生産可能集合の位相的性質について

伊藤　成康[a]

JEL Classification Codes：C02, D24
キーワード：生産可能集合，投入集合，産出集合，closedness，自由処分可能性

本稿では，生産活動の公理論的分析における基本概念である生産可能集合と，数学的にはその切り口（section）にあたる投入集合ならびに産出集合に対して標準的に想定される位相的性質 closedness についての考察を行う．生産可能集合の closedness は，投入集合ならびに産出集合の closedness を含意するが，投入集合と産出集合の closedness を同時に仮定しても生産可能集合の closedness は保証されない．closedness と並んで一般的に想定される自由処分の仮定（free disposability）を加えても，「投入集合の closedness かつ自由処分の仮定」から生産可能集合の closedness は導かれないし，「産出集合の closedness かつ自由処分の仮定」から生産可能集合の closedness は導かれない．では，生産可能集合の closedness は，その切り口の closedness に加えどのような条件が課されれば成立する性質なのかというと，投入集合と産出集合がともに closed かつ自由処分可能であればよいことが確かめられる．以下では，これらのことを示して行こう．

新古典派経済学では，企業が実現可能な生産要素の投入と生産物の産出の組み合わせを生産可能集合と呼び，生産理論の基礎に据えている．以下では，n 種類の生産要素を投入し，m 種類の生産物を産出する企業等の活動主体を考察対象とする．投入，産出ベクトルを，それぞれ，$x \in R_+^n$（n 次元ユークリッド空間の非負象限），$y \in R_+^m$（m 次元ユークリッド空間の非負象限）とし，「x の投入により y の産出が可能」という関係を示す $R_+^n \times R_+^m$ の部分集合，すなわち生産可能集合を T で表す．次に T に関して標準的に想定される条件を列記しておこう．

〔$T1$〕$(0,0) \in T$ かつ $(0,y) \in T \Rightarrow y=0$

〔$T2$〕T は $(R_+^n \times R_+^m)$ の閉集合

〔$T3$〕$(x,y) \in T,\ (x,-y) \leq (u,-v) \Rightarrow (u,v) \in T$

〔$T4$〕すべての $x \in R_+^n$ に対し，

$$T(x) := \{(u,y) \in T \mid u \leq x\} \text{ は有界}$$

ここで，$T1, T3, T4$ の各条件は，それぞれ，桃源郷の不可能性，投入・産出の自由処分可能性，生産物の希少性の条件などと称せられる．$T1$ の前半の条件は，無活動が可能という形で T が空でないことを要求し，$T1$ の後半の条件と $T4$ は，経済的な選択の問題を考える意味があることを要求しているものと解釈できる．$T2$ が冒頭で言及した closedness であり，生産関数，費用関数，距離関数，等々といった経済分析の展開において重要な役割を果たす基礎概念が well-defined であるために不可欠の条件である．生産活動の効率性評価においては，「他の条件が一定ならば，投入はより小さい方が，産出はより大きい方が *better*」という Pareto 順序が重視されるが，$T3$ は，生産可能集合 T がそれ自身の自由処分包（free disposable hull）を含んでいる，すなわち，ある投入・産出の組 (x,y) が技術的に実現可能なら，上記の意味でこれより非効率な投入・産出の組も実現可能なことを要求している．また，

$$(x,y) \in T \Leftrightarrow y \in P(x) \Leftrightarrow x \in L(y)$$

として産出集合 $P(x)$（T の x 切り口）と必要投入集合 $L(y)$（T の y 切り口）が定義される．

このとき，次の命題が成り立つ：

命題 1

すべての x に対し $P(x)$ が closed，かつ，すべての y に対し $L(y)$ が closed，かつ $x \leq u \Rightarrow P(x) \subset P(u)$ の 3 条件が成り立つならば T は closed になる．

（証明）

$(x,y) \notin T$ ならば，$L(y)$ が closed だから，十分小さな $\varepsilon > 0$ をとって $x^\varepsilon = x + \varepsilon(1,\cdots,1) \notin L(y)$ とできる．一方，自由処分の仮定から $P(x) \subset P(x^\varepsilon)$ かつ $y \notin P(x^\varepsilon)$ となる．ここで $P(x^\varepsilon)$ も closed だから，十分小さな $\delta > 0$ をとって $B^\delta(y) \cap P(x^\varepsilon) = \phi$ とできる．ここで $B^\delta(y)$ は y の δ 近傍である．いま，再び自由処分の仮定から，$x^\varepsilon - R_+^n$ に含まれる x の十分小さな近傍 U が選べて $P(x) \subset P(x^\varepsilon)$ for all $x \in U$ が成立するから，$B^\delta(y) \cap P(x) = \phi$ for all $x \in U$ となる．これは $U \times B^\delta(y) \cap T = \phi$ を意味するから，これで T の closedness が示された．

