＜研究ノート＞

日本のデータを使ったLRRモデルの推定*

徳永　俊史[a]，和田　賢治[b]

要 旨

本論文では，Bansal and Yaron（2004）が提唱したLRRモデルのパラメーターをGMMで推定する方法を提案したConstantinides and Ghosh（2011）の整理を行うとともに，日本のデータを使った実証分析を行う．結果は，Constantinides and Ghosh（2011）が使用した米国のデータと日本のデータともに，標本の統計値がLRRモデルからえられるモーメントとはあまりうまくフィットしないことを示しており，LRRモデルの再評価を含めたモデル推定方法の見直しが必要である．

JEL Classification Codes：E32, G11, G12

キーワード：ロングランリスク，Kreps-Porteus選好，GMM

1．はじめに

消費にもとづくアセットプライシングの実証研究分野の1つに，消費成長のロングランリスク（以下，LLR: Long-run risk）を考慮したモデルに注目した豊富な研究があげられる（サーベイは，Ludvigson (2013)，Cochrane (2017)を参照）．主に米国での実証分析が盛んであるが，特徴は，代表的消費者がEpstein and Zin（1989）とWeil（1989）によって採用されたKreps and Porteus（1978）選好の変形をもつと仮定し，一方で，消費成長率と配当成長率が観察できない状態変数の時間変動とそのイノベーションの分散の時間変動によって生成されるというBansal and Yaron（2004）のLRRモデルで記述される．

このモデルを検証する際の1つのハードルは，モデルに2つの潜在変数が含まれるため，どのようにモデルパラメーターを推定するのかである．Ludvigson（2013）は，いくつかの方法を紹介しているが，本論文では，Constantinides and Ghosh（2011）が提案した方法を採用する．かれらは，総配当成長と総消費成長の無条件モーメントを計算し，LRRパラメーターにそれら制約を課しながら，モデル全体をGMMによって推定する．最大の特徴は，潜在的な状態変数に関係なくオイラー方程式を分かりやすく表現することができるという点である．具体的には，対数プライシングカーネルを消費成長，対数価格/配当比，対数無リスク利子率，それらのラグのアフィン関数として表現することでGMMを使ったパラメーターの推定が可能となる．

Cochrane（2017）は，一般論として，LRRモデルが米国におけるアセットプライシングの実証分析において人気はあるもののその解釈については非常に難しい問題を含んでいることを解説している．また，日本のデータを使った実証はほとんどみつけることができない．たとえば，徳永（2004）は，Epstein and Zin（1989）型効用関数とCampbell and Shiller（1988）による資産価格リターンの近似式を組み合わせたBansal et al.（2005）のモデルが日本の株式市場のクロスセクション変動をうまく説明することをみつけている．日本のデータを使った実証分析がほとんどない理由の1つが，日本のデータの特徴が考えられる．たとえば，日本企業は長年，安定配当政策を採用していたため配当金の変動は小さく，経済状況などと無関係に配当を支払っていたため資産価格の変動と関係づける動機になりにくかったことが容易に想

* 本研究は日本学術振興会科研費（22K01582）の助成を受けたものである（課題名『ヘッジできない消費リスクがある場合の資産価格モデルの研究』）．実証分析で使用する家計の消費データについて，統計法第33条の規定にもとづき，総務省から家計調査に係る調査情報の提供をうけた．また，配当データを加工していただいた株式会社金融データソリューションズに感謝する．

a 武蔵大学経済学部　〒176-8534　東京都練馬区豊玉上1-26-1

b 慶應義塾大学商学部　〒108-8345　東京都港区三田2-15-45

像できる．また，LRR モデルの推定が複雑なため，ある程度の時系列データを確保しないとパラメーターの推定が困難であるという技術的な問題も考えられる．今回，Constantinides and Ghosh（2011）の方法を採用することで，LLR モデルが日本のデータに対する説明力が高いか否かを明確にすることが期待できる．

本論文の構成は以下のとおりである．セクション 2 において，推定する Bansal and Yaron（2004）の LRR モデルについて整理するとともに，Constantinides and Ghosh（2011）を参考に検証可能なオイラー方程式の導出過程を整理する．セクション 3 は，実証分析で使用するデータとその基本統計量を計算するとともに，LLR モデルの推定では年次データを使用する必要があることを示す．そして，潜在変数の取扱いを含めたモデルの推定手順と推定結果をセクション 4 で説明する．最後に，セクション 5 において，モデルの拡張の可能性など今後の課題について述べる．

2. モデル

本論文では，消費や資産価格の時系列変動を Bansal and Yaron（2004）の LRR モデルで記述する．LLR モデルは，以下の 4 つの式から構成される．

(1) $x_{t+1} = \rho_x x_t + \psi_x \sigma_t \varepsilon_{x,t+1}$

(2) $\sigma_{t+1}^2 = (1-\upsilon)\sigma^2 + \upsilon\sigma_t^2 + \sigma_\omega \varepsilon_{\sigma,t+1}$

