武蔵高等学校中学校紀要7：161-167（2023）

数学を楽しむ
～大学入試問題を題材として～

友利　将吾
（数学科）
tomori.shogo@musashi.ed.jp

要　旨

値のよくわかっていなかった $\zeta(3)$ に関して，大学入試問題として比較的有名な等式を用いることで，カタラン定数を含む 2 つの定数を用いて表すことができることがわかった。更に，値のよくわからなかった定数の方は，3 重正接関数を用いて表すことができ，$\zeta(3)=-\frac{8}{7}\pi^2\log\mathcal{T}_3\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{4}{7}\pi G$ という簡潔な表示を得られた。

また，3 重正弦関数を用いて $\zeta(3)=-\frac{64}{35}\pi^2\log\mathcal{S}_3\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{35}\pi^2\log 2+\frac{16}{35}\pi G$ と表せることもわかり，このことから，3 重三角関数の特殊値

$$\mathcal{S}_3\left(\frac{1}{4}\right)=2^{\frac{1}{32}}\exp\left(\frac{G}{4\pi}-\frac{35\zeta(3)}{64\pi^2}\right),\ \mathcal{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)=2^{\frac{1}{32}}\exp\left(-\frac{G}{4\pi}+\frac{21\zeta(3)}{64\pi^2}\right),$$

$$\mathcal{T}_3\left(\frac{1}{4}\right)=\exp\left(\frac{G}{2\pi}-\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2}\right)$$

も得ることができた。更に，3 重正弦関数に関する等式

$$\mathcal{S}_3\left(\frac{1}{4}\right)^{-6}\mathcal{S}_3\left(\frac{2}{4}\right)^{5}\mathcal{S}_3\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=\sqrt{2}$$

も得られた。

Keywords: $\zeta(3)$，アペリー定数，多重三角関数，3 重三角関数の特殊値

はじめに

故・有馬朗人前学園長の創刊の辞に次のような一文がある。

「教員諸氏も，お互いに何に関心を持ちどのような考えを持っているかについて相互理解を深めつつ，更に活力を高め，教育の質を向上されんことを祈念している。」

そこで私は今回，自分自身が興味関心を抱く数学の内容について書くことにした。

１．関心をもったこと

数学の参考書を見ていると，次のような問題をよく見かける。

連続な関数 $f(x)$ について，等式 $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx \quad \cdots\cdots$ (1) を示せ。

また，整数論を専攻していた者からすると，オイラーによる次の等式も常識であろう。

$$\zeta(3) = \frac{2}{7}\pi^2 \log 2 + \frac{16}{7}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\log(\sin x)dx \quad \cdots\cdots \ (2)$$

(1) を示すのと同様にして (2) も変形することができれば，$\zeta(3)$ も積分を使わないで表示することができるのではないか，と考えた。なぜなら，これもまたオイラーによって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx = -\frac{\pi}{2}\log 2 \quad \cdots\cdots \ (3)$$

が示されているからである。ここで，直接 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\log(\sin x)dx$ を求めるのは難しいので，

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\log(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\log(\cos x)dx,$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\log(\sin x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\log(\cos x)dx$$

を考えて，$\dfrac{I+J}{2}$ を求めることにした。

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\log(\frac{\sin 2x}{2})dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\log(\sin 2x)dx - \log 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\log(\sin 2x)dx - \frac{\pi^2}{8}\log 2$$

$2x = t$ と置換することで，$\displaystyle I = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} t\log(\sin t)dt - \frac{\pi^2}{8}\log 2$

(1) より，$\displaystyle I = \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi} \log(\sin t)dt - \frac{\pi^2}{8}\log 2$

ここで $\displaystyle\int_0^{\pi} \log(\sin t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin t)dt$

右辺の第 2 項において $t = \pi - u$ とおいて，

$$\int_0^{\pi} \log(\sin t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin u)du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t)dt = -\pi\log 2$$

