

# 生産理論における距離関数についての一考察<sup>1)</sup>

伊藤 成康<sup>a</sup>

JEL Classification Codes : D24

キーワード：距離関数, 包括的表現, 連続性, 効率性指標

## はじめに

新古典派経済学では、企業が実行可能な生産要素の投入と生産物の産出の組み合わせを生産可能集合と呼び、生産理論の基礎に据えている。生産可能集合を特定しただけでは企業行動に関する有益な経済学的含意を導くのは難しいこともあり、個別の投入・産出実績と生産可能集合の関係を実数値関数で表す工夫を施したうえで、生産の効率性分析や生産性分析等に進む展開が一般的である。古くから親しまれている生産関数や転形関数の概念等も、そうした生産可能集合をフォーマルに記述するよく知られた手段であるが、これとは異なる数学的表現である距離関数 (distance function) の概念が、1950年代の初期に Shephard (1953) と Malmquist (1953) によって独立に提唱された。いま、投入  $x$  から産出  $y$  を得られたとして、投入を  $x/\theta$  ( $\theta$  はスカラー) のように比例圧縮 ( $1/\theta$  倍) しても  $y$  をぎりぎり産出できる最大圧縮率  $\theta$  を以て (投入) 距離関数の値と定める。投入要素の節約の余地がない効率的な生産が行われている状況では  $\theta=1$  となり、圧縮の余地を残す非効率なケースでは  $\theta>1$  となる。このように、概念の具体的な経済学的意味の想像しやすさでは距離関数は生産関数に劣らぬものであるばかりか、明らかに、生産の非効率性の程度を捉える量的指標を提供している点で有用である。距離関数は、非効率性の概念規定に重要な役割を果たしているだけではなく、効率性測定手法の実装において線形計画法と親和性が高く、近年隆盛著しい Data Envelopment Analysis という実証研究分野の理論的基礎を与えている。この Shephard-Malmquist 流の距離関数は、後年、生産性測定のツールとしても用いられ (Caves, Christensen and Diewert (1982) 等)、生産理論において不可欠の概念となっている。

ところで、距離関数は、文字通り、投入・産出実績と潜在的に達成可能な効率的投入・産出ベクトルの集合 (効率フロンティア) との乖離度を測るものとみることができ、実績と比較される効率フロンティア上の参

照点の決め方は一義的ではない。何を参照点とするかの基準の定式化次第で異なる距離関数が導かれるが、実際、近年では様々なバリエーションが提案されている。以下、本稿では、これら多様な距離関数の包括的表現を求め (第2節)、その一般的な距離関数の連続性に関する数学的証明を試みる (第3節)。

## 1. 生産可能集合と距離関数

以下では、 $n$  種類の生産要素を投入し、 $m$  種類の生産物を産出する企業等の活動主体を考察対象とする。投入、産出ベクトルを、それぞれ、 $x \in R_+^n$  ( $n$  次元ユークリッド空間の非負象限)、 $y \in R_+^m$  ( $m$  次元ユークリッド空間の非負象限) とし、「 $x$  の投入により  $y$  の産出が可能」という関係を示す  $R_+^n \times R_+^m$  の部分集合、すなわち生産可能集合を  $T$  で表す。 $T$  は以下の条件  $T1 \sim T4$  をみたすものと仮定する。

[T1]  $(0, 0) \in T$  かつ  $(0, y) \in T \Rightarrow y = 0$

[T2]  $T$  は  $(R_+^n \times R_+^m)$  の閉集合

[T3]  $(x, y) \in T, (x, -y) \leq (u, -v) \Rightarrow (u, v) \in T$

[T4] すべての  $x \in R_+^n$  に対し、

$T(x) := \{(u, y) \in T | u \leq x\}$  は有界

$T1, T3, T4$  の各条件は、それぞれ、桃源郷の不可能性、投入・産出の自由処分可能性、生産物の希少性の条件などと称せられる。生産活動の効率性評価においては、「他の条件が一定ならば、投入はより小さい方が、産出はより大きい方が *better*」という Pareto 順序が重視されるが、 $T3$  は、生産可能集合  $T$  がそれ自身の自由処分包 (free disposable hull)<sup>2)</sup> を含むことを要求している。