(3) $\Delta c_{t+1} = \mu_c + x_t + \sigma_t \varepsilon_{c,t+1}$

(4) $\Delta d_{t+1} = \mu_d + \phi x_t + \varphi \sigma_t \varepsilon_{d,t+1}$

これらの時系列モデルは，（観察できない）ある状態変数 x_t と σ_t^2 が，対数総消費成長率（Δc_{t+1}）と対数配当成長率（Δd_{t+1}）の変動を導いていることを示している．誤差項 $\varepsilon_{x,t+1}$，$\varepsilon_{\sigma,t+1}$，$\varepsilon_{c,t+1}$，$\varepsilon_{d,t+1}$ は，独立同一の標準正規分布（$i.i.d. N(0,1)$）にしたがい，さらに，お互いに独立であると仮定する．また，モデルには 9 つのパラメーター $\{\mu_c, \mu_d, \phi, \varphi, \rho_x, \psi_x, \sigma, \upsilon, \sigma_\omega\}$ が含まれる．

ここで，モデルの特徴を整理する．まず，2 つの状態変数について，定常条件（$|\rho_x| < 1, |\upsilon| < 1$）を仮定すると，それぞれの無条件期待値は，$E[x_t] = 0$，$E[\sigma_t^2] = \sigma^2$ となり，さらに，それぞれの無条件分散は，$V(x_t) = \psi_x^2\sigma^2/(1-\rho_x^2)$，$V(\sigma_t^2) = \sigma_\omega^2/(1-\upsilon^2)$ となる．これらの結果を使うと，対数総消費成長率と対数配当成長率について以下の結果をえる．

(5) $E[\Delta c_t] = \mu_c$

(6) $E[\Delta d_t] = \mu_d$

(7) $V(\Delta c_t) = \dfrac{\psi_x^2\,\sigma^2}{1-\rho_x^2} + \sigma^2$

(8) $V(\Delta d_t) = \phi^2 \dfrac{\psi_x^2\,\sigma^2}{1-\rho_x^2} + \sigma^2\,\varphi^2$

(9) $Cov(\Delta c_{t+1}, \Delta c_t) = \rho_x \dfrac{\psi_x^2\,\sigma^2}{1-\rho_x^2}$

(10) $Cov(\Delta d_{t+1}, \Delta d_t) = \phi^2\,\rho_x \dfrac{\psi_x^2\,\sigma^2}{1-\rho_x^2}$

(11) $Cov(\Delta c_t, \Delta d_t) = \phi \dfrac{\psi_x^2\,\sigma^2}{1-\rho_x^2}$

なお，この LRR モデルでは，(9)式と（10）式が示唆しているように，自己共分散の符号が ρ_x にのみ依存しているので，実証分析で使用するデータは $\mathrm{sign}(AC_c) = \mathrm{sign}(AC_d)$ を満たしている必要がある．

次に，以上の特徴をもった消費系列と配当系列を背景として，代表的消費者の効用関数をモデル化する．ここでは，代表的消費者が Epstein and Zin（1989）や Weil（1989）が採用した以下の Kreps and Porteus（1978）型選好を持つと仮定する．

(12) $V_t = \left[(1-\delta)C_t^{\frac{1-\gamma}{\theta}} + \delta\left(E_t\left[V_{t+1}^{1-\gamma}\right]\right)^{\frac{1}{\theta}}\right]^{\frac{\theta}{1-\gamma}}$

ここで，δ は主観的割引ファクター，$\gamma > 0$ は相対的リスク回避係数，$\psi > 0(\theta = (1-\gamma)/(1-1/\psi))$ は異時点間の代替の弾力性を表す．このように，このモデルは，相対的リスク回避係数と異時点間の代替の弾力性（EIS）を分離可能にしている点が特徴である．

（12)式より，オイラー方程式（資産 j に対し効用関数を最大にするための一階の条件）は以下のように表される（Epstein and Zin（1989）や Weil（1989）を参照）．

(13) $E_t\left[\exp\left(m_{t+1} + r_{j,t+1}\right)\right] = 1$

ここで，

(14) $m_{t+1} = \theta\log\delta - \dfrac{\theta}{\psi}\Delta c_{t+1} + (\theta-1)r_{c,t+1}$

は異時点間限界代替率（IMRS; intertemporal marginal rate of substitution），$E_t[\cdot]$ は t 時点の情報で条件つけられた期待値，$r_{j,t+1}$ は資産 j の連続複利リターン，$r_{c,t+1}$ は各期に，配当として総消費を受け渡す資産の（観測できない）連続複利リターンを表す．

次に，市場ポートフォリオの対数リターン（$r_{m,t+1}$）を Campbell and Shiller（1988）の線形近似式で表す．

(15) $r_{m,t+1} = \kappa_{0,m} + \kappa_{1,m} z_{m,t+1} - z_{m,t} + \Delta d_{t+1}$,

where $\kappa_{0,m} = \log\left(1+\exp(\bar{z}_m)\right) - \kappa_{1,m}\bar{z}_m$,

$$\kappa_{1,m} = \frac{\exp(\bar{z}_m)}{1+\exp(\bar{z}_m)}$$

ここで，$z_{m,t+1}$ は対数（価格 / 配当），$\bar{z}_m$ はその長期平均を表す．一方，消費に関連する（観察できない）資産リターン（$r_{c,t+1}$）を市場ポートフォリオと同じ発想にしたがい線形近似式で表す．

