

コンビニエンス・イールドの期間構造の修正 Laguerre 多項式による表現

神楽岡 優昌^a

要 旨

原油先物の期間構造や時間発展をモデル化するためのファクター・モデルとして、修正 Laguerre 多項式を提唱した。既存研究は Nelson-Siegel モデル (NS モデル) を採用して、ダイレクトに原油先物価格に適用しており、理論的解釈や実証結果との整合性に問題がある。これに対して、本研究は原油先物価格から推定されるコンビニエンス・イールドを対象に修正 Laguerre 多項式を適用しており、ファイナンス理論において解釈に矛盾はなく、またコンビニエンス・イールドの変動に対する主成分分析による実証結果と整合する。実務への応用として、修正 Laguerre 多項式の唯一のパラメーターである減衰係数の推定方法を2つ提案し、ヘッジの有効性を NS モデルと比較して分析した。第0次、第1次、第2次の修正 Laguerre 多項式を3つのファクターとして採用し、減衰係数を次数毎に別々に設定すれば、修正 Laguerre 多項式に基づくヘッジ戦略の有効性が極めて高いことが示された。

JEL Classification Code : C6; G1

キーワード : Laguerre polynomials; Crude oil; Futures; Convenience yields

1 はじめに

満期の異なる原油先物価格間の相互関係、および、原油先物価格と経済指標の関係を分析することは、コンビニエンス・イールドの期間構造が1次元の広がった対象であるため、難しい問題である。コンビニエンス・イールドのモデル化は、金利の期間構造のモデルを転用して発展してきた。金利の期間構造のモデル化には2つのアプローチがある。第1の方法は、スポットレートもしくはフォワードレートを確率過程で表現するもので、Vasicek (1977) や Cox et al. (1985), Heath et al. (1993) が代表例である。第2の方法は、スポットレートもしくはフォワードレートを少ない数のパラメーターで表すファクター・モデルを適用するものである。Choudhry and Lizzio (2015), Diebold and Li (2006), Diebold et al. (2006) は、第2の方法の代表例である。なかでも Diebold and Li (2006) は、Nelson and Siegel (1987) モデル (以後、NS モデル) を適用することにより、金利の期間構造を構成するファクター間の変動を調べた。Diebold et al. (2006) はこの研究を発展させ、金利の期間構造と経済指標の相互関係を状態空間モデルを適用して明らかにした。NS モデルは1時点の金利の期間構造を3つのファ

クターの線形結合で表し、それぞれのファクターは、水準 (長期金利の水準)、傾き (長短金利差)、曲率 (長短金利に対する中期金利の「くぼみ」もしくは「くぼみ」と解釈される。これらの論文の公表以降、期間構造と経済指標の相互関係の研究は、専ら NS モデルを適用するのが一般的である。原油先物のコンビニエンス・イールドのモデル化も例外ではなく、NS モデルの原油先物価格への適用は、以下に要約するように様々である。

Heidorn et al. (2015) は、NS モデルを用いて、WTI 原油先物価格および WTI とブレントのスプレッドの期間構造に対するファンダメンタル・トレーダーとフィナンシャル・トレーダーの影響を調べた。実証分析の結果、(1) ファンダメンタル・トレーダーは、先物曲線の価格水準に影響をあたえる一方、フィナンシャル・トレーダーはその傾きに影響をあたえること、(2) ネット・ポジションの代わりに、フィナンシャル・トレーダーには相対ロング・ポジション、ファンダメンタル・トレーダーには相対ショート・ポジションを用いると、経済的なポジショニングをよりよく反映すること、(3) フィナンシャル・トレーダーはブレントと WTI 市場の価格差を縮小させ、市場の統合に貢献していることを発見した。

Grønberg and Lunde (2016) は NS モデルを用いて、

a 武蔵大学経済学部教授

原油先物の価格を決定する3つの潜在ファクター(水準, 傾き, 曲率)を抽出し, 多変量時系列を得た。コンピュータのテクニックを用いて, 3つの一変量時系列とそれらの依存構造のモデル化ができる分解をおこなった。そのファクターを Normal Inverse Gaussian Innovations を持つ GARCH モデルのクラスを用いて柔軟なコンピュータの枠組みでモデル化を行った。このモデルにより, 原油先物の価格を正確に予測し, ポートフォリオの Value at Risk を計算できた。

Bredin et al. (2021) は, 原油先物価格の期間構造を用いて, 原油先物の予測可能性を分析した。NS モデルを用いて, 水準, 傾き, 曲率という主要ファクターを抽出し, これらのファクターで原油リターンを予測できるか調べた。その結果, NS ファクターは原油先物リターンに対する予測力を持つこと, マクロ経済および原油に特化したファンダメンタルズを取り入れると, 予測の頑強性が向上することを示した。

Bianchi et al. (2023) は, NS モデルを適用して原油先物価格を含むコモディティ先物価格の期間構造をモデル化し, そのファクターである水準, 傾き, 曲率を利用した投資戦略の開発を目的とした。特に, 傾きに基づく戦略(S戦略)が, リスク・ファクターに依存しない顕著な利益を生み出し, 合理的な取引コストを考慮しても持続可能であることを示した。さらに, S戦略の利益は投資家のセンチメントと密接に関連し, 経済低迷時の損失補填として一部機能することが示唆された。分析結果は, 傾きと曲率に基づく戦略がアウト・サンプルにおいても有意な利益を生むことを確認し, 特にS戦略が他のリスク・ファクターに対しても優位性を持つことを示した。

