]

JEL Classification Codes：C02, D24
キーワード：生産可能集合，効率性指標，Dmitruk and Koshevoy の定理

生産活動の効率性分析を主題とした研究の蓄積は膨大なものであるが，そもそも効率性を測る指標が充足すべき条件とはどのようなものであるかについての公理論的な考察というテーマも，Färe and Lovell（1978）の問題提起以後，一つの重要なトピックとして研究者達の注目を集めることとなった．この話題に関しては，Dmitruk and Koshevoy（1991）により Färe and Lovell が提案した基準をみたす効率性指標の存在を保証する生産可能集合の特徴づけがなされたことで一応の完結をみたと言えるが，Dmitruk and Koshevoy が示した条件がどれほど広範に成立するものであるかの精査は行われてこなかった．本稿では，第 2 節において，この問題に対する肯定的な解答を与える．

1．効率的生産の特徴づけ

新古典派経済学では，企業が実現可能な生産要素の投入と生産物の産出の組み合わせを生産可能集合と呼び，この概念を基礎に生産理論が展開されていく．投入，産出ベクトルを，それぞれ，$x \in R_+^n$（n 次元ユークリッド空間の非負象限），$y \in R_+^m$（m 次元ユークリッド空間の非負象限）とし，x の投入により y の産出が可能，という関係を示す $R_+^n \times R_+^m$ の部分集合，すなわち生産可能集合を T で表す．次に T に関して標準的に想定される条件を列記しておこう（数学記号の用法等については論文末尾に注としてまとめてある）．

〔$T1$〕 $(0,0) \in T$ かつ $(0,y) \in T \Rightarrow y = 0$

〔$T2$〕 T は（$R_+^n \times R_+^m$）の閉集合

〔$T3$〕 $(x,y) \in T$, $(x,-y) \leq (u,-v) \Rightarrow (u,v) \in T$

〔$T4$〕 すべての $x \in R_+^n$ に対し，

$T(x) := \{(u,y) \in T \mid u \leq x\}$ は有界

ここで，$T1$,$T3$,$T4$ の各条件は，それぞれ，桃源郷の不可能性，投入・産出の自由処分可能性，生産物の希少性の条件などと称せられる．$T1$ の前半の条件は，無活動が可能という形で T が空でないことを要求し，$T1$ の後半の条件と $T4$ は，経済的な選択の問題を考える意味があることを要求しているものと解釈できる．$T2$ は，生産関数，費用関数，距離関数，等々といった経済分析の展開において重要な役割を果たす基礎概念が well-defined であるために不可欠の closedness の条件である．生産活動の効率性評価においては，「他の条件が一定ならば，投入はより小さい方が，産出はより大きい方が better」という Pareto 順序が重視されるが，$T3$ は，生産可能集合 T がそれ自身の自由処分包（free disposable hull）を含んでいる，すなわち，ある投入･産出の組 (x,y) が技術的に実現可能なら，上記の意味でこれより非効率な投入・産出の組も実現可能なことを要求している．また，

$$(x,y) \in T \Leftrightarrow y \in P(x) \Leftrightarrow x \in L(y)$$

として産出集合 $P(x)$（T の x 切り口）と必要投入集合 $L(y)$（T の y 切り口）が定義される．

さらに，$P(x)$ と $L(y)$ の境界（より広義の効率集合）にあたる生産フロンティア $Isoq\ P(x)$ と等量集合 $Isoq\ L(y)$ が

$$Isoq\ P(x) := \{ y \in R_+^m \mid \theta > 1 \Rightarrow (x,\theta y) \notin T \},$$

$$Isoq\ L(y) := \{ x \in R_+^n \mid \theta > 1 \Rightarrow (\theta^{-1}x, y) \notin T \},$$

と定義され，y と $Isoq\ P(x)$ との射線(ray)方向の乖離度，また，x と $Isoq\ L(y)$ との射線方向の乖離度を測る指標として，Shephard の産出距離関数 $D^o(x,y,T)$，投入距離関数 $D^i(x,y,T)$ が定められる．すなわち，

$$D^o(x,y,T) := \sup\{\theta \in R_+ \mid (x,\theta y) \in T\},$$

$$D^i(x,y,T) := \sup\{\theta \in R_+ \mid (\theta^{-1}x,y) \in T\}$$

である．なお，文献上では $D^o(x,y,T) := \inf\{\theta \in R_+ \mid (x,\theta^{-1}y) \in T\}$ という産出距離関数の定義を採用する立場が支配的なようだが，「距離」のニュアンスを重視するなら本稿の定義の方が自然である．