(16) $r_{c,t+1} = \kappa_0 + \kappa_1 z_{t+1} - z_t + \Delta c_{t+1}$,

where $\kappa_0 = \log\left(1 + \exp(\bar{z})\right) - \kappa_1 \bar{z}$,

$$\kappa_1 = \frac{\exp(\bar{z})}{1 + \exp(\bar{z})}$$

ここで，z_{t+1}は対数（価格／消費），$\bar{z}$はその長期平均を表す．

(15)式と（16)式より，Bansal and Yaron (2004) は，以下のように，z_tと$z_{m,t}$が状態変数x_tとσ_t^2のアフィン関数であることを示している．

(17) $z_t = A_0 + A_1 x_t + A_2 \sigma_t^2$

(18) $z_{m,t} = A_{0,m} + A_{1,m} x_t + A_{2,m} \sigma_t^2$

ここで，

(19) $$A_0 = \frac{1}{1-\kappa_1}\left[\log(\delta) + \left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\mu_c + \kappa_0 + \kappa_1 A_2 \sigma^2 (1-\upsilon) + \frac{1}{2}\theta \kappa_1^2 A_2^2 \sigma_\omega^2\right]$$

(20) $$A_1 = \frac{1 - \frac{1}{\psi}}{1 - \kappa_1 \rho_x}$$

(21) $$A_2 = \frac{\theta}{2(1-\kappa_1 \upsilon)}\left[\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)^2 + \kappa_1^2 A_1^2 \psi_x^2\right]$$

(22) $$\begin{aligned} A_{0,m} = \frac{1}{1-\kappa_{1,m}}\Bigg[&\theta \log(\delta) + \left(-\frac{\theta}{\psi} + \theta - 1\right)\mu_c \\ &+ (\theta-1)\kappa_0 + (\theta-1)(\kappa_1 - 1)A_0 \\ &+ (\theta-1)\kappa_1 A_2 \sigma^2 (1-\upsilon) + \kappa_{0,m} + \mu_d \\ &+ \kappa_{1,m} A_{2,m} \sigma^2 (1-\upsilon) \\ &+ \frac{1}{2}\left[(\theta-1)\kappa_1 A_2 + \kappa_{1,m} A_{2,m}\right]^2 \sigma_\omega^2\Bigg] \end{aligned}$$

(23) $$A_{1,m} = \frac{\phi - \frac{1}{\psi}}{1 - \kappa_{1,m}\rho_x}$$

(24) $$\begin{aligned} A_{2,m} = \frac{1}{1-\kappa_{1,m}\upsilon}\Bigg\{&-(\theta-1)A_2(1-\kappa_1 \upsilon) \\ &+ \frac{1}{2}\Bigg[\gamma^2 + \varphi^2 \\ &+ \left((\theta-1)\kappa_1 A_1 + \kappa_{1,m} A_{1,m}\right)^2 \psi_x^2\Bigg]\Bigg\} \end{aligned}$$

である．(19)式から(24)式の導出は以下のとおりである．まず，(13)式に（14)式を代入し，資産として（16)式と（15)式を採用する．そして，式に含まれるすべての変数が条件付き正規分布にしたがっていることに注意しながら，すべてのx_tとσ_t^2について条件付き期待値が成立するように式を整理する．

次に，これらの結果を用いて資産リターンについて整理する．まず，無リスク利子率（$r_{f,t+1}$）は，

(25) $$\begin{aligned} r_{f,t} &= -\log E_t[\exp(m_{t+1})] \\ &= A_{0,f} + A_{1,f} x_t + A_{2,f} \sigma_t^2 \end{aligned}$$

ここで，

(26) $$\begin{aligned} A_{0,f} = &-\theta \log(\delta) - \left(-\frac{\theta}{\psi} + \theta - 1\right)\mu_c - (\theta-1)\kappa_0 \\ &- (\theta-1)(\kappa_1 - 1)A_0 \\ &- (\theta-1)\kappa_1 A_2 (1-\upsilon)\sigma^2 \\ &- \frac{1}{2}(\theta-1)^2 \kappa_1^2 A_2^2 \sigma_\omega^2 \end{aligned}$$

(27) $$A_{1,f} = -\left[\left(-\frac{\theta}{\psi} + \theta - 1\right) + (\theta-1)(\kappa_1 \rho_x - 1)A_1\right]$$

(28) $$\begin{aligned} A_{2,f} = -\Bigg[&(\theta-1)(\kappa_1 \upsilon - 1)A_2 \\ &+ \frac{1}{2}\Bigg(\left(-\frac{\theta}{\psi} + \theta - 1\right)^2 \\ &+ (\theta-1)^2 \kappa_1^2 A_1^2 \psi_x^2\Bigg)\Bigg] \end{aligned}$$