上述の通り, 原油先物価格の期間構造に対するNSモデルの適用は大きな成果を収めたが, 幾つかの問題点がある。第1に, 保有期間リターンにNSモデルを適用しているBredin et al. (2021)を例外としてすべての既存研究は, コンビニエンス・イールドではなく, 原油先物価格そのものにダイレクトに, 金利のスポットレートに対するNSモデルを適用していることである。そもそもNSモデルは金利の期間構造という「レート」を基礎的

対象として, フォワードレートあるいはスポットレートのモデル化をおこなった。それに対して, 「価格」を基礎的変数とするならば, フォワードレートやスポットレートに対応する概念は存在せず, NSモデルのファイナンス理論における解釈を困難にする。すなわち, 原油先物価格にNSモデルを適用したならば, 原油先物価格のフォワードレートやスポットレートなど, 解釈が不可能な奇妙な対象を導入したことになる。NSモデルの理論的枠組みを尊重するならば, コンビニエンス・イールドのフォワードレート表現あるいはスポットレート表現にNSモデルを適用すべきである。

第2の問題点はコンビニエンス・イールドの動的な性質との整合性である。NSモデルは1時点の期間構造のスナップショットを表すために導入されており, 期間構造の時間発展については言及していない。しかしながら, 観測時点ごとにコンビニエンス・イールドの期間構造をNSモデルで表すことは, 期間構造の時間発展もNSモデルで表されることを陰に示しており, 期間構造の時間発展から推定される主成分とNSモデルのファクターとの対応が整合しているか検証されるべきである。主成分分析の結果に従うと, 短期金利が下落(あるいは, 上昇)し, 長期金利が上昇(あるいは, 下落)する変動は, 第2主成分のみの変動でひきおこされるが, NSモデルでその変動を生成するには, 水準と傾きの両方のファクターの変動を必要とする¹。

本論文の目的は, 原油先物のコンビニエンス・イールドの期間構造の時間発展と整合するファクター・モデルを構築することである²。コンビニエンス・イールドを対象にすることにより, そのフォワードレート表現とスポットレート表現を矛盾なく解釈できる。最初にコンビニエンス・イールドの変化を対象にした主成分分析により, ボラティリティの大部分が最初の3つの主成分で説明することを明らかにする。この事実に基づいて, 第0次, 第1次, 第2次のLaguerre多項式を修正した関数(以後, 修正Laguerre多項式)をファクターとして採用する。修正Laguerre多項式のグラフの形状は減衰係数と呼ばれるパラメータで決定される。本研究では減衰係数の推

¹ NSモデルのファクターの取りうる値が, 満期に関して同符号であることに注意せよ。例えばNSモデルの「傾き」のファクターが引き起こす変動に注目すると, 変異幅は満期が長いほど小さくなるが, すべての満期に関して金利の上昇, あるいは, すべての満期に関して金利の下落を生成する。したがって, 短期金利が下落(マイナスの変化)し, 長期金利が上昇(プラスの変化)する変動(後述の主成分分析による実証結果が示唆する変動)をNSモデルの「傾き」のファクターだけでは生成できない。短期金利が下落(マイナスの変化)し, 長期金利が上昇(プラスの変化)する変動をNSモデルで生成するには, NSモデルの「傾き」に対するローディングがプラスで, 同時にNSモデルの「水準」に対するローディングがマイナスとなる2つのファクターの変動を必要とする。

² 正確にはコンビニエンス・イールドではなく, 後に説明するように金利調整済みスプレッドの期間構造の時間発展のモデル化をおこなう。

定手続きを新たに提案する。修正 Laguerre 多項式の有用性は、投資対象としてコンビニエンス・イールドを原資産とするインストゥルメントとその先物を仮想的に考え、それらの投資対象から構築したポートフォリオのヘッジ戦略の有効性に基づいて検証する。実証分析は NS モデルと比較して議論する。

本論文の構成は以下の通りである。第 2 節では金利調整済みスプレッドを導入し、NS モデルを紹介したのちに、修正 Laguerre 多項式を開発する。第 3 節では実証分析に用いるデータを紹介し、減衰係数の決定方法を 2 つ説明する。第 4 節ではファクター・モデルによるヘッジ戦略を構築し、実証分析をおこなう。第 5 節は結論と今後の展望を述べる。

2 金利調整済みスプレッドの修正 Laguerre 多項式による表現

2.1 金利調整済みスプレッド

原油の時刻 t におけるスポット価格を $S(t)$ 、時刻 t における満期時刻を $T = t + \tau$ とする原油先物の価格を $F(t, T)$ 、とする。時刻 t 、満期時刻 $T = t + \tau$ の金利調整済みスプレッド $s(t, T)$ は、時刻 t 、満期時刻 T のリスクフリー・レートを $r(t, T)$ として、関係式

$$F(t, T) = S(t) \exp((r(t, T) + s(t, T))\tau),$$

で定義する。時刻 t 、満期時刻 $T = t + \tau$ の保管コストを $u(t, T)$ 、時刻 t 、満期時刻 $T = t + \tau$ のコンビニエンス・イールドを $y(t, T)$ として

$$F(t, T) = S(t) \exp((r(t, T) + u(t, T) - y(t, T))\tau),$$

とも表せるから

$$s(t, T) = u(t, T) - y(t, T)$$

が成り立つ。コモディティに関する多くの論文がコンビニエンス・イールドを研究対象とすると称しているが、現実の取引における保管コストが不明なため、コンビニエンス・イールドを $y(t, T) - u(t, T)$ と再定義して議論をおこなっている。金利調整済みスプレッドを以後スポット・スプレッドとも呼ぶ。これと対比して、フォワード・スプレッド $z(t, u)$ を関係式

$$(T - t)s(t, T) = \int_t^T du z(t, u)$$

で定義する。

2.2 Nelson-Siegel モデル

金利の期間構造を表すために Nelson and Siegel (1987)

