

Sperner の補題の証明をめぐって

伊藤 成康^a

JEL Classification Codes : C02

キーワード : Sperner の補題

問題の所在

本稿では、経済学研究者にとっても馴染の深い Sperner の補題 (1928) のグラフ理論的証明における要点を整理し、二階堂 (1959) を論難した西岡 (2014) の主張が的外れであることを指摘したい。

厳密な概念規定については後述することとして、Sperner の補題は次のような命題である。すなわち、 n 次元単体 Δ の単体分割において新たに生成された頂点 (0 次元単体) に、Sperner の規則に従って Δ の頂点を対応付けていくと、各頂点が Δ の頂点と一対一に対応する正則部分単体が奇数個できるというものである。この定理は位相幾何学 (ホモロジー論) の深遠な結果とも繋がりを持つもので、そうした枠組みの下での Pontryagin (1952) や Naber (1980) のような証明も提示されているが、この定理の証明として最もよく知られているのは、Alexandrov (1956) に代表される組み合わせ論的な初等的証明であろう。

単体分割に含まれる部分単体は、その頂点が Δ のどの頂点と対応付けられているかにより、正則部分単体、準正則部分単体、その他の部分単体に類別されるが、正則部分単体には正則辺単体が 1 つ、準正則部分単体には正則辺単体が 2 つ含まれ、その他の部分単体には正則辺単体が含まれない。単体分割に含まれる正則部分単体の総数を c 、準正則部分単体の総数を a 、正則辺単体の総数を b 、正則部分単体または準正則部分単体が隣接共有する正則辺単体の総数を l とし、 $k = b - l$ とおくと、これらの間には

$$(1) \quad c + 2a - l = k + l (=b)$$

という関係が成立する。この式の両辺は、いずれも正則辺単体の総数を表しているが、左辺は各部分単体に含まれる正則辺単体の個数を合計したのち重複計上分を除い

たものであり、右辺は、正則小辺単体が Δ の正則辺単体に含まれるか Δ の内部に含まれるかに応じて分計したものである。この関係式から

$$(2) \quad c = k + 2(l - a)$$

が導かれ、次元に関する数学的帰納法により Sperner の補題が従う。

上記の証明には次のようなグラフ理論的なバリエーションもある。 n 次元単体 Δ の単体分割に含まれる n 次元部分単体を (グラフの) 頂点とし、それらが共有する正則辺単体を (グラフの) 辺とするグラフが生成される。正確には、 Δ の (最大の) 正則辺単体に含まれる正則小辺単体と接続する新たな頂点を加えてグラフを完結する必要がある。こうして生成されたグラフの頂点の次数 (degree) に関する握手定理から

$$(3) \quad c + 2a + k = 2(k + l) = 2b$$

が成立し、 c と k は 2 を法として合同であることがわかる。いうまでもなく、(3) 式は (1)、(2) 式と同じものとなっている。このグラフにおいて正則部分単体に対応するのが次数 1 の頂点であり (新たに付け加えた頂点は除く)、その総数が c である。準正則部分単体に対応する (グラフの) 頂点は次数 2 であり、その総数は a である。正則でも準正則でもない部分単体は辺に接続しない孤立頂点に対応し、次数は 0 である。そして、グラフを完結するために導入した artificial な頂点 v_0 の次数が k 、辺の総数が b ということになる。Sperner のラベル付け規則から、 v_0 に接続する辺に対応する正則小辺単体は Δ の正則辺単体以外には含まれないから、数学的帰納法により k は奇数と判定される。

以上は Sperner の補題の組み合わせ論的な証明を愚直になぞった議論ではあるが、未定義概念を濫用した verbal なスケッチにすぎない。そこで、少々退屈な作

a 武蔵大学経済学部 教授

業にはなるが、改めて Sperner の補題のフォーマルな記述に進むことにしよう。

単体分割と Sperner の補題

以下の議論に必要となる概念規定から始めよう。

〔定義〕(ベクトルのアフィン独立性)

m 次元ユークリッド空間 R^m に含まれる n 個のベクトル $x^0, \dots, x^n$ は、 $\sum_{i=0}^n \lambda_i x^i = 0$ かつ $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$ ならば $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$ となるとき、アフィン独立であるという。

〔定義〕(n 次元単体・辺単体)