と表現することができる．

最後に，危険資産リターン（$r_{j,t+1}$）に関するオイラー方程式（13)式を検証可能な式に修正する．まず，観測可能な値を使って状態変数を逆算する．具体的には，(18)式と（25)式より，以下の式が導かれる．

(29) $x_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_1 r_{f,t+1} + \alpha_2 z_{m,t+1}$

(30) $\sigma_{t+1}^2 = \beta_0 + \beta_1 r_{f,t+1} + \beta_2 z_{m,t+1}$

ここで，

(31) $$\alpha_0 = \frac{A_{2,m}A_{0,f} - A_{0,m}A_{2,f}}{A_{1,m}A_{2,f} - A_{2,m}A_{1,f}}$$

(32) $$\alpha_1 = \frac{-A_{2,m}}{A_{1,m}A_{2,f} - A_{2,m}A_{1,f}}$$

(33) $$\alpha_2 = \frac{A_{2,f}}{A_{1,m}A_{2,f} - A_{2,m}A_{1,f}}$$

(34) $$\beta_0 = \frac{A_{0,m}A_{1,f} - A_{1,m}A_{0,f}}{A_{1,m}A_{2,f} - A_{2,m}A_{1,f}}$$

(35) $$\beta_1 = \frac{A_{1,m}}{A_{1,m}A_{2,f} - A_{2,m}A_{1,f}}$$

(36) $$\beta_2 = \frac{-A_{1,f}}{A_{1,m}A_{2,f} - A_{2,m}A_{1,f}}$$

次に，IMRS（異時点間限界代替率）を表す（14)式に（16)式と（17)式を代入する．

(37) $$\begin{aligned} m_{t+1} = &(\theta \log\delta + (\theta-1)[\kappa_0 + (\kappa_1 - 1)A_0]) \\ &+ \left(-\frac{\theta}{\psi} + (\theta-1)\right)\Delta c_{t+1} \\ &+ (\theta-1)\kappa_1 A_1 x_{t+1} + (\theta-1)\kappa_1 A_2 \sigma_{t+1}^2 \\ &- (\theta-1)A_1 x_t - (\theta-1)A_2 \sigma_t^2 \end{aligned}$$

この式に（29)式と（30)式を代入し，観察されない変数を消すと以下の式がえられる．

表1．基本統計量

	平均	標準偏差	1次自己相関	クロス相関
パネルA. 月次データ：1981/1-2015/12（$T=419$）				
消費成長率（Δc）	0.001	0.017	−0.532	−0.043
配当成長率（Δd）	0.003	0.201	−0.502	
パネルB. 年次データ：1982年-2008年（$T=27$）				
消費成長率（Δc）	0.004	0.011	0.087	0.117
配当成長率（Δd）	0.048	0.089	0.500	

$$(38)\ m_{t+1}=c_1+c_2\Delta c_{t+1}+c_3\left(r_{f,t+1}-\frac{1}{\kappa_1}r_{f,t}\right)$$
$$+c_4\left(z_{m,t+1}-\frac{1}{\kappa_1}z_{m,t}\right)$$

ここで，

$$(39)\ c_1=\theta\log(\delta)$$
$$+(\theta-1)[\kappa_0+(\kappa_1-1)(A_0+A_1\alpha_0+A_2\beta_0)]$$

$$(40)\ c_2=-\frac{\theta}{\psi}+(\theta-1)$$

$$(41)\ c_3=(\theta-1)\kappa_1\left[A_1\alpha_1+A_2\beta_1\right]$$

$$(42)\ c_4=(\theta-1)\kappa_1\left[A_1\alpha_2+A_2\beta_2\right]$$

以上より，以下のような検証可能なオイラー方程式がえられる．

$$(43)\ E_t\left[\exp\left\{c_1+c_2\Delta c_{t+1}+c_3\left(r_{f,t+1}-\frac{1}{\kappa_1}r_{f,t}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,c_4\left(z_{m,t+1}-\frac{1}{\kappa_1}z_{m,t}\right)+r_{j,t+1}\right\}\right]=1$$

3．データと基本統計量

本論文で使用する家計の消費支出（非耐久財＋サービス）に関するデータは総務省統計局より入手した．対象期間は，1981年1月から2015年12月までの419か月である．家計調査における標本抽出は,「層化3段抽出法」を採用している．第1段で「市町村」, 第2段で「単位区」, 第3段で「世帯」に基づいて調査対象となる世帯が選定される．そして，本論文で使用する二人以上の世帯については6か月継続して調査され，順次，新たに選定された世帯と交替する仕組みとなっている．徳永・和田（2020）は，この元となる個票データを使って，家計にとって保険をかけることのできない家計固有の所得ショックがアセットプライシングにどのように影響するのか分析している．実証分析は，家計の相対的消費成長のクロスセクション歪度が，日本の株式市場に長期間に渡り存在するバリュープレミアム（バリュー株リターンとグロース株リターンの差）を説明することを示唆している．これは，不完備消費保険仮説を支持する結果である．本論文では，個票データをクロスセクションに集計した総消費支出として利用する．