ところで，効率フロンティアに近い，すなわち，効率

a 武蔵大学経済学部　教授

的な投入 - 産出ベクトルの集合との距離が小さい生産ほど効率的と捉えて，たとえばShephard投入距離関数$D^i(x,y,T)$の逆数を効率性指標と定義するという考え方は自然な発想である．効率性分析の分野で最もポピュラーなDebreu-Farrell測度がまさにそれである．観察された投入 - 産出ベクトルと効率フロンティアの乖離が小さいほど効率性が高くなるように効率性指標を規定すればよいのであれば首尾よしといえるが，たとえばLeontief technologyを考えてみれば分かるように，等量線の上にある点がスラックを含みPareto効率的であるとは限らないため，$D^i(x,y,T)=1$は$(x,y)\in\varepsilon(T)$（$\varepsilon(T)$はTの効率フロンティア）と同義ではないのである．距離関数Dがみたすべき性質"$D(x,y,T)=1 \Leftrightarrow (x,y)\in\varepsilon(T)$"をindication propertyと呼ぶならば，Debreu-Farrell測度の背後にあるShephardの距離関数D^iは，このindication propertyを普遍的には充足しない．これまでShephardの距離関数以外にも様々な距離関数が提唱されているが，他の距離関数はindication propertyを充足するのであろうか．こうした疑問に答えるべく，indication propertyを含め，各距離関数に依拠した効率性指標の妥当性をチェックする基準がFäre and Lovell（1978）により提案され，いわばこのスクリーニング・テストをパスしたものだけが適格と見なされるようになった．彼らの基準は以下の$E1$～$E3$である．

$E1$: 効率性指標関数$E(x,y,T)$がindication propertyをみたす
　if and only if　$E(x,y,T)=1 \Leftrightarrow (x,y)\in\varepsilon(T)$

$E2$: $E(x,y,T)$が同次性（homogeneity）をみたす
　if and only if　$E(\lambda x,y,T)=\lambda^{-1}E(x,y,T)$

$E3$: $E(x,y,T)$が単調性（monotonicity）をみたす
　if and only if　$E(x,y,T)>E(x',y,T)$　for all $x'\geq x$　but　$x'\neq x$

$E1$については，"$E(x,y,T)=1 \Rightarrow (x,y)\in\varepsilon(T)$"サイドの含意が厳しいことは既述の通りである．$E2$は，経済指数が満たすべき条件として望ましいものではあるが，便宜的なものであり，緩和の余地がある．$E3$はPareto順序の保存を要求するものである．

残念なことに，Färe and Lovell論文発表の後，Bol（1986）によって条件$E1$～$E3$を同時に充足する効率性指標は存在しないという不可能性命題が示され，この問題を克服するために，スクリーニング基準自体の見直し，生産可能集合がとり得る範囲の制約を行うことで，一群の効率性指標が新たなスクリーニング・テストをパスするか否かの検証が進められることとなった．中でも，基準$E1$～$E3$を充足する効率性指標の存在を保証する生産可能集合の特徴づけに成功したDmitruk and Koshevoy（1991）の研究は画期的なものであった．彼らは，効率集合$E=\varepsilon(T)$よりもさらにPareto順序に関して効率的な投入・産出の全体（super-efficient set）$A=E-R_+^n\times R_-^m$の閉包$\bar{A}$とTの共通部分がEに一致すれば，当該生産可能集合Tの正則な拡張T^*上でDebreu-Farrell測度が$E1$～$E3$をみたすことを示した．ここではAが閉集合になることがアノマリーを排除する重要な条件になっている訳だが，Eがコンパクト集合であるケースやTが多面体の自由処分包にあたるケースでは条件DK : $\bar{A}\cap T=E$が成立する．DEA（包絡分析）で扱われる生産可能集合は，まさに後者のケースに該当する．問題はDK条件が成立する技術（生産可能集合）がどれほど制限的であるか否かである．幸いにも，自由処分条件$T3$をみたす生産可能集合はDK条件をみたす正則な生産可能集合の極限として表されることが分かる．つまり，Bolの反例は極めてartificialなもので，これを気に病む必要はないということである．この主張が正しいことを次節に示す．