$(n+1)$ 個のアフィン独立なベクトル $x^0, \dots, x^n$ の凸結合 $\Delta = x^0 \cdots x^n$ を n 次元 (閉) 単体 (simplex) といい、 h 個のベクトル x^i (ただし $i \in \{i_0, \dots, i_h\} \subset \{0, \dots, n\}$) を含む最小次元のベクトル空間と Δ の交わりを Δ の辺単体 (face) という。また、 Δ に含まれるそれ自身単体であるものを Δ の部分単体 (subsimplex) という。

〔定義〕(単体分割)

Δ の単体分割 (simplicial subdivision) とは、次の 2 条件をみたす Δ の部分単体の有限集合 $T = \{T_i \mid i \in I\}$ (I は有限添数集合) を指している：

- (i) $\Delta = \bigcup_{i \in I} T_i$,
- (ii) 任意の $i, j \in I$ に対し、 $T_i \cap T_j$ は空であるかまたは T_i と T_j が共有する (T_i と T_j に共通に属する) 辺単体 (= 隣接面) になっている。

〔定義〕(頂点写像・ラベル付け)

Δ のある単体分割に含まれるすべての部分単体の頂点の集合を W とするとき、 $\nu: W \rightarrow \{x^0, \dots, x^n\}$ を頂点写像 (vertex map)、 $\lambda: W \rightarrow \{0, \dots, n\}$ s.t. $\nu(w) = x^{\lambda(w)}$ をラベル付け (labeling) という。 $y \in \Delta$ は一意的に $y = \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i$ と表されるが、 $\chi(y) = \{i \in I \mid \lambda_i > 0\}$ に対し、 $\lambda(w) \in \chi(w)$ をみたす頂点写像 ν をプロパーな頂点写像といい、対応する λ をプロパーなラベル付けという。また、 ν のある部分単体の頂点集合への制限が全射であるとき、定義域の頂点が張る部分単体を正則部分単体と呼ぶ。 ν のある部分単体の頂点集合への制限が $\{x^0, \dots, x^{n-1}\}$ への全射であるとき、定義域の頂点が張る部分単体を準正則部分単体と呼ぶ。さらに、ラベル付け λ により各頂点に $0, \dots, n-1$ のすべてが割り振られている T_i の辺単体を正則辺単体と呼ぶ。

Δ のすべての部分単体の頂点は λ により $0, \dots, n$ のいずれかにラベル付けされるが、 $0, \dots, n$ のすべてが各頂点のいずれかに割り振られている部分単体が正則部分単体であり、 $0, \dots, n-1$ のすべてが各頂点のいずれかに割り振られている部分単体が準正則部分単体である。そして、 $0, \dots, n-1$ のすべてが各頂点のいずれかに割り振られている (小) 辺単体が正則辺単体である。

プロパーなラベル付けは、 Δ 自身の辺単体に属する頂点のラベル付けを (対頂点のラベルを割り振らないように) 規制するため、正則 (小) 辺単体は Δ の内部か Δ 自身の元々の正則辺単体 $x^0 \cdots x^{n-1}$ にしか含まれない。正則辺単体のこの性質は決定的に重要である。

上記の諸定義を踏まえたうえで、改めて Sperner の補題は次のように表現される。

〔定理〕(Sperner の補題)

n 次元単体 Δ の単体分割と、これに対応するプロパーなラベル付け λ が与えられるとき、単体分割は奇数個の正則部分単体を含む。

(証明)

まず、正則部分単体には正則辺単体が 1 つ、準正則部分単体には正則辺単体が 2 つ含まれ、その他の部分単体には正則辺単体が含まれないという事実を念頭に置いておこう。冒頭にも述べたように、単体分割に含まれる正則部分単体の総数を c 、準正則部分単体の総数を a 、正則辺単体の総数を b 、正則部分単体または準正則部分単体が隣接共有する正則辺単体の総数を l とし、 $k = b - l$ とおくと、これらの間には

$$(1) \quad c + 2a - l = k + l (=b)$$

という関係が成立する。この式の両辺は、いずれも正則辺単体の総数を表しているが、左辺は各部分単体に含まれる正則辺単体の個数を合計したのち重複計上分 (l) を除いたものであり、右辺は、正則小辺単体が Δ の正則辺単体 $x^0 \cdots x^{n-1}$ に含まれるか Δ の内部に含まれるかに応じて分計したものである (前者が k 、後者が l)。この関係式から