配当データは，金融データソリューションズが提供している「日本上場株式Fama-French関連データ」の元になっている配当込み収益率から配当部分を分離した．

表1は, 基本統計量を表している. パネルAの月次データは，すべてX12で季節調整し，消費者物価指数（非耐久財指数とサービス指数をウエイトづけして計算）で実質化している．パネルBの年次データは3月末基準で月次データを年次集計している．月次データと年次データの特徴は大きく異なる．月次データでは対数消費変化も対数配当変化も自己相関とクロス相関が負となっているが，年次データではそれらが正となっている．日本企業の特徴として3月決算が多いため，配当も3月や9月に集中するため季節性が生まれる. 一方, 年次データについては，2009年以降のデータを含めると対数消費変化の自己相関とクロス相関が非常に小さな値となる．いずれも符号条件（$\mathrm{sign}(AC_c)=\mathrm{sign}(AC_d)$）は満たしているもののクロス相関がもっとも大きくなる2008年までを標本期間として以下の分析を行う．対数消費変化と対数配当変化の1次の自己相関とクロス相関について，名目データではそれほど大きな変化はみられないため，消費者物価指数の変動が実質化に対して影響しているものと思われる．この点の解明は今後の課題である．

米国の年次データ（1931年から2009年）を使用したConstantinides and Ghosh（2011）では，対数消費変化の自己相関が0.449，対数配当変化の自己相関が0.163である．さらに，対数消費変化と対数配当変化は，パネルBの0.117と比べると0.637と非常に大きい．

4．推定手順と推定結果

モデル全体でみると，パラメーターは（1)式から（4)式のLRRモデルに含まれる9個と（12)式の効用関数に含まれる3個を合わせた計12個$\{\mu_c,\mu_d,\phi,\varphi,\rho_x,\psi_x,\sigma,\upsilon,\sigma_\omega,\delta,\gamma,\psi\}$である．モデルには観察できない変数も含まれることから，純粋に計量モデルだけを使って全パラ

表2. 3,456個のパラメーター組み合わせに対する（44)式の順位

順位	$f(k)$	ρ_x	ψ_x	υ	σ	ϕ	φ	σ_ω
1	0.0294	0.1	0.5	0.75	0.01	1.5	3	0.00001
2	0.0305	0.1	0.5	0.5	0.01	1.5	3	0.000001
3	0.0313	0.1	0.5	0.75	0.01	1.5	3	0.000001
4	0.0331	0.1	0.5	0.5	0.01	1.5	3	0.00001
5	0.0333	0.1	0.5	0.25	0.01	1.5	3	0.00001
6	0.0345	0.1	0.5	0.25	0.01	1.5	3	0.000001
3456	10.2383	0.9	1.5	0.75	0.1	2	3.5	0.000001

メーターを推定した論文は少ない．Bansal and Yaron（2004）はカリブレーションでモデルの特徴を考察し，Constantinides and Ghosh（2011）はGMMを使った推定方法を提案している．

本論文では，観察された消費・配当データが27個と少ないことから，LLRモデルに含まれる9つのパラメーターについてはBansal and Yaron（2004）を参考にし，効用関数に含まれる3つのパラメーターについてはConstantinides and Ghosh (2011) を参考にする. Constantinides and Ghosh（2011）も，具体的には大きく2段階でモデルを推定している，まず，LRRモデルの9つのパラメーターを9つのモーメントを使って推定している. そして，残りの3つのパラメーターを含めた12個のパラメーターを9つのモーメントに6つのオイラー方程式を加えた15個の制約式にもとづきGMMで推定している．

4.1. LLRモデルのパラメーターに関する考察

ここでは，$\boldsymbol{\Theta}=\{\mu_c,\mu_d,\phi,\varphi,\rho_x,\psi_x,\sigma,\upsilon,\sigma_\omega\}$について以下の手順でシミュレーションを行う．

まず，対数消費変化と対数配当変化の期待値であるμ_cとμ_dは，潜在変数に関わる係数に依存しないため，それぞれの標本平均で固定する．

$$\mu_c=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\Delta c_t,\quad \mu_d=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\Delta d_t$$

その他のパラメーターについてはConstantinides and Ghosh（2011）を参考に以下の組み合わせ（$J=3{,}456$）でモデルの当てはまりをチェックする．

$\rho_x=\{0.1,0.5,0.9\}$

$\psi_x=\{0.5,1.0,1.5\}$

$\upsilon=\{0.25,0.5,0.75\}$

$\sigma=\{0.01,0.10\}$

$\phi=\{0.5,1.0,1.5,2.0\}$

$\varphi=\{0.5,1.0,1.5,2.0,2.5,3.0,3.5,4.0\}$

$\sigma_\omega=\{1\times10^{-5},1\times10^{-6}\}$

なお，Constantinides and Ghosh（2011）によるGMM推定では，σが0.012，ϕが5.14で統計的に有意である以外，ρ_xは0.482，ψ_xは0.9，υは0.304，φは3.06，σ_ωは4.6×10^{-4}で統計的に有意ではない．GMM推定によるパラメーターの不安定性については，たとえば，Cochrane（2017）がサーベイ論文の中で批判的に考察している．