が提唱したファクター・モデルは、時刻 t 、満期時刻 $T = t + \tau$ のフォワードレート $f(t, T)$ をファクター $f_i(\lambda, \tau)$ ($i = 1, 2, 3$) の線形和

$$f(t, T) = f(t, t + \tau) = \sum_{i=1}^3 \beta_{i,t} f_i(\lambda, \tau)$$

$$f_1(\lambda, \tau) = 1,$$

$$f_2(\lambda, \tau) = e^{-\lambda\tau},$$

$$f_3(\lambda, \tau) = \lambda\tau e^{-\lambda\tau}$$

で表す。ここで λ は減衰係数とよばれるパラメーターである。このとき、スポットレートは

$$r(t, T) = r(t, t + \tau) = \sum_{i=1}^3 \beta_{i,t} g_i(\lambda, \tau)$$

$$g_1(\lambda, \tau) = 1,$$

$$g_2(\lambda, \tau) = \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right),$$

$$g_3(\lambda, \tau) = \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right)$$

と表される。Diebold and Li (2006) にしたがって、 $\lambda = 0.0609$ と選択したときのファクターについて、横軸に満期（単位は月）として、フォワードレートを図 1 に、スポットレートを図 2 に示す。

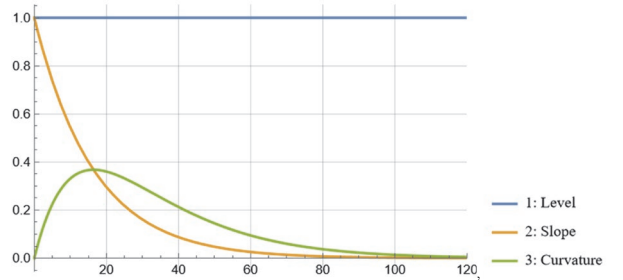


図 1 Nelson-Siegel モデルのフォワードレート表現
横軸は満期（単位は月）、縦軸は小数表示のフォワードレート。

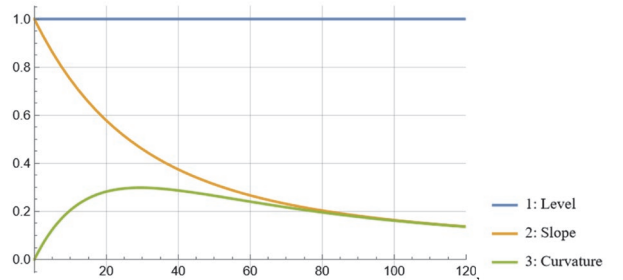


図 2 Nelson-Siegel モデルのスポットレート表現
横軸は満期（単位は月）、縦軸は小数表示のスポットレート。

2.3 修正 Laguerre 多項式

Laguerre 多項式は

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

で定義される (Lebedev, 1972). Laguerre 多項式は直交基底を生成する.

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x} L_n(x) L_m(x) = \delta_{n,m}$$

最初の 3 つの多項式は

$$L_0(x) = 1,$$

$$L_1(x) = 1 - x,$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(2 - 4x + x^2)$$

と書かれる. Laguerre 多項式でフォワードレートの期間構造を表すために $\frac{1}{2}x$ を $\lambda\tau$ で置き換えて, 修正 Laguerre 多項式

$$\ell_n(\tau) := \sqrt{2\lambda} e^{-\lambda\tau} L_n(2\lambda\tau)$$

を導入する³. これらの多項式は互いに直交する.

$$\int_0^{\infty} d\tau \ell_n(\tau) \ell_m(\tau) = \delta_{n,m}.$$

後ほど記述する, 金利調整済みスプレッドのフォワードレート表示の主成分分析の実証結果を反映して, 金利調整済みスプレッドのフォワードレートが最初の 3 つの修正 Laguerre 多項式の線形和で表されると仮定する.

$$f(t, T) = f(t, t + \tau) = \sum_{i=0}^2 \beta_{i,t} \ell_i(\lambda, \tau),$$

$$\ell_0(\lambda, \tau) = \sqrt{2\lambda} e^{-\lambda\tau},$$

$$\ell_1(\lambda, \tau) = \sqrt{2\lambda} e^{-\lambda\tau} (1 - 2\lambda\tau),$$

$$\ell_2(\lambda, \tau) = \sqrt{2\lambda} e^{-\lambda\tau} (1 - 4\lambda\tau + 2\lambda^2\tau^2).$$

このとき, 修正 Laguerre 多項式のスポットレート表現は,

$$r(t, T) = r(t, t + \tau) = \sum_{i=0}^2 \beta_{i,t} r_i(\lambda, \tau),$$

$$r_0(\lambda, \tau) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{\tau} (1 - e^{-\lambda\tau}),$$

$$r_1(\lambda, \tau) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{\tau} (-1 + e^{-\lambda\tau} (1 + 2\lambda\tau)),$$

$$r_2(\lambda, \tau) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{\tau} (1 - e^{-\lambda\tau} (1 + 2\lambda^2\tau^2)).$$

であたえられる. NS モデルと共通に, $\lambda = 0.0609$ と選択したときのファクターについて, 横軸に満期 (単位は

月) として, フォワードレートを図 3 に, スポットレートを図 4 に示す. 第 0 次の修正 Laguerre 多項式はすべての満期について正の値をとるため「水準」に対応する, 第 1 次の修正 Laguerre 多項式は短期で正の値, 中期で負の値をとるため「傾き」に対応する, 第 2 次の修正 Laguerre 多項式は短期で正の値, 中期で負の値, 長期で正の値をとるため「曲率」に対応する.