（証明終了）

a 武蔵大学経済学部　教授

上記の証明において用いられたのは投入要素に関する自由処分可能性の仮定だが，産出に関する自由処分可能性の仮定に換えても同様の証明が可能となることは明らかであろう．証明のポイントは，自由処分の仮定により対応としての P の単調性が従うため，P の上半連続性に相当する「$P(x)\subset P(x^{\varepsilon})$ for all $x\in U$」の条件が成立する箇所である．命題1の逆，「T が closed なら，すべての x に対し $P(x)$ が closed，かつ，すべての y に対し $L(y)$ が closed」が成立することは明らかであり，T の条件 $T3$ の意味での自由処分可能性が，L と P の自由処分可能性を含意することも明らかである．Beer（1993）は，$L(y)$ の active frontier $Frac\ L(y)$ という概念規定を与えたうえで，「L が閉グラフ対応（T が closed）⇔ すべての y に対し $L(y)$ が closed かつ $L(y)$ が $Frac\ L(y)$ を含む」（Beer（1993），lemma 6.1.15）という命題の証明を与えている．ここで，$Frac\ L(y)=\cap\{\mathrm{cl}(L(W)\setminus L(y))\mid W$ は y の開近傍$\}$（cl は閉包作用素）であり，$Frac\ L(y)$ は $L(W)\setminus L(y)$ の閉収束の上極限 limes superior に相当する．Choquet が考案したとされる $Frac$ の経済学的意味を考えるのは難しく，本稿のように自由処分可能性の仮定と組み合わせた方が，生産可能集合 T の closedness と必要投入集合 L および産出集合 P の closedness の関連性についての見通しがよくなるものと思われる．距離関数の概念を用いて生産性分析や生産効率性分析を行おうとする研究者にとって，生産可能集合 T の位相的性質にまで制約を課すのは too much demanding だと思われるかもしれないが，方向距離関数を利用する分析，指向性フリーな分析を行おうとすれば，冒頭に掲げたような生産可能集合がみたすべき条件の確認は不可欠となる．

最後に，上記の議論を補完する意味で，(1) 投入集合と産出集合の closedness を同時に仮定しても生産可能集合の closedness は保証されないこと，(2)「投入集合の closedness かつ自由処分の仮定」から生産可能集合の closedness は導かれないこと，(3)「産出集合の closedness かつ自由処分の仮定」から生産可能集合の closedness は導かれないこと，これらを示す反例を示しておこう．

図1は，オーソドックスな生産可能集合に先端が開いたスパイクが付いたやや特異な生産可能集合を表しているが，容易に理解されるように，T のすべての x 切り口も y 切り口も closed である一方，T 自身は closed ではない．

図2には，投入集合が closed かつ自由処分可能だが T が closed ではない例が，図3には，産出集合が closed かつ自由処分可能だが T が closed ではない例が描かれている．