$(\because (3))$

$$\therefore\ I = -\frac{\pi^2}{4}\log 2$$

また，

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\log(\tan x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\log(\tan x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\log(\tan x)dx$$

右辺の第 2 項において $x=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ とおいて，

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\log(\tan x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\log\left\{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\log\left(\tan\theta\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\log(\tan\theta)d\theta-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(\tan\theta)d\theta$$

$$\therefore\ J=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\log(\tan x)dx-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(\tan x)dx$$

ここで，右辺の第 2 項の積分において $t=\tan x$ とおいて，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(\tan x)dx=\int_0^1\frac{\log t}{1+t^2}dt=-\int_0^1\frac{\tan^{-1}t}{t}dt$$

$$=-\int_0^1 1-\frac{t^2}{3}+\frac{t^4}{5}-\frac{t^6}{7}+\cdots\cdots\ dt=-\left(1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots\cdots\right)$$

$1-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}-\dfrac{1}{7^2}+\cdots\cdots$ はカタラン定数 G $(=0.91596\cdots\cdots)$ であるので，

$$J=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\log(\tan x)dx+\frac{\pi}{2}G$$

と表せる。J の第 1 項についても同様に $t=\tan x$ と置換すると，

$$J=-\int_0^1\frac{(\tan^{-1}t)^2}{t}dt+\frac{\pi}{2}G$$

$\displaystyle\int_0^1\frac{(\tan^{-1}t)^2}{t}dt$ についてはマクローリン展開などを試したが良くわからなかったので，とりあえず定数 C とおく。シンプソンの公式を用いて近似値を計算すると，$C\approx 0.3869956$ を得た。これより，

$$J=-C+\frac{\pi}{2}G$$

よって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\log(\sin x)dx=\frac{I+J}{2}=-\frac{\pi^2}{8}\log 2-\frac{C}{2}+\frac{\pi}{4}G\quad(C\approx 0.38699,\ G\approx 0.91596)$$

を得る。これを (2) に代入して，

$$\zeta(3)=\frac{2}{7}\pi^2\log 2+\frac{16}{7}\left(-\frac{\pi^2}{8}\log 2-\frac{C}{2}+\frac{\pi}{4}G\right)=-\frac{8}{7}C+\frac{4}{7}\pi G\quad\cdots\cdots\ (4)$$

を得る。なかなか簡潔な結果が得られて満足した。

２．多重三角関数を用いた表示

1．の $\zeta(3)$ の表示を得て，数年来そのまま放置していたが，たまたま机の整理をしていて大学時代の指導教官でもあった黒川信重氏の著書『ラマヌジャン ζ の衝撃』（黒川信重，2015 年）を見つけ，パラパラとめくってみると，pp.191–192 に $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan^{-1} t}{t} dt$ の試していない置換が示されていたので,「天啓を得た」と思って $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\tan^{-1} t)^2}{t} dt$ についても同様に変形してみることにした。

$\tan^{-1} t = \theta$ とすると，

$$C = \int_0^1 \frac{(\tan^{-1} t)^2}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\theta^2}{\tan\theta\cos^2\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta^2(\tan\theta + \cot\theta) d\theta$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta^2 \tan\theta d\theta$，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta^2 \cot\theta d\theta$ はそれぞれ多重三角関数を用いて表すことができる。

多重三角関数とは，前出の黒川氏によって考案された関数で，三角関数を一般化したものである。r を 2 以上の整数として，多重正弦関数 $\mathcal{S}_r(x)$，多重余弦関数 $\mathcal{C}_r(x)$ については，次のように記述することができる。

$$\mathcal{S}_r(x) = \exp\left(\int_0^x \pi t^{r-1} \cot \pi t \ dt\right), \qquad \mathcal{C}_r(x) = \exp\left(-\int_0^x \pi t^{r-1} \tan \pi t \ dt\right)$$