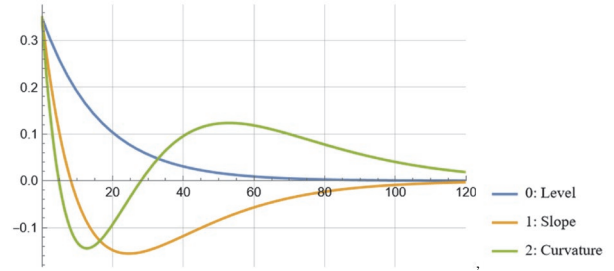


図 3 修正 Laguerre 多項式のフォワードレート表現

横軸は満期 (単位は月), 縦軸は小数表示のフォワードレート.

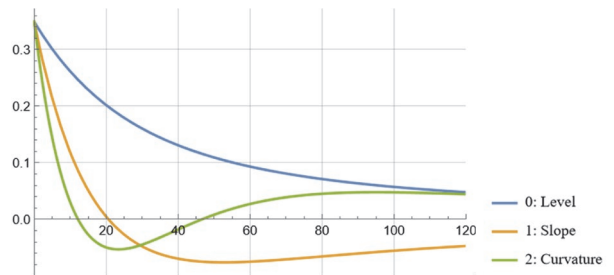


図 4 修正 Laguerre 多項式のスポットレート表現

横軸は満期 (単位は月), 縦軸は小数表示のスポットレート.

3 減衰係数の決定

修正 Laguerre 多項式の形状は, 減衰係数と呼ばれる, 唯一のパラメータ λ で決まる. 本節では最初に分析データを解説したのちに減衰係数の 2 つの決定手順を説明する.

3.1 データ

原油先物はブレント原油先物を対象とする. 分析期間を 2005 年 2 月 9 日から 2022 年 12 月 28 日までとする週次データで, 合計 934 の観測日がある. この期間中, 5 年までの満期について, ブレント原油先物価格データが記録されている. 但し流動性を考慮して, 分析対象の満期は 3 年までとする. 世界で最も知られている WTI 原油先物が現物決済であるのに対し, ブレント原油先物は差金決済も認められているため, 決済に起因する特異な

³ 同様の Laguerre 多項式の修正は Ghaderi et al. (2011) も議論している.

価格形成の影響を緩和することができる。金利は通貨をドルとする LIBOR レートとスワップレートを用いた。分析対象となる金利調整済みスプレッドの満期は、1ヶ月から1年まで1月刻み、1年3ヶ月から3年まで3ヶ月刻みとして、合計 20 とした。推定された金利調整済みスプレッドのプロットを図 5 に、その 3 次元プロットを図 6 に掲げる。

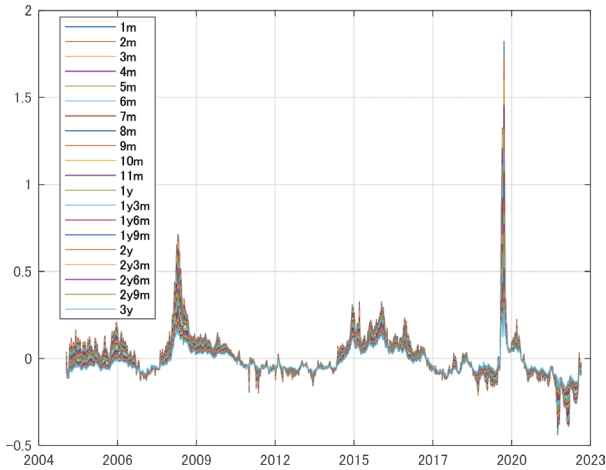


図 5 金利調整済みスプレッドのフォワードレート表現の時系列

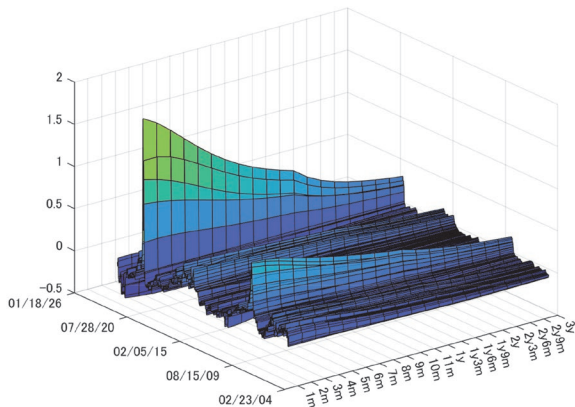


図 6 金利調整済みスプレッドのフォワードレート表現のサーフェス・プロット

3.2 減衰係数の決定：金利調整済みスプレッドの期間構造への適合

修正 Laguerre 多項式の第 0 次、第 1 次、第 2 次多項式について、減衰係数の値を共通とし、さらに、減衰係数の値を時変ではなく定数とする。この仮定の下で観測日ごとに 3 年までの全ての満期について、金利調整済みスプレッドの市場レートと修正 Laguerre 多項式による理論レートの誤差の 2 乗平均値を算出し、さらに全観測日に対して総和を算出し、この総和の最小化を図るよう減衰係数の値を決定した。修正 Laguerre 多項式と比較するため NS モデルの減衰係数も同様の手法で推定した。

