maximum theorem のある拡張について

伊藤　成康[a]

JEL Classification Codes：C02
キーワード：目的関数と制約多価写像を変数とする maximum theorem

maximum theorem とは，制約条件付き最適化問題の解が制約集合を規定するパラメーターの変化に反応して連続的に変化することを示す一連の命題を指すが，本稿では，件の最適解が目的関数および制約多価写像に関しても連続となる条件を示す形で maximum theorem の拡張を図る．

いま，X と Y を，それぞれ，パラメーターと意思決定主体の選択変数が属する距離空間とし，$u : Y \to R$ を目的関数（R は実数直線），$\gamma : X \twoheadrightarrow Y$ を制約多価写像とすると，$\mu : X \twoheadrightarrow Y$ s.t.

$$\mu(x) = \{y \in \gamma(x) \mid u(y) = \max u(z) \text{ s.t. } z \in \gamma(x)\}$$

が解写像となるが，maximum theorem はμが閉対応（closed map）になることを主張するものである．u が連続関数，γが閉かつ下半連続多価写像という意味で連続である場合には，この定理の成立を容易に確かめることができる．ここではμを $X \times Y^X \times R^Y$ に拡張し，多価写像

$$\mu(x,\gamma,u) = \{y \in \gamma(x) \mid u(y) = \max u(z) \text{ s.t. } z \in \gamma(x)\}$$

が閉対応になることを示す．$\gamma \in \Gamma \subset Y^X$ はコンパクト値 Hausdorff 連続多価写像とし，γが属するクラスΓは（Hausdorff）同程度連続，かつ，γの多価写像空間 Y^X と u が属する連続関数の空間$\mathcal{U}$には一様収束の位相が入っているものとする．このとき，次が成り立つ．

定理

$<x^n,\gamma^n,u^n> \to <x,\gamma,u>$かつ$y^n \in \mu(x^n,\gamma^n,u^n)$が $y^n \to y$ となるとき，$y \in \mu(x,\gamma,u)$が成立する．

(証明)

背理法による．いま，$u(z) > u(y)$となる $z \in \gamma(x)$があるとする．ここで，任意の$\varepsilon > 0$ に対し，十分大きな m と n を取って，Y の冪空間上の Hausdorff 距離δに関し，

$\delta(\gamma^n(x^n),\gamma^n(x^m)) \leq \varepsilon/3$，$\delta(\gamma^n(x^m),\gamma(x^m)) \leq \varepsilon/3$，$\delta(\gamma(x^m),\gamma(x)) \leq \varepsilon/3$

とできる．最初の不等式はΓの同程度連続性から，第 2 の不等式はγ^n の一様収束から，第 3 の不等式はγ^n の一様極限γの連続性からしたがう．よって，$\delta(\gamma^n(x^n),\gamma(x)) \leq \varepsilon$ が示され，これから，$z^n \in \gamma^n(x^n)$，$z^n \to z$ なる $\{z^n\}$ が選べて，$u^n(z^n) \to u(z)$ となる．これより，十分大きな n に対し，$u^n(z^n) > u^n(y^n)$となって矛盾する．

（証明終了）

このような最適解の様々な属性（選好等）に関する連続性を主張する命題は，1960 ～ 1970 年代に，コアの収束に関する研究と並行して研究し尽くされた感もあるが，多価写像空間の位相ないし収束の研究は今なお着実に進められていて，本稿のささやかな存在意義も，これまで明確にされてこなかった制約多価写像の可動範囲を特定した点にある．ここでは制約条件付き最大化問題を例に取り上げたが，X, Y および u とγの選び方次第では，生産理論における効率性指標の連続性の証明などにも応用可能であり，制約写像を変数として扱うことの意義は小さくない．

参　考　文　献

Beer, G.(1993), *Topologies on Closed and Closed Convex Sets*, Kluwer Academic Publishers

Berge,C.(1959), *Espaces Topologiques : Fonctions Multivoques*, Dunod

Hola,L. and D.Holy(2021), *USCO and Quasicontinuous Mappings*, De Gruyter

Klein, E. and A.C.Thompson(1984), *Theory of Correspondences*, John Wiley and Sons

a 武蔵大学経済学部　教授