特に，$r = 3$，$x = \dfrac{1}{4}$ として，

$$\log \mathcal{S}_3\left(\frac{1}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{4}} \pi t^2 \cot \pi t \ dt, \qquad \log \mathcal{C}_3\left(\frac{1}{4}\right) = -\int_0^{\frac{1}{4}} \pi t^2 \tan \pi t \ dt$$

$\pi t = \theta$ とおくと，

$$\pi^2 \log \mathcal{S}_3\left(\frac{1}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta^2 \cot\theta \ dt, \qquad -\pi^2 \log \mathcal{C}_3\left(\frac{1}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta^2 \tan\theta \ dt$$

よって，

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta^2 \cot\theta \ d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta^2 \tan\theta \ d\theta = \pi^2 \log \mathcal{S}_3\left(\frac{1}{4}\right) - \pi^2 \log \mathcal{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)$$

ここで，多重正接関数 $\mathcal{T}_r(x)$ を

$$\mathcal{T}_r(x) := \frac{\mathcal{S}_r(x)}{\mathcal{C}_r(x)}$$

と定義すると，

$$C = \pi^2 \log \mathcal{T}_3\left(\frac{1}{4}\right)$$

と表すことができ，

$$\zeta(3) = -\frac{8}{7}\pi^2 \log \mathcal{T}_3\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{4}{7}\pi G$$

と，$\zeta(3)$ の値を 3 重正接関数とカタラン定数とを用いて表すことができた。

また，3 重正接関数の特殊値として，

$$\mathcal{T}_3\left(\frac{1}{4}\right)=\exp\left(\frac{G}{2\pi}-\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2}\right)$$

を得た。値の良くわからなかった定積分 C が，多重三角関数で表せるとわかり，感激した。

３．別の疑問

$\zeta(3)$ の値が多重正接関数の特殊値 $\mathcal{T}_3\left(\frac{1}{4}\right)$ で表せるのなら，$\mathcal{S}_3\left(\frac{1}{4}\right)$ を用いて表すこともできるはずである。そこで今度はこのことについて考察した。

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta^2\tan\theta\ d\theta=\left[-\theta^2\log(\cos\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\theta\log(\cos\theta)d\theta$$

$$=\frac{\pi^2}{32}\log 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\theta\log(\cos\theta)d\theta$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\log(\cos\theta)\ d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\log(\sin\theta)\ d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\log\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\theta\log\left(\sin 2\theta\right)d\theta-\log 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\ d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\log(\sin x)\ dx-\frac{1}{2}\log 2\cdot\frac{\pi^2}{16}$$

$$=-\frac{\pi^2}{16}\log 2-\frac{C}{8}+\frac{\pi}{16}G,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\log(\cos\theta)\ d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\log(\sin\theta)\ d\theta=\frac{C}{2}$$

より，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\theta\log(\cos\theta)\ d\theta=-\frac{\pi^2}{16}\log 2+\frac{3}{8}C+\frac{\pi}{16}G$$

よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta^2\tan\theta\ d\theta=\frac{\pi^2}{32}\log 2-\frac{\pi^2}{16}\log 2+\frac{3}{8}C+\frac{\pi}{16}G=-\frac{\pi^2}{32}\log 2+\frac{3}{8}C+\frac{\pi}{16}G$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta^2\cot\theta\ d\theta=\pi^2\log\mathcal{S}_3\left(\frac{1}{4}\right)$$

であるから，

$$C=\pi^2\log\mathcal{S}_3\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{\pi^2}{32}\log 2+\frac{3}{8}C+\frac{\pi}{16}G$$

$$\therefore\ C=\frac{8}{5}\pi^2\log\mathcal{S}_3\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{\pi^2}{20}\log 2+\frac{\pi}{10}G$$

これを (4) に代入して，次を得る。

$$\zeta(3) = -\frac{64}{35}\pi^2 \log \mathcal{S}_3\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{2}{35}\pi^2 \log 2 + \frac{16}{35}\pi G$$