次に、距離関数を定義するにあたり、いろいろな流儀があり得るが、生産可能集合  $T$  の中から、Pareto 順序等に関するなんらかの意味で効率的な部分集合 = 境界 (frontier) を識別しておけば便利である。先の Pareto 順序に関する  $T$  の弱極小元の集合は、

a 武蔵大学経済学部 教授 〒176-8534 東京都練馬区豊玉上 1-26-1

$$\partial^W(T) := \{(x, y) \in T \mid (u, -v) < (x, -y) \Rightarrow (u, v) \notin T\}$$

と表されるが、これは、**弱効率集合** (weak efficient set) と呼ばれる。この定義によれば、 $x$  の座標成分にゼロが含まれる投入・産出  $(x, y)$  は空回り式に弱効率的となってしまうため、このような特異な要素を排除した効率集合の概念も提案されている (Färe and Grosskopf (1983)).

$$\partial^F(T) := \{(x, y) \in T \mid (u, -v) <^*(x, -y) \Rightarrow (u, v) \notin T\}$$

( $<^*$  の意味については後掲数学記号注参照)

がそれであり、**Färe and Grosskopf の効率集合** と呼ばれる。  $\partial^F(T) \subset \partial^W(T)$  が成立する。ちなみに、

$$\partial(T) := \{(x, y) \in T \mid (u, -v) \leq (x, -y) \\ \text{but } (u, -v) \neq (x, -y) \Rightarrow (u, v) \notin T\}$$

という **Pareto-Koopmans の効率集合** の方が、一般には馴染み深いものであろう。

距離関数  $D(x, y, T)$  が、所与の投入・産出  $(x, y) \in T$  と効率集合  $\partial^W(T)$  (ないしは  $\partial^F(T)$ ) との乖離度 (distance) を測るものであれば、修辭上、 $D(x, y, T) = 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \partial^W(T)$  (or  $\partial^F(T)$ )” という条件の成立が望まれるが、Briec (1998) が提唱した **metric distance function**  $D_T(x, y)$  はその典型である。ここに、

$$D_T(x, y) := \inf\{\|(x, y) - (u, v)\| \mid (u, v) \in \partial^W(T)\}, \|\cdot\| \text{ は } R_+^n \times R_+^m \text{ 上のノルム}$$

である。上記論文において Briec は、一般化方向距離関数を始め、これまでに提唱されてきた多くの距離関数が、適切な Hölder 距離から導かれる **metric distance function**  $D_T(x, y)$  として表現されることを示した。

これに対し、生産可能集合  $P(x)$  ( $T$  の  $x$  切り口) と必要投入集合  $L(y)$  ( $T$  の  $y$  切り口) の境界 (より広義の効率集合) にあたる生産フロンティア  $Isoq P(x)$  と等量集合  $Isoq L(y)$  が

$$Isoq P(x) := \{y \in R_+^m \mid \theta > 1 \Rightarrow (x, \theta y) \notin T\}, \\ Isoq L(y) := \{x \in R_+^n \mid \theta > 1 \Rightarrow (x/\theta, y) \notin T\},$$

と定義され、 $y$  と  $Isoq P(x)$  との射線 (ray) 方向の乖離度、また、 $x$  と  $Isoq L(y)$  との射線方向の乖離度を測る指標として、Shephard の産出距離関数  $D^o(x, y, T)$ 、投入距離関数  $D^i(x, y, T)$  が定められる。すなわち、

$$D^o(x, y, T) := \sup\{\theta \in R_+ \mid (x, \theta y) \in T\}, \\ D^i(x, y, T) := \sup\{\theta \in R_+ \mid (x/\theta, y) \in T\}$$

である<sup>3)</sup>。後者が冒頭インフォーマルで紹介した投入距離関数である。 $(x, y) \in T$  に対し、 $D^o(x, y, T) = 1 \Leftrightarrow y \in$

$Isoq P(x)$ ”,  $D^i(x, y, T) = 1 \Leftrightarrow x \in Isoq L(y)$ ” となることが容易に確認できる。