2．生産可能集合の正則近似

議論を簡単化するため，以下では，$L+R_+^n\subset L$かつLは閉集合，という条件をみたす必要投入集合Lに的を絞って議論を進める．さらに，$\omega<x$　for all　$x\in L$となる$\omega\in R_{++}^n$の存在を仮定する．これは，$n=2$のケースでいえば，等量線が座標軸に漸近しないことを意味する．このとき，ωを頂点とする錐$\{\omega\}+R_+^n$はLを含む多面体になっている．多面体は効率性条件DKをみたすので（Dmitruk and Koshevoy（1991）命題Ⅱ.9），$E1$～$E3$をみたす効率性指標を定義できる正則な拡張L^*をもつ（Dmitruk and Koshevoy（1991）主張Ⅱ.11）．

いま，$u\in\partial L$に対し，$\phi(u)=u-\theta(u)\iota$，$\theta(u)=\sup\{\theta\in R_+ \mid u-\theta\iota\in L^*\}$，$\iota=(1,\cdots,1)$とすれば，$\phi$は$\partial L$から$L^0=\phi(\partial L)\subset\partial L^*$への全単射となる．$\psi=\phi^{-1}$として，$x\in L^0$に対し，

$$f^t(x)=(1-t)x+t\psi(x)\quad\text{for}\quad t\in[0,1]$$

と定義する．このとき$L^t=\{f^t(x)\in R_+^n \mid x\in L^0\}$が$L^0$から$L^1=\partial L$への連続変形を与える．

〔命題〕

$f^t(x)$は$L+R_+^n$で効率的である．

（証明）

ある$t\in(0,1)$に対し$f^t(x)$が$L+R_+^n$で非効率的ならば，$z\in L+R_+^n$が存在して$z<f^t(x)$となる．$z\in L+R_+^n$であるから，$f^t(x')\leq z$なる$x'\in L^0$を見出し得る．すると，ベクトル順序の推移性から，$f^t(x')<f^t(x)$が従う．これより，$x'+t(\psi(x')-x')<x+t(\psi(x)-x)$または$x'-x<t(\theta(\psi(x))-\theta(\psi(x')))\iota$が導かれる．$x',x$

$\in L^0$ であるから，$t(\theta(\psi(x))-\theta(\psi(x')))\iota$ が非正ベクトルであることはあり得ない．よって$\theta(\psi(x))>\theta(\psi(x'))$．ある $t\in(0,1)$ で $x'-x < t(\theta(\psi(x))-\theta(\psi(x')))\iota$ が成立するなら，この不等式は $t=1$ でも成立し，$\psi(x') << \psi(x)$ が導かれる．しかし，これは $L+R_+^n \subset L$ となる L に対し$\psi(x),\psi(x')\in\partial L$ であることと矛盾する．

（証明終了）

ちなみに，この証明に現れる関数θはよく知られた方向距離関数に対応するが，L^*が下方有界かつ閉だからθ，ϕは well-defined である．自由処分可能性をみたす生産可能集合が構成する冪空間に適切な位相を導入すれば，DK 条件を充足する正則な生産可能集合が稠密になるといった別表現も可能となろうが，その確認は他日の課題としたい．