また，これより

$$\mathcal{S}_3\left(\frac{1}{4}\right) = 2^{\frac{1}{32}} \exp\left(\frac{G}{4\pi} - \frac{35\zeta(3)}{64\pi^2}\right)$$

を得る。さらに，

$$\mathcal{C}_3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\mathcal{S}_3\left(\frac{1}{4}\right)}{\mathcal{T}_3\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{2^{\frac{1}{32}} \exp\left(\frac{G}{4\pi} - \frac{35\zeta(3)}{64\pi^2}\right)}{\exp\left(\frac{G}{2\pi} - \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2}\right)} = 2^{\frac{1}{32}} \exp\left(-\frac{G}{4\pi} + \frac{21\zeta(3)}{64\pi^2}\right)$$

を得る。

４．別の疑問２

$\mathcal{S}_2(x)$ については，次の等式が成立する。

$$\mathcal{S}_2\left(\frac{1}{4}\right)\mathcal{S}_2\left(\frac{2}{4}\right)\mathcal{S}_2\left(\frac{3}{4}\right) = 2$$

これは，簡単な計算により，$\mathcal{S}_2\left(\frac{1}{4}\right) = 2^{\frac{1}{8}} \exp\left(\frac{G}{2\pi}\right)$，$\mathcal{S}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$，$\mathcal{S}_2\left(\frac{3}{4}\right) = 2^{\frac{3}{8}} \exp\left(-\frac{G}{2\pi}\right)$ と表せることから示される。$\mathcal{S}_3(x)$ についても，同様にきれいな式が導けないか考察した。

$\mathcal{S}_3(x)$ に関する公式より，

$$\mathcal{S}_3\left(\frac{3}{4}\right) = -\mathcal{S}_3\left(-\frac{1}{4}\right)\mathcal{S}_2\left(-\frac{1}{4}\right)^2\mathcal{S}_1\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\mathcal{S}_3\left(\frac{1}{4}\right)}{\mathcal{S}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

よって，

$$\mathcal{S}_3\left(\frac{1}{4}\right)\mathcal{S}_3\left(\frac{2}{4}\right)\mathcal{S}_3\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\mathcal{S}_3\left(\frac{1}{4}\right)^2\mathcal{S}_3\left(\frac{1}{2}\right)}{\mathcal{S}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{1}{16}} \exp\left(\frac{G}{2\pi} - \frac{35\zeta(3)}{32\pi^2}\right) \times 2^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2}\right)}{2^{\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{G}{\pi}\right)} = 2^{\frac{9}{16}} \exp\left(-\frac{G}{2\pi} - \frac{63\zeta(3)}{32\pi^2}\right)$$

$\mathcal{S}_3(x)$ については，$\mathcal{S}_2(x)$ ほどきれいな値にはならなかった。それなりにきれいになるように指数を調整すると，

$$\mathcal{S}_3\left(\frac{1}{4}\right)^{-6}\mathcal{S}_3\left(\frac{2}{4}\right)^{5}\mathcal{S}_3\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=\sqrt{2}$$

と表せることがわかった。

おわりに

大学入試問題として比較的有名な等式を，オイラーの発見した等式 $\zeta(3)=\frac{2}{7}\pi^2\log 2+\frac{16}{7}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\log(\sin x)dx$ に適用するとどうなるのか，という素朴な疑問に対して，3 重三角関数を用いると思いがけず簡明な表記で表せることがわかった。更に，これにより 3 重三角関数の特殊値を得ることができ，3 重正弦関数の積についての等式を得ることもできた。

今回得られた結果が既知のものなのか新しい発見なのかは現時点では調べられていない。少なくとも手元にある文献には記載がないので，新発見であれば嬉しく思う。今後は，3 重三角関数だけでなく，一般の多重三角関数（r 重三角関数）の特殊値についても調べていきたい。

参考文献

黒川信重 2013『現代三角関数論』岩波書店
黒川信重 2012『オイラー探検』（pp.52–66）丸善出版
黒川信重 2015『ラマヌジャン ζ の衝撃』（pp.189–194）現代数学社