減衰係数は修正 Laguerre 多項式の場合 $\lambda=0.087078$ 、NS モデルの場合 $\lambda=0.300000$ と推定された。

3.3 減衰係数の決定：主成分への適合

金利調整済みスプレッドがファクター・モデルで表されると仮定するとき、金利調整済みスプレッドの時間変化を対象に主成分分析をおこない、得られる主成分をファクターとみなすことが少なくない。そこで、金利調整済みスプレッドのフォワードレート表現に主成分分析をおこない、主成分を抽出する。フォワードレート表現を対象とした理由は、満期の異なるフォワードレート同士は理論的に無相関と仮定して議論を進められるからである。なお、満期が近いスポットレート同士は理論的に相関し、モデル化を複雑にする。

金利調整済みスプレッドのフォワードレート表現について週次変化を計算し、そのボラティリティ（標準偏差）を推定した結果を図 7 に掲げる。満期が 1 ヶ月のボラティリティが最も高く、満期が長くなるに従いボラティリティは指数関数的に単調減少する。

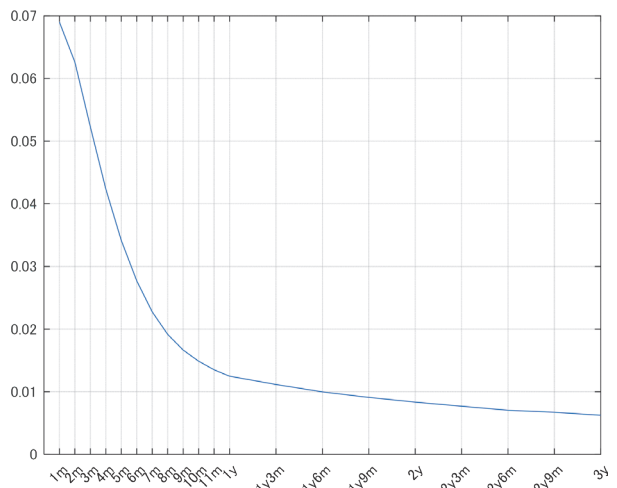


図 7 金利調整済みスプレッドの週次変化のボラティリティの満期による違い

フォワードレートの時間変化に主成分分析を行った結果は以下の通りである。最初の 8 番目までの主成分を図 8 に、主成分で説明される分散の割合を図 9 に掲げる。主成分で説明される分散の割合は、第 1 主成分が 87.6476%、第 2 主成分が 9.3285%（累積で 96.9761%）、第 3 主成分が 1.8237%（累積で 98.7998%）、第 4 主成分以降は 1% 未満であった。実証結果から 3 つまでのファクターをモデル化すれば十分であると結論する。第 1 主成分はすべての満期について正の値をとるため「水準」に対応する、第 2 主成分は短期で正の値、中期で負の値をとるため「傾き」に対応する、第 3 主成分は短期で負

の値，中期で正の値，長期で負の値をとるため「曲率」に対応する。

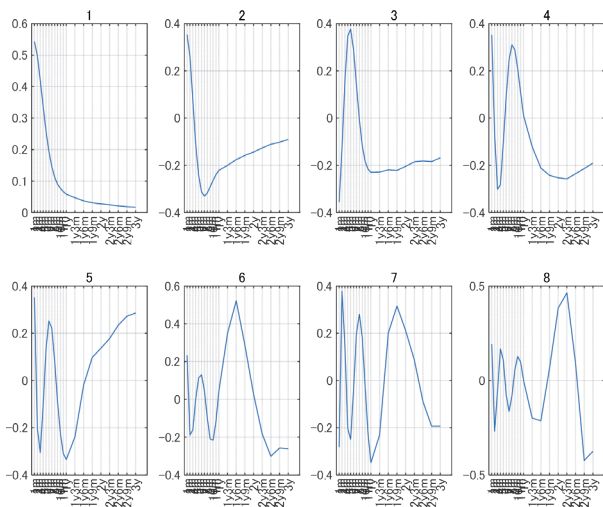


図8 金利調整済みスプレッドの週次変化の第1主成分から第8主成分

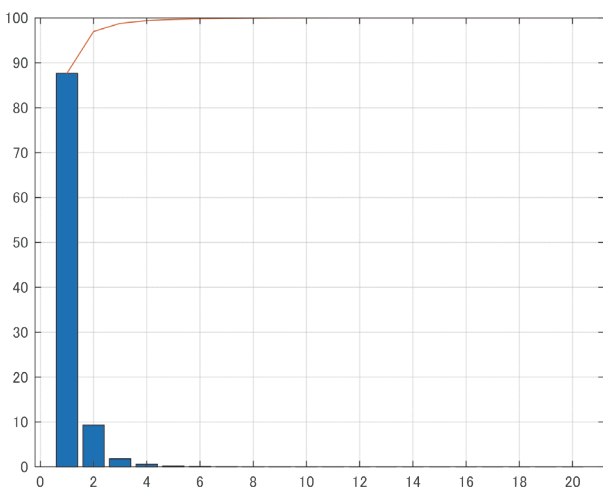


図9 金利調整済みスプレッドの週次変化の分散で，主成分で説明された比率（パーセント表示）
各主成分で説明された分散の比率を棒グラフ，主成分で説明された分散の累積の比率を折れ線グラフであたえる。