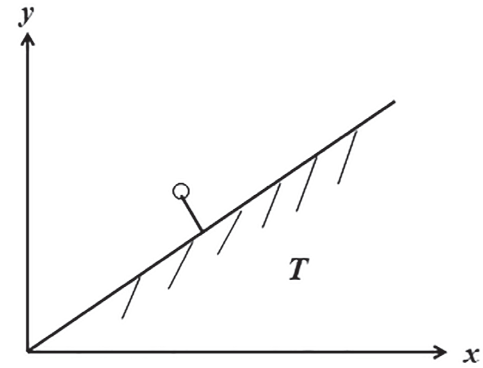

図1　投入集合・産出集合は closed だが生産可能集合は closed ではない例

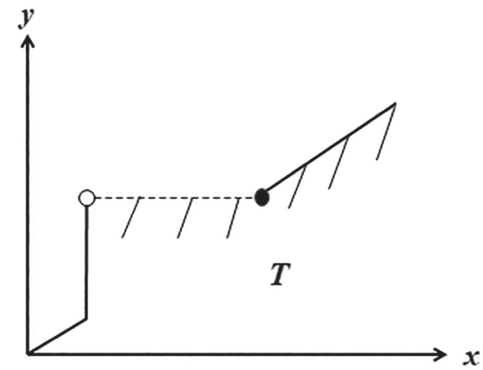

図2　投入集合が closed かつ自由処分可能だが生産可能集合は closed ではない例

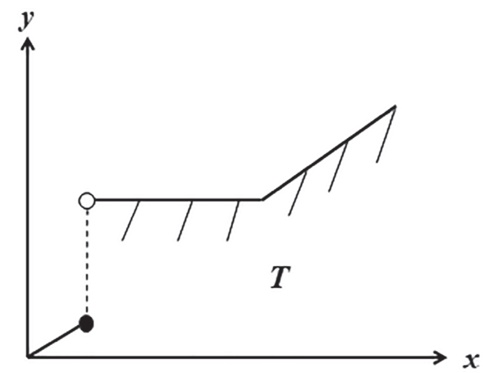

図3　産出集合が closed かつ自由処分可能だが生産可能集合は closed ではない例

これらの例は，投入集合もしくは産出集合の閉収束単独では生産可能集合の閉収束を含意しないことをも示唆していて興味深い．生産可能集合の閉収束が投入集合と産出集合の閉集合を含意することは見やすいが，図1の例から，逆は成り立たないことがわかる．同図のスパイク部分をわずかに摂動して生産可能集合の列を構成すれば，すべての x 切り口と y 切り口が閉集合で，それらが閉収束しても，極限が図1のような T となり，閉収束極限の closedness に反する結果を得る．図2，図3の例からは，産出または投入のどちらの切り口に自由処分可能性のような強い条件を課しても，一方の切り口の閉収

束単独では生産可能集合の閉収束を含意しないことがわかる．

このように，生産可能集合，産出集合，必要投入集合がみたす位相的性質の間に成立する関係は存外デリケートなものである．R.R.Russell は効率性分析の権威の一人であるが，彼のような研究者でもスリップを犯す．Russell and Schworm（2011）は，効率性指標の投入・産出ベクトルと生産可能集合に関する同時連続性を証明したと主張しているが，その証明は「$x^k \to x$ かつ $T^k \to T$ なら $P^k(x^k) \to P(x)$」という誤った推論に基づいている．$T^k = T$ だが，P が x で劣半連続ではなく“外割れ”するとき $P^k(x^k) \to P(x)$ とはならない．たとえば，図１において先端の閉じたスパイクが垂直に立っている例を考えれば，スパイクが立っている x で，対応としての P の不連続性（劣半連続性の不成立）が生じる．別の言い方をすれば，対応のグラフが閉収束しても対応自身が連続収束する保証はない．生産可能集合の境界で生じる不連続性のタネを如何にして取り除くかが分析者の腕の見せ所と言える．

参 考 文 献

Beer, Gerald(1993), *Topologies on Closed and Closed Convex Sets*, Kluwer Academic Publishers

Briec, W.(1998), “Hölder Distance Function and Measurement of Technical Efficiency,” *Journal of Productivity Analysis* 11, 111-131.

Färe, R. and D.Primont(1995), *Multi-Output Production and Duality : Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers

Hackman, S.T. and R.R.Russell(1995), “Duality and Continuity,” *Journal of Productivity Analysis* 6, 99-116.

Klein, E. and A.C.Thompson(1984), *Theory of Correspondences*, John Wiley and Sons

Lucchetti,R.(2006), *Covexity and Well-Posed Problems*, Springer

Russell, R.R.(1990), “Continuity of Measures of Technical Efficiency,” *Journal of Economic Theory* 51, 255-267.

Russell, R.R. and W.Schworm(2009), “Axiomatic Foundations of Efficiency Measurement on Data-Generating Technologies,” *Journal of Productivity Analysis* 31, 77-86.

Russell, R.R. and W.Schworm(2011), “Properties of Inefficiency Indexes on <input,output> space,” *Journal of Productivity Analysis* 36, 143-156.

Shephard, R.W.(1970), *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton University Press

Sickles,R.C. and V.Zelenyuk(2019), *Measurement of Productivity and Efficiency ; Theory and Practice*, Cambridge University Press