シミュレーションの手順は以下のとおりである．

（ステップ1）4変量正規分布にしたがうε_tについて$I=10{,}000$パターンの乱数$\{\varepsilon_{i,t}\}\ (t=1,\ldots,T\times12, i=1,2,\ldots,I)$を発生．（乱数は月次で発生させる．Bansal and Yaron（2004）を参照）

（ステップ2）$\boldsymbol{\Theta}_k\ (k=1,2,\ldots,J)$を所与として，$\{x^*_{i,k,t},\sigma^*_{i,k,t},\Delta c^*_{i,k,t},\Delta d^*_t\}$を計算．ただし，$E(x_t)=0\ (|\rho_x|<1), E(\sigma_t^2)=\sigma^2\ (|\upsilon|<1)$より，初期値$x_0=0,\sigma_0^2=\sigma^2$とする．

（ステップ3）月次データから年次データに集計してから平均値を計算.

$$c^{**}_{k,t}=\sum_{i=1}^{I}c^*_{i,k,t},\quad d^{**}_{k,t}=\sum_{i=1}^{I}d^*_{i,k,t}$$

（ステップ4）以下の評価式を計算.

$$(44)\ f(k)=\left|m_c-m^{**}_{k,c}\right|+\left|s_c-s^{**}_{k,c}\right|+\left|m_d-m^{**}_{k,d}\right| +\left|s_d-s^{**}_{k,d}\right|+\left|c_{cd}-c^{**}_{k,cd}\right|, k=1,2,\ldots,J$$

where

$$m_c=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\Delta c_t, s_c=\left\{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(\Delta c_t-m_c)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$m_d=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\Delta d_t, s_d=\left\{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(\Delta d_t-m_d)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$m^{**}_{k,c}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\Delta c^{**}_{k,t},$$

$$s^{**}_{k,c}=\left\{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\Delta c^{**}_{k,t}-m^{**}_{k,c}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

表 3. 順位 1 位の（44)式の内訳

	Δc		Δd		クロス相関
	平均	標準偏差	平均	標準偏差	
標本	0.004	0.011	0.048	0.089	0.117
シミュレーション					
平均	0.004	0.032	0.048	0.086	0.123
5 %値	−0.008	0.024	0.014	0.066	−0.219
95 %値	0.016	0.040	0.082	0.109	0.449
標本を上回った割合	0.495	1.000	0.496	0.416	0.526

$$m_{k,d}^{**}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\Delta d_{k,t}^{**},$$

$$s_{k,d}^{**}=\left\{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\Delta d_{k,t}^{**}-m_{k,d}^{**}\right)^{2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$c_{cd}=\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\frac{(\Delta c_t-m_c)(\Delta d_t-m_d)}{s_c\,s_d},$$

$$c_{k,cd}^{**}=\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\frac{\left(\Delta c_{k,t}^{**}-m_{k,c}^{**}\right)\left(\Delta d_{k,t}^{**}-m_{k,d}^{**}\right)}{s_{k,c}^{**}\,s_{k,d}^{**}}.$$

なお，絶対値ではなく自乗の評価式で計算しても結果が大きく変わることはなかったため，ここでは絶対値による評価の結果のみを整理する．

表 2 は，3,456 個のパラメーターの組み合わせの中で（44)式の値がもっとも小さかった 6 ケースについてまとめたものである．小数点第三桁目を四捨五入するとこれらの組み合わせのもとでの（44)式の値はすべて 0.03 である．なお，3,456 個の組み合わせの中で（44)式の値がもっとも大きかったのは表の一番下にある 10.24 で, 5 %値が 0.11，第一四分位が 0.63，中央値が 1.19，第三四分位が 2.10, 95 %値が 6.98 であった．

表 2 より，上位 6 ケースともすべて $\rho_x=0.1$，$\psi_x=0.5$，$\sigma=0.01$，$\phi=1.5$，$\varphi=3.0$ である．一方，υ と σ_ω は与えた係数すべてが選択されており，これらは潜在変数の可変ボラティリティを表す係数である．

ρ_x について，Bansal and Yaron（2004）は 0.979 を与えており, また Constantinides and Ghosh（2011）は 0.437 の推定結果をえているが，日本のデータでは 0.1 というかなり低い値となっている．これは（9)式と表 1 が示しているように日本の対数消費変化の 1 次の自己相関が低いことの表れである．一方，υ と σ_ω は σ とともに対数消費変化と対数配当変化の条件付き分散を記述する σ_t^2 のパラメーターであるが，今回採用した評価式（44)式は無条件分散に依存しているため υ と σ_ω の値は直接結果に影響しない．また，LLR モデルの（2)式は負の分散を排除していないので，モデルの再検討も含めて今後の課題である．なお，今回，シミュレーションのステップ 2 で負の分散が生成されたときは乱数の発生をやり直している．