主成分分析の結果に基づき，第0次，第1次，第2次の修正Laguerre多項式の線形和でフォワードレートを表す。これまで減衰係数は唯一と前提してきたが，Laguerre多項式の次数毎に異なると仮定する。そして，第0次Laguerre多項式が第1主成分とできる限り一致するように第0次Laguerre多項式の減衰係数 λ_0 を決定する。同様に，第1次Laguerre多項式が第2主成分とできる限り一致するように第1次Laguerre多項式の減衰係数 λ_1 を，第2次Laguerre多項式が第3主成分とできる限り一致するように第2次Laguerre多項式の減衰係数 λ_2 を決定する。表1に推定結果をあたえる。

表1 主成分分析結果に適合させた場合の修正Laguerre多項式の減衰係数

	λ_0	λ_1	λ_2
PCA	0.098241	0.163494	0.790530

表1のように減衰係数を選択し，修正Laguerre多項式の係数を主成分に適合させた場合について，第0次修正Laguerre多項式と第1主成分，第1次修正Laguerre多項式と第2主成分，第2次修正Laguerre多項式と第3主成分を図10～12に示す。修正Laguerre多項式と主成分の間に乖離はあるものの，修正Laguerre多項式が2つのパラメータ（減衰係数と修正Laguerre多項式に対する係数）だけで形状が決まることを考慮すると適合度は低いとは言えない。

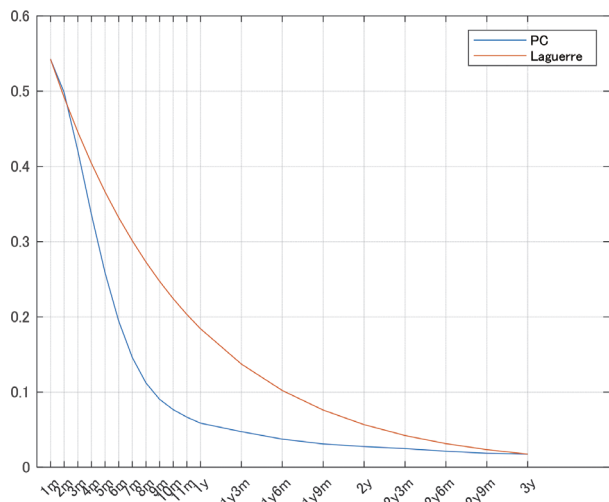


図10 第0次修正Laguerre多項式と第1主成分

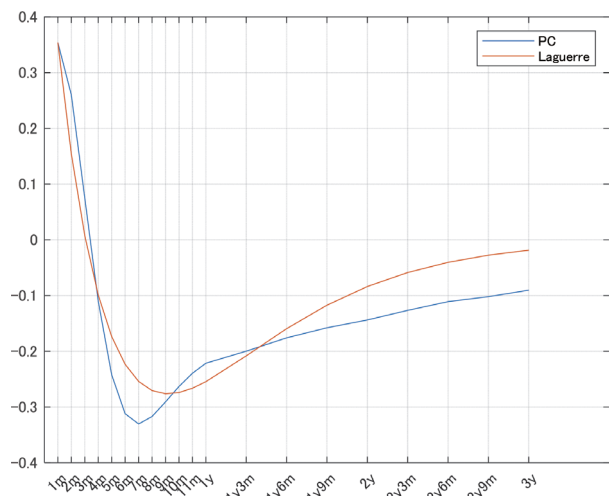


図11 第1次修正Laguerre多項式と第2主成分

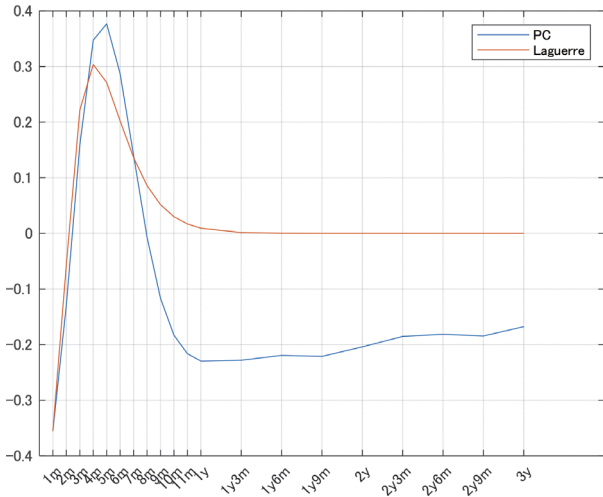


図 12 第 2 次修正 Laguerre 多項式と第 3 主成分

4 実証分析：修正 Laguerre 多項式を用いたヘッジ

4.1 ヘッジ・ポートフォリオの構築：定式化

投資対象は、ブレント原油先物リンク債とそれを原資産とするブレント原油先物リンク債先物とする。ブレント原油先物リンク債の市場価格は、満期を τ_j とすると、 $P(\tau_j) = \exp(-\tau s(\tau_j))$ ($j = 1, \dots, K$) であたえられると前提する。ここで $s(\tau_j)$ は満期が τ_j のブレント原油先物の金利調整済みスプレッドである。ブレント原油先物リンク債先物は異なる 3 つの満期が取引されており、その市場価格は、満期を ξ_a ($a = \text{Short, Middle, Long}$) とすると、満期を $\tau_j = \xi_a$ とするブレント原油先物リンク債と等しいと前提する⁴。ブレント原油先物リンク債先物はヘッジにだけ用いられる。以下では、ブレント原油先物リンク債から構築されるポートフォリオを、ブレント原油先物リンク債先物を用いてヘッジすることを考える。⁵