Briec の距離関数と Shephard の距離関数とではかなり趣が異なるように思われるかもしれないが、後者においては、投入実績を最大圧縮率  $\theta^*$  で割った  $x/\theta^*$  と  $y$  の組  $(x/\theta^*, y)$  がフロンティア  $\partial^W(T)$  上の比較参照点になっていて、実績と比較参照点の差 = Hölder 距離を “距離” と定義する代わりに、実績と比較参照点の (投入成分の) いわば比である  $\theta$  を “距離” と定義しているのであり、「距離を測る」というニュアンスにおいては通底するものがある。

ここで、距離関数  $D_T(x, y)$ 、 $D^o(x, y, T)$ 、 $D^i(x, y, T)$  について成立する重要な性質を定理の形でまとめておこう。T1~T4 の仮定の下に以下が成立する。

定理1 (Briec (1998), p.115)

- 1)  $D_T(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \partial^W(T)$
- 2)  $D_T(x, y)$  は  $(x, y) \in T$  に関して連続
- 3)  $(x, -y) \leq (x', -y') \Rightarrow D_T(x, y) \leq D_T(x', y')$

定理2

- 1)  $D^o(x, y, T) = 1 \Leftrightarrow y \in Isoq P(x)$
- 2)  $D^o(x, y, T)$  は  $y \in P(x)$  に関して連続 ( $\Leftrightarrow Isoq P(x)$  は閉集合)
- 3)  $y' \leq y, y \in P(x) \Rightarrow D^o(x, y, T) \leq D^o(x, y', T)$

定理2'

- 1)  $D^i(x, y, T) = 1 \Leftrightarrow x \in Isoq L(y)$
- 2)  $D^i(x, y, T)$  は  $x \in L(y)$  に関して連続 ( $\Leftrightarrow Isoq L(y)$  は閉集合)
- 3)  $x \leq x', x \in L(y) \Rightarrow D^i(x, y, T) \leq D^i(x', y, T)$

(証明については、Shephard (1970), Färe and McGough (2010) 等を参照のこと。) ◇

上記定理1, 2, 2' の1) に示される距離関数の性質は、 $T$  の弱効率集合ないしは広義効率集合を特定する **weak indication property** と呼ばれる。また、2) は文字通り距離関数の引数に関する連続性を示すもの、3) は Pareto 順序に関する単調増加性 (順序保存性) を示すものである。定理2 (2') の2) 括弧部分は、 $Isoq P(x)$  ( $Isoq L(y)$ ) が閉集合になることが、 $D^o(x, y, T)$  ( $D^i(x, y, T)$ ) が  $y(x)$  に関する連続関数となるための必要十分条件であることを主張するものだが、自由処分の仮定 T3 から  $Isoq P(x)$  ( $Isoq L(y)$ ) の closedness が従う。実は、仮定 T3 と、対応としてみた  $P$  と  $L$  の劣半連続性の下で、 $D^o(x, y, \cdot)$ 、 $D^i(x, y, \cdot)$  は  $(x, y) \in T$  に関して連続となることが、Hackman and Russell (1995) により示されている。 $P$  と  $L$  の劣半連続性の仮定は強力で、後述する Russell の不連続性を生じさせる反例を排除するのだが、 $T$  のとり得る範囲を制約する。

要約すると、距離関数には weak indication property, 連続性, Pareto 順序の保存性という 3 つの重要な性質があることが分かったわけだが、これらに加えて、投入・産出の測定単位が変更されても距離は不変に保たれることを要求する単位への非依存性 (commensurability) の条件を付加した 4 条件が、距離関数ないしは効率性指標がみとすべき条件とされている (Russell (1990), Russell and Schworm (2009)). 前述のように、投入・産出実績と比較される効率フロンティア上の参照点の決め方により異なる距離関数が導かれる訳だが、いずれも上記の性質をみとすように定式化されている。興味深いことに、次節で紹介する方向距離関数 (directional distance function) は、数計画法のベクトル最適化における Pascoletti-Serafini の scalarization という手法と完全に対応しており、やはり上記の 3 性質が成立する (Khan, Tammer and Zalinescu (2015) 第 5.2 節)。

もう一点付け加えておくと、生産可能集合  $T$  と距離関数  $D$  の間には、両者の持つ情報が同等であることを示す双対性 (duality) が成立する。模式的に言えば、 $T$  から距離関数  $D^T = D(\cdot, T)$  を導く手順  $\delta$  と、 $D$  から  $D^D = \{(x, y) \in R_+^n \times R_+^m \mid D(x, y) \geq 0\}$  等として生産可能集合を導く手順  $\tau$  が与えられたとき、 $\tau(\delta(T)) = T, \delta(\tau(D)) = D$  が成立すると同時に、仮定 T2, T3 と定理 1 の性質 2), 3) が対応する (詳細は Färe and Primont (1995) 第 2 章を参照のこと)。