表 3 は，（44)式の内訳をまとめたものである．まず，対数消費変化について，年次標本平均は 0.004 であるのに対して，10,000 回のシミュレーションでモデルからえられた対数表皮変化の平均は 0.004 であり，両者は一致している．また，シミュレーションでえられた 10,000 個の分布をみると，5 %値が −0.008，95 %値が 0.016，標本平均を上回った回数は全体の 49.5 %であり，モデルからえられた対数消費変化の平均がほぼ標本平均を中心に分布していることがわかる．この傾向は対数配当変化でも同様である．

標準偏差やクロス相関についても，標本からえられた値とシミュレーションからえられた値に大きな差はみられない．対数配当変化の標準偏差とクロス相関の分布も概ね標本値を中心に分布しているが，対数消費変化の標準偏差については，分布が標本値から完全に右に移動している．対数消費変化の条件付き分散は σ_t^2 であることから，おそらく表 2 で考察したように υ と σ_ω の不安定さが影響している可能性がある．なお，対数配当変化の条件付き分散は $\varphi^2\sigma_t^2$ であり，φ によって分布の歪みが調整される．

4.2. 相対的リスク回避係数（γ）と異時点間代替の弾力性（ψ）の GMM 推定

ここでは，セクション 4.1 でえられた結果をもとに，主観的割引ファクター（δ）を所与として, (43)式を使って相対的リスク回避係数（γ）と異時点間代替の弾力性（ψ）を推定する．注意すべきは，オイラー方程式（43)式に観察できない変数（$\bar{z}$: 消費に関連する（観察できない）対数資産価格から対数消費支出を引いた値の長期的な平均値）が含まれているため，以下の最適化を実行してその値を手に入れる必要がある（Bansal，Kiku,

表 4. 主観的割引ファクターを所与とした GMM による選好パラメーターの推定

δ	γ	t 値	ψ	t 値	J 統計量	p 値
0.970	1.844	(3.55)	0.509	(3.49)	51.472	0.000
0.971	1.972	(3.98)	0.476	(3.92)	51.388	0.000
0.9715	2.036	(4.20)	0.461	(4.13)	51.376	0.000
0.972	2.102	(4.42)	0.447	(4.35)	51.388	0.000
0.973	2.233	(4.86)	0.420	(4.78)	51.481	0.000
0.974	2.365	(5.30)	0.397	(5.21)	51.664	0.000
0.975	2.496	(5.73)	0.376	(5.63)	51.926	0.000

and Yaron, 2012, 2016). 具体的には, (17)式の両辺の期待値 ($\bar{z} = A_0 + A_2\sigma^2$) をとり, 12 個のパラメーターを所与として最適解$\bar{z}$を求める. この手順を GMM の中に組み込む. 最適化の計算は, Constantinides and Ghosh (2011) の注 2 の説明にある統計パッケージ R のライブラリ "DEoptim" を使用し, GMM についてはライブラリ "gmm" を使用する.

ここでは 6 つのオイラー方程式を用意する. そのうち 2 つは以下の無条件オイラー方程式である. まず, 無リスク利子率について, (25)式の無条件期待値を計算する.

(45) $E[r_{f,t}] = A_{0,f} + A_{2,f}\,\sigma^2$

次に, 市場リターンについて, (15)式に (1)式, (2)式, (4)式を代入し, 無条件期待値を計算する.

(46) $E[r_{m,t+1}] = B_0 + B_2\,\sigma^2$

ここで,

(47) $B_0 = \kappa_{0,m} + \kappa_{1,m}A_{0,m} + \kappa_{1,m}A_{2,m}(1-\upsilon)\,\sigma^2 - A_{0,m} + \mu_d$

(48) $B_2 = \kappa_{1,m}A_{2,m}\upsilon - A_{2,m}$

最後に 4 つの条件付きオイラー方程式として, (43)式の資産 j に, 無リスク利子率と市場リターン, 1 期前の情報I_tとして対数価格 / 配当比 ($z_{m,t}$), 対数無リスク利子率 ($r_{f,t}$) を用いることで計 4 つのモーメント条件を設定することができる.

表 4 は, 表 2 の第 1 順位としてえられた LRR パラメーターを所与として, 市場リターンと無リスク利子率に対する 2 つの無条件オイラー方程式 ((45)式と (46)式), ラグ付き市場の対数価格 / 配当比とラグ付き対数無リスク利子率で条件付けられた 4 つのオイラー方程式, 計 6 つのオイラー方程式で, 2 つの選好パラメーターを推定した結果である. Constantinides and Ghosh (2011) は, LRR の 9 つのパラメーターも含めて 12 個すべてのパラメーターを推定しているが, ここではデータ数が少なく LRR のパラメーター推定が不安定であるため, LRR パラメーターを所与として, さらに主観的割引ファクターも所与として 2 つの選好パラメーターを独立して推定する.