$$(2) \quad c = k + 2(l - a)$$

が導かれ、 c と k は 2 を法として合同になる (奇数であるか偶数であるかが一致する)。

次に、 $n = 1$ のときの補題の証明を行ったうえで、単体の次元 n に関する数学的帰納法で補題の証明を完成する。

線分 $x^0 x^1$ を分点 y^i を端点とする小区間 $y^i y^{i+1}$ に分割したとき、 $\lambda(y^i) \neq \lambda(y^{i+1})$ となる小区間の数を数え上げる。 $\lambda(y^i) = 1$ となる最小の i に対し、 $y^{i-1} y^i$ が最初の正則部分単体 (正則小区間) になる。次に、 $\lambda(y^i) = 0$ となる最小の $j > i$ を探す。 $y^{i-1} y^i$ が 2 つ目の正則小区間になる。実は、2 つ目 (偶数番目の 1-0 という並び) の正則小区間があれば、 $x^0 x^1$ の右端点が $\lambda(x^1) = 1$ をみたすのだから、必ず最初とは別の 0-1 という並びの正則小区間が存在していなければならない。こうして正則小区間を数え上げていけば、必ず奇数個の正則小小区間が見出せる。

ところで、上記において k は次元が $n-1$ のときの正

則部分単体の総数, c は次元が n のときの正則部分単体の総数であったから, 次元に関する数学的帰納法により Sperner の補題の証明が完結する.

(証明終了)

Sperner の補題の証明には次のようなグラフ理論的なバリエーションもある. グラフとは, 頂点の集合 V , 辺の集合 E , 各辺 $e \in E$ の端点 v, w を指定する写像 $\psi: \psi(e) = vw$ の三組 $\langle V, E, \psi \rangle$ であり, n 次元単体 Δ の単体分割に含まれる n 次元部分単体を (グラフの) 頂点とし, それらが共有する正則辺単体を (グラフの) 辺とすれば, 単体分割における部分単体の重なり合いの規則からグラフ $\langle T^*, F, \psi \rangle$ が生成される. ここで, $T^* = T \cup T_0$ ($T_0: \Delta$ の補集合の閉包), $F: T$ の正則辺単体の集合, $\psi: T^*$ の元と F の要素の接続規則である. 正確には, T_0 と Δ の正則辺単体 $x^0 \cdots x^{n-1}$ に含まれる正則小辺単体との接続を規定する必要がある. 単体分割の条件 (ii) には反するが, T_0 は Δ の正則辺単体 $x^0 \cdots x^{n-1}$ に含まれるすべての正則小辺単体と接続していると定義すればグラフは完結する. こうして生成されたグラフの頂点の次数に関する握手定理 (頂点が接続する辺の個数を当該頂点の次数というが, グラフの全頂点の次数の合計は, 辺の総数の 2 倍に等しいという命題を握手定理という) から

$$(3) \quad c + 2a + k = 2(k + l) = 2b$$

が成立し, c と k は 2 を法として合同であることがわかる. 冒頭の議論の繰り返しになるが, このグラフにおいて正則部分単体に対応するのが次数 1 の頂点であり, その総数が c である. 準正則部分単体に対応する (グラフの) 頂点は次数 2 であり, その総数は a である. 正則でも準正則でもない部分単体は辺に接続しない孤立頂点に対応し, 次数は 0 である. そして, グラフを完結するために導入した T_0 に対応する artificial な頂点 v_0 の次数が k , 辺の総数が b ということになる. Sperner の対応規則 (プロパーなラベル付け) から, v_0 に接続する辺に対応する正則小辺単体は Δ の正則辺単体 $x^0 \cdots x^{n-1}$ 以外には含まれないから, 帰納法の仮定により k は奇数とされ, c も奇数となる.