ブレント原油先物リンク債からなるポートフォリオのヘッジ戦略を構築する。金利調整済みスプレッド $s(\tau)$ は 3 つのファクター $f_k(\tau)$ の線形和であたえられると仮定する。

$$s(\tau) = \sum_{k=0}^2 \beta_k f_k(\tau)$$

j 番目のブレント原油先物リンク債への投資枚数を w_j と記すと投資ポートフォリオの価値は

$$\Pi = \sum_{j=1}^K w_j P(\tau_j)$$

である。3 つのファクターそれぞれに対するブレント原油先物リンク債の感応度は

$$\frac{\partial}{\partial \beta_k} P(\tau) = (-f_k(\tau)) \tau \exp(-\tau s(\tau))$$

であり、投資ポートフォリオの感応度は

$$\frac{\partial}{\partial \beta_k} \Pi = \sum_{j=1}^K w_j (-f_k(\tau_j) \tau_j) \exp(-\tau_j s(\tau_j))$$

である。ヘッジ・ポートフォリオは、満期が ξ_j のブレント原油先物リンク債先物 v_j 枚から構築する。

$$\Pi_h = \sum_{j=1}^3 v_j F(\xi_j)$$

ヘッジ条件

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (\Pi + \Pi_h) = 0$$

から、

$$v = -w \frac{\partial P}{\partial \beta_k} \left[\frac{\partial F}{\partial \beta_k} \right]^{-1}$$

が得られ、ヘッジするためのブレント原油先物リンク債先物の枚数を決定できる。

4.2 ケース・スタディ

実データを用いて、ヘッジの有効性を具体的に検討する。投資対象は、投資ポートフォリオ構築日において、満期日を 3 ヶ月後から 1 年後まで 1 月刻み、1 年 3 ヶ月後から 3 年後まで 3 ヶ月刻みとするブレント原油先物リンク債、および、原資産をブレント原油先物リンク債として、満期を 3 種類とする先物とする。ヘッジ対象のポートフォリオは原油先物リンク債で、3 ヶ月以上の満期について等ウェイトで保有する。当初のブレント原油先物リンク債のポートフォリオの価値は 1 に規格化する。ヘッジに用いる先物は 3 種類で、(a) 満期日を 3 ヶ月後、6 ヶ月後、1 年後と (b) 満期日を 3 ヶ月後、6 ヶ月後、3 年後とする場合の 2 つのケースを考える。また、取引においてコストや摩擦はないとする。ヘッジのホライズンは 1 週間後とし、当初残存期間が τ のブレント原油先物リンク債の満期は 1 週間後に $\tau - \frac{7}{365.25}$ 年に、満期日を 3 ヶ月後、6 ヶ月後、1 年後、3 年後とするブレント原油先物リンク債を原資産とする先物の満期はそれぞれ

⁴ 金利調整済みスプレッドを 3 ファクター・モデルで記述するのに対応して、ヘッジ手段の個数を 3 とする。

⁵ 満期を ξ_j とするブレント原油先物リンク債先物の代わりに、満期を ξ_j とするブレント原油先物リンク債の現物を用いてヘッジ・ポートフォリオを構築することを考えてもよい。ただし、現物のロング、ショートにおいて売買代金は発生せず、反対売買時に差金決済されるものとする。

表2 ヘッジしたポートフォリオの価値変化

(a) ブレント原油先物リンク債を原資産とする先物の満期日を3ヶ月後、6ヶ月後、12ヶ月後とする場合

	no-hedge	(1) Laguerre-min	(2) Laguerre-PCA	(3) Nelson-Siegel
平均	0.000121	0.000490	-0.000076	0.000080
標準偏差	0.029464	0.004908	0.001937	0.001819
ヘッジ有効度		0.972251	0.995679	0.996190

(b) ブレント原油先物リンク債を原資産とする先物の満期日を3ヶ月後、6ヶ月後、3年後とする場合

	no-hedge	(1) Laguerre-min	(2) Laguerre-PCA	(3) Nelson-Siegel
平均	0.000121	0.000490	-0.000076	0.000080
標準偏差	0.029464	0.004908	0.001937	0.001819
ヘッジ有効度		0.833420	0.934268	0.938274

$\frac{3}{12} - \frac{7}{365.25}$ 年, $\frac{6}{12} - \frac{7}{365.25}$ 年, $1 - \frac{7}{365.25}$ 年, $3 - \frac{7}{365.25}$ 年
となる。

ヘッジ戦略は、

【Laguerre-min】修正 Laguerre 多項式を用い、 λ は金利調整済みスプレッドのエラーを最小化するように設定、 λ は水準、傾き、曲率で共通に設定。

【Laguerre-PCA】修正 Laguerre 多項式を用い、 λ は金利調整済みスプレッドの主成分と一致するように設定、 λ は水準、傾き、曲率で別々に設定。

【Nelson-Siegel】修正 Laguerre 多項式を用い、 λ は金利調整済みスプレッドのエラーを最小化するように設定、 λ は水準、傾き、曲率で共通に設定。