もっとも J 値が低かったのは主観的割引ファクターδが 0.9715 のときであるが, すべてのケースでp値は 5 % を下回っており, モデル全体の見直しが必要であることを示唆している. 相対的リスク回避係数γについて, Bansal and Yaron (2004) は 7.5 や 10 といった値を与えており, また Constantinides and Ghosh (2011) も 9.34 という高い推定結果をえているが, 日本のデータではかなり低い値となっている. 異時点間代替の弾力性 ψ について, Bansal and Yaron (2004) は 0.5 と 1 といった値を与えており, また Constantinides and Ghosh (2011) も 1.41 という推定結果をえているが, 日本のデータでは 1 を下回る値となっている. モデルの特徴から, $\gamma = 1/\psi$ であるなら, 時間加法型効用関数になる. 推定結果は $\gamma = 2 \approx 1/\psi = 2.2$ である.

5. まとめと今後の課題

本論文では, Bansal and Yaron (2004) の LRR モデルのパラメーターを GMM で推定する方法を提案した Constantinides and Ghosh (2011) の整理を行うとともに, Bansal and Yaron (2004) のカリブレーションを参考にしながら日本のデータを使った実証分析を行った. 結果は, Constantinides and Ghosh (2011) が使用した米国のデータと日本のデータともに, LRR モデルからえられるモーメントとはあまりうまくフィットしないことを示している. また, Pohl et al. (2018) が主張するように, 日本のデータを使った場合でも (15)式の一次近似が結果に大きなマイナスの影響を与えるのかについても検証が必要である.

さらに, Constantinides and Ghosh (2017) と同様, 徳永・和田 (2020) がアセットプライシングにおいて重要な役割を果たすことを確認した家計の異質性と LLR モデルの融合について検討する必要がある. Constantinides and Ghosh (2017)は, LRR モデルの考え方をベースに, 家計の異質性, とりわけ, 家計の相対的消費成長のクロスセクション歪度を考慮したアセットプライシングモデルを提案している. 徳永・和田 (2020) でも, 日

本の家計の相対的消費成長のクロスセクション歪度が日本の株式市場に長期にわたって存在するバリュー効果を説明することを報告しているので，モデル拡張によるさらなる考察は重要であると考える．

参考文献

徳永俊史 , 2004,「消費と配当の関係から見たわが国株式市場のクロスセクション分析」『南山経営研究』, 18(3), 119 – 127.

徳永俊史 , 和田賢治 , 2020,「日本における家計の異質性を考慮したアセットプライシングモデルの実証研究」『武蔵大学論集』, 67, 29 - 37.

Bansal, Ravi, Robert F. Dittmar, and Christian T. Lundblad, 2005, Consumption, Dividends, and the Cross Section of Equity Returns, *Journal of Finance*, 60(4), 1639 – 1672.

Bansal, Ravi, Dana Kiku, and Amir Yaron, 2012, An Empirical Evaluation of the Long-Run Risks Model for Asset Prices, *Critical Finance Review*, 1, 183 – 221.

Bansal Ravi, Dana Kiku, and Amir Yaron, 2016, Risks for the Long Run: Estimation with Time Aggregation, *Journal of Monetary Economics*, 82, 52 - 69.

Bansal, Ravi, and Amir Yaron, 2004, Risks for the Long Run: a Potential Resolution of Asset Pricing Puzzles, *Journal of Finance*, 59(4), 1481 – 1509.

Campbell, John Y., and Robert J. Shiller, 1988, The Dividend-Price Ratio and Expectations of Future Dividends and Discount Factors, *Review of Financial Studies*, 1(3), 195 - 228.

Cochrane, John H., 2017, Macro-Finance, *Review of Finance*, 21(3), 945 – 985.

Constantinides, George M., and Anisha Ghosh, 2011, Asset Pricing Tests with Long-run Risks in Consumption Growth, *Review of Asset Pricing Studies*, 1, 96 - 136.

Constantinides, George M., and Anisha Ghosh, 2017, Asset Pricing with Countercyclical Household Consumption Risk, *Journal of Finance*, 72, 415-459.

Epstein, Larry G., and Stanley E. Zin, 1989, Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework, *Econometrica*, 57(4), 937 – 969.

Kreps, David M., and Evan L. Porteus, 1978, Temporal Resolution of Uncertainty and Dynamic Choice Theory, Econometrica, 46, 185 – 200.

Ludvigson, Sydney C., 2013, Advances in Consumption- Based Asset Pricing: Empirical Tests, in *Handbook of the Economics of Finance, Volume 2B: Asset Pricing*, e.d. by George M. Constantinides, Milton Harris, and Rene M. Stulz, North Holland, 799 - 906.

Pohl, Walter, Karl Schmedders, and Ole Wilms, 2018, Highter Order Effects in Asset Pricing Models with Long-Run Risks, *Journal of Finance*, 73(3), 1061 – 1111.

Weil, Philippe, 1989, Equity Premium Puzzle and the Risk-free Rate Puzzle, *Journal of Monetary Economics*, 24(3), 401 – 421.