本稿を終える前に，Dmitruk and Koshevoy の研究成果の意義が学界内でも十分に共有されていないことを示す残念な例にふれておきたい．

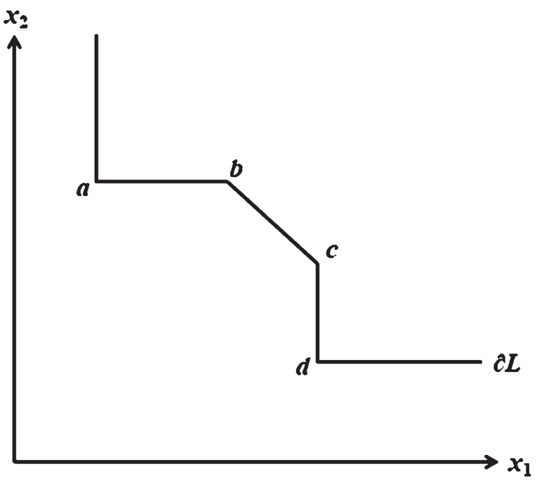

図 1　DK 条件をみたさない等量集合

図 1 には，DK 条件がみたされない等量集合のイメージ図が描かれている．∂L の効率点の集合は $\{a\}\cup\{d\}\cup(b,c)$ であり，Färe and Lovell の条件 $E1$ から $E(a,L)=E(b',L)=1$である．ただし，b'はbに限りなく近い(b,c)上の任意の点とする．このとき，$x\in(a,b)$ に対し，条件 $E3$ をみたす実数 $E(x,L)$ の割り振りは不可能であることが直ちにわかる[1)]．このような明白な反例が示されているにもかかわらず，Cooper,Huang and Zhu（2008）は効率指標の定義が可能だと反論した．著者らは DEA の大御所とも言うべき研究者達である．Cooper らの主張にも一理ありそうに見えるのは，効率指標の値域が実数区間［0,1］ではなく Abraham Robinson の所謂非標準実数区間［0,1］* とされていて，それが indication property の確保に一役買っているからであるが，不連続性の問題は依然として解消していない[2)]．そのことを隠して Dmitruk and Koshevoy（Bol）の研究を陳腐な代物（outdated）呼ばわりするのは見識が疑われるとしか言いようがない．筆者は，Russell（1998）や Sickles and Zelenyuk（2019）による Dmitruk and Koshevoy の正当な評価に賛同するものである．

注

1）Dmitruk and Koshevoy（1991）補題Ⅱ.2 によれば，$E2$，$E3$ をみたす効率性指標は，上半連続でなければならないが，点 b では上半連続性が成立しない．

2）Cooper らは，必ずしも強い indication property をみたさないが連続性はみたす Debreu-Farrell 指標からスラックに nonarchimedean number を掛けた無限小数を引く形で効率指標を定義したが，こうすると，区間［a,b］上のどの点も標準実数の世界では効率値 1（1 と同一視される値）が付与されるが，非標準実数の世界では各点の効率値はスラックに応じた差がつけられる，といった詭弁じみた説明がなされる．しかし，点 b での上半連続性の崩れは否定すべくもない．連続性が担保されているのは Debreu-Farrell 指標部分だけであって，Cooper らの指標は非標準実数の世界で考えても連続性をみたさない．

数学記号注

⇒：論理的含意（「ならば」），⇔：論理的同値，∈：元（げん）の集合への帰属，$A\cap B$：集合 A と B の共通部分，R_+^n：非負実数半直線の n 重積（n 次元ユークリッド空間の非負象限），$x\leq u \Leftrightarrow x_i \leq u_i$，$i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$x<u \Leftrightarrow x\leq u$ かつ $x\neq u$，$x << u \Leftrightarrow x_i < u_i$，$i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$\partial L$：$L$ の位相的境界，"x は L で効率的" ⇔ "$u<x \Rightarrow u\notin L$"，等々とする．

参考文献

Bol, G.(1986), “On Technical Efficiency Measures : A Remark,” *Journal of Economic Theory* 38, 380-386.

Cooper,W.W.,Z.Huang and S.L.J.Zhu(2008), “A Response to the Critique of DEA by Dmitruk and Koshevoy, and Bol,” *Journal of Productivity Analysis* 29, 15-21.

Debreu G.(1951), “The Coefficient of Resource Utilization,” *Econometrica* 19, 273-292.

Dmitruk, A.V. and G.A.Koshevoy(1991), “On the Existence of a Technical Efficiency Criterion,” *Journal of Economic Theory* 55, 121-144.

Färe, R. and C.A.K.Lovell(1978), “Measuring the Technical Efficiency of Production,” *Journal of Economic Theory* 19, 150-162.

Färe, R., S.Grosskopf and R.R.Russell (eds.) (1998), *Index Numbers : Essays in Honour of Sten Malmquist*, Springer

Farrell,M.J.(1957), "The Measurement of Productive Efficiency," *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A 120, 253-290.

Malmquist,S.(1953),"Index Numbers and Indifference Surfaces," *Trabajos des Estadistica* 4(2), 209-242.

Russell, R.R.(1985), "Measures of Technical Efficiency," *Journal of Economic Theory* 35, 109-126.

Russell, R.R.(1990), "Continuity of Measures of Technical Efficiency," *Journal of Economic Theory* 51, 255-267.

Russell, R.R.(1998), "Distance Functions in Consumer and Producer Theory," in Färe, R. et al. eds., pp.7-90.

Russell, R.R. and W.Schworm(2009), "Axiomatic Foundations of Efficiency Measurement on Data-Generating Technologies," *Journal of Productivity Analysis* 31, 77-86.

Russell, R.R. and W.Schworm(2011), "Properties of Inefficiency Indexes on <input,output> space," *Journal of Productivity Analysis* 36, 143-156.

Shephard, R.W.(1953), *Cost and Production Functions*, Princeton University Press

Shephard, R.W.(1970), *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton University Press

Sickles,R.C. and V.Zelenyuk(2019), *Measurement of Productivity and Efficiency ; Theory and Practice*, Cambridge University Press