上記の議論においては, 《正則小辺単体は, Δ の正則辺単体 $x^0 \cdots x^{n-1}$ に属するか, 正則部分単体もしくは準正則部分単体の隣接面になっていて, 後者のケースでは, 隣接する部分単体は唯一組に決まる》という事実を当然のこととして, 正則小辺単体の数え上げに進んでいるが, これは, グラフの文脈では, 一つの辺に接続する頂点が 3 個以上あるのは不合理ということに対応する. 単体分割の定義から明らかなように, 2 つの部分単体が隣接するとき, 隣接面の 2 つの対頂点は隣接面が張る超平

面の反対側に位置していなければならない. さもなければ 2 つの部分単体は隣接面にあたる小辺単体以外 (部分単体の内部) に交わりを持つ. たとえば, 隣接小辺単体の重心を中心とする十分小さな開半球を取ってみればよい. したがって, 3 個以上の部分単体が (次元が 1 つ低い) 1 つの辺単体を共有することはありえず, (1) 式左辺第 3 項の正則辺単体の重複計上分控除計算が正当化される. 西岡 (2014) は, 二階堂 (1959) の Sperner の補題の証明におけるこの点の確認が「2 次元や 3 次元の場合の幾何学的イメージに頼って」いて問題があると指摘している. しかし, これは看過できない中傷である. 先の括弧《》で括った主張は, 筆者が直前に素描したような推論により確認できる半ば自明な事実であり, わざわざこれを定理の一部に含めている Engelking (1989) でさえも僅か 7 行のあっさりとした言及にとどめている. 筆者に言わせれば, 二階堂 (1959) の証明が厳密でないというのなら, Sperner の補題を扱ったほぼ全先行研究を槍玉にあげねばならない. 西岡 (2014) にもう一つ嫌味を言っておくと, 有名な KKM 補題の Kuratowski を除く二人の著者名は, Kraster, Mazurkiewics ではなく, Knaster, Mazurkiewicz である. 残念なことだが, 複数箇所に誤記があるので, 名前を誤って記憶されていたのであろう.

おわりに

本稿では, 単体の単体分割が, 単純だが興味深いグラフを生成し, そのグラフに含まれる次数 1 の頂点が正則部分単体に対応し, グラフに関する握手定理から Sperner の補題が導かれることを示した. 「示した」というのは僭越で, 名著 Bondy and Murty (1976) に示された関連する議論を多少の補足も含めて紹介したというのが実際のところである. Sperner の補題が Cohen (1967), Scarf (1967), Kuhn (1968) らに始まる Brouwer の不動点を求めるアルゴリズムの開発をインスパイアしたことは周知の通りであるが, ここで紹介したグラフ理論的アプローチは, 不動点計算アルゴリズムを展望する際の基本的視座を与えるという意味でも有用である.

Sperner が示した着想は比較的最近の研究プロジェクトをも刺激しているようで, 竹内 (2011) が提示した「完全に番号づけられた点集合」の概念は単体分割における正則辺単体を一般化したものと考えられ, グラフ理論的な枠組みに基づく議論に置き換えられるのか否か, 等々に関し, 今後の研究の発展が待望されるところである.

参 考 文 献

- Alexandrov,P.S.(1956) *Combinatorial Topology*, Graylock Press
 Border,K.C.(1985) *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*, Cambridge University Press
 Bondy,J.A. and U.S.R.Murty(1976) *Graph Theory with Applications*, MacMillan Press
 Cohen,D.I.A.(1967) "On the Sperner Lemma," *Journal of Combinatorial Theory* 2, 585-587
 Engelking,R.(1989) *General Topology*, Heldermann Verlag
 Kuhn,H.W.(1968) "Simplicial Approximation of Fixed Points," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States* 61(4), 1238-1242
 Naber,G.L.(1980) *Topological Methods in Euclidean Spaces*, Cambridge University Press
 Pontryagin,L.S.(1952) *Foundations of Combinatorial Topology*, Graylock Press
 Scarf,H.(1967) "The Approximation of Fixed Points of a Continuous Mapping," *SIAM Journal of Applied Mathematics* 15, 1328-1343
 Sperner,E.(1928) "Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes," *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 6, 265-272
 竹内幸雄 (2011)「Brouwer's fixed point theorem とその周辺(バナッハ空間論の研究とその周辺)」京都大学『数理解析研究所講究録』2011,1753 140-151
 二階堂副包 (1959)『現代経済学の数学的方法』岩波書店
 西岡久美子 (2014)「Brouwer の不動点定理の証明」『三田学会雑誌』107 巻1号 45-52