の3通りを検討した。

ヘッジしたポートフォリオの1週間後の価値の変化について、平均と標準偏差、ヘッジをしないポートフォリオに対するヘッジ有効度を表2に示す。ここでヘッジ有効度は

$$1 - \frac{\text{ヘッジをしたときのポートフォリオの価値変化の分散}}{\text{ヘッジをしなかったときのポートフォリオの価値変化の分散}}$$

で定義される。ブレント原油先物リンク債を原資産とする先物の満期日を3ヶ月後、6ヶ月後、1年後とする場合、Laguerre-PCA が最も低い平均と標準偏差をもち、ヘッジ有効度も最も高い。ブレント原油先物リンク債を原資産とする先物の満期日を3ヶ月後、6ヶ月後、3年後とする場合、Nelson-Siegel が最も低い標準偏差をもち、ヘッジ有効度も最も高いが、Laguerre-PCA とほとんど差がない。ブレント原油先物リンク債を原資産とする先

物の満期日について2通りのケースを分析した結果から、Laguerre-PCA によるヘッジが最も効果的と結論する。なお、本分析では、Laguerre-PCA では主成分分析の結果を事後的に用いてヘッジしていることに注意が必要である。実務への適用では、主成分分析をおこなう推定期間をローリングして、主成分を抽出し、修正 Laguerre 多項式の減衰係数を決定すればよい。

5 結論と今後の展望

原油先物価格から推定される金利調整済みスプレッドの期間構造や時間発展をモデル化するためのファクター・モデルとして、修正 Laguerre 多項式を提唱した。修正 Laguerre 多項式は、金利調整済みスプレッドのフォワードレート表現およびスポットレート表現と対応しており、ファイナンス理論と整合する。また、金利調整済みスプレッドの変動の主成分分析結果と適合している。実務への応用として、修正 Laguerre 多項式の唯一のパラメータである減衰係数の推定方法を2つ提案し、ヘッジの有効性をNSモデルと比較して分析した。修正 Laguerre 多項式の次数毎に減衰係数を別々に設定すれば、修正 Laguerre 多項式に基づくヘッジが極めて有効性が高いことが確認された。

今後の課題として、ファクター間のダイナミクスを解明するためにベクトル自己回帰モデルや状態空間モデルの適用が挙げられる。また、原油の在庫水準などの経済変数の取り込みが考えられる。本研究では修正 Laguerre 多項式を原油先物のコンビニエンス・イールドに適用したが、金利、株式オプションのボラティリティ、クレジット・デフォルト・スワップ (CDS) のプ

レミアムなど他のフィナンシャル・インストゥルメントの期間構造に適用することも可能である。

謝辞

研究期間の一時期、筆者は甲南大学の客員研究員であった。甲南大学の石田功教授の助言、甲南大学のホスピタリティに感謝する。本研究は JSPS 科研費 JP21K01586, JP24K04965 の助成を受けた。

参考文献

- Bianchi, R.J., Fan, J.H., Miffre, J., Zhang, T., 2023. Exploiting the dynamics of commodity futures curves. *Journal of Banking & Finance* 154, 106965. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2023.106965>.
- Bredin, D., O'Sullivan, C., Spencer, S., 2021. Forecasting WTI crude oil futures returns: Does the term structure help? *Energy Economics* 100, 105350. <https://doi.org/10.1016/j.eneco.2021.105350>.
- Choudhry, M., Lizzio, M., 2015. Chapter 5: Fitting the term structure, in *Advanced Fixed Income Analysis*, Second Edition, 85-111. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-099938-8.00005-6>.
- Cox, J.C., Ingersoll, Jr., J.E., Ross, S.A., 1985. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53 (2), 385-407.
- Diebold, F.X., Li, C., 2006. Forecasting the term structure of government bond yields, *Journal of Econometrics* 130 (2), 337-364. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2005.03.005>.
- Diebold, F.X., Rudebusch, G.D., Aruoba, S.B., 2006. The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach. *Journal of Econometrics* 131 (1), 309-338. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2005.01.011>.
- Ghaderi, V.S., Allam, S.L., Ambert, N., Bouteiller, J-M.C., Choma, J., Berger, T.W., 2011. Modeling neuron-glia interactions: from parametric model to neuromorphic hardware, in 2011 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, 3581-3584. <https://doi.org/10.1109/IEMBS.2011.6090598>.
- Grønborg, N.S., Lunde, A., 2016. Analyzing oil futures with a dynamic Nelson-Siegel model. *Journal of Futures Markets* 36 (2), 153-173. <https://doi.org/10.1002/fut.21713>.
- Heath, D., Jarrow, R., Morton, A., 1992. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, 60 (1), 77-105. <https://doi.org/10.2307/2951677>.
- Heidorn, T., Mokinski, F., Rühl, C., Schmaltz, C., 2015. The impact of fundamental and financial traders on the term structure of oil. *Energy Economics* 48, 276-287. <https://doi.org/10.1016/j.eneco.2015.01.001>.
- Lebedev, N.N., 1972. *Special Functions & Their Applications* (Dover Books on Mathematics). Dover Publications.
- Nelson, C.R., Siegel, A.F., 1987. Parsimonious modeling of yield curves. *The Journal of Business*, 60 (4), 473-489. <http://dx.doi.org/10.1086/296409>.
- Vasicek, O., 1977. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* 5 (2), 177-188. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(77\)90016-2](https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90016-2).