## 2. 距離関数の包括的な表現

前節では、効率性分析において用いられる距離関数の概念とそれがみとす数学的性質について検討した。実は、前節で紹介した距離関数を含む、weak indication property, 連続性, および Pareto 順序に関する単調性をみとす多くの関数は、パラメーター  $\theta$  に関して Pareto 順序の意味で単調減少な連続写像  $f: (x, y, \theta) \in R_+^n \times R_+^m \times R_+ \rightarrow f(x, y, \theta) \in R_+^n \times R_+^m$  を所与として、

$$\psi(x, y, T) := \inf\{\theta \in R_+ \mid f(x, y, \theta) \in T\}$$

(最短脱出時間) の形をしていることが分かる。 $f$  を比較参照点への射影と捉える考え方もある。

Shephard の投入距離関数は、

$$f(x, y, \theta) = (x/\theta, y)$$

Chambers, Chung and Färe (1995) の一般化方向距離関数は、

$$f(x, y, \theta) = (x - \theta g_x, y + \theta g_y)$$

(ここに  $(g_x, g_y)$  は所与の方向ベクトル)

Chavas and Cox (1999) の一般化距離関数は、

$$f(x, y, \theta) = (x/\theta^{1-p}, \theta^p y), \quad 0 \leq p \leq 1$$

Färe, Grosskopf and Lovell (1985) の双曲型距離関数は、

$$f(x, y, \theta) = (x/\theta, \theta y)$$

と、それぞれ設定すれば、 $\psi(x, y, T)$  の形に帰着する。上記の各距離関数は、投入・産出実績を効率フロンティア上の比較参照点に近づけていく手順の違いに特徴があり、実証研究においてもクロス・バリデーションにより頑健な効率性の測定を行うために活用されている。

一方、Russell (1985), Charnes et al. (1985) (CCGS) や Färe and McGough (2010) は、投入・産出実績とフロンティア上の比較参照点の差の座標成分を合計 (あるいは平均) する形で距離関数を提唱しており、DEA 研究者の間では一定の支持がある。この距離関数やその variant は直接  $\psi(x, y, T)$  の形に還元できないが、投入・産出実績  $(x, y)$  から  $L_1$  距離  $t$  にある、 $(x, y)$  より Pareto 改善的な投入・産出ベクトルの集合を  $\Phi(x, y, t)$  として

$$\theta(x, y, T) = \sup\{t \in R_+ \mid Fr(T) \cap \Phi(x, y, t) \neq \emptyset\}$$

(ここに  $Fr(T)$  は  $T$  の位相的境界)

のように表現できる。 $\theta(x, y, T)$  は最長停留時間を表す関数の形になっており、 $\psi(x, y, T)$  との形式的類似性は明らかである。次節では、 $f$  や  $\Phi$  の正則性を用いて  $\psi(x, y, T)$  や  $\theta(x, y, T)$  の連続性, 上半連続性を示す。

## 3. 距離関数の連続性<sup>4)</sup>

本節では、第 1 節の仮定 T1~T4 の下、 $\psi$  が  $(x, y)$  に関して連続になるだけでなく、グラフ位相の下で、 $T$  に関して連続になることを証明する。まずは次の補題を示す。

補題

条件 T2, T3 をみとす  $Z := R_+^n \times R_+^m$  の冪空間  $\mathcal{S}$  において、 $S := \bigcap \text{int } T, S^k := \bigcap \text{int } T^k, k=1, 2, \dots$  とすると、 $T^k \rightarrow T$  なら  $S^k \rightarrow S$  が従う。

(証明)

$S \subset \text{Li } S^k$  の証明は、Matheron (1975) にある。以下に  $\text{Ls } S^k \subset S$  を示す。まず、 $z \in \text{Ls } S^k$  なら  $z^k \rightarrow z$  となるように  $z^k \in T^k$  を選ぶことができる。ここで、錐  $K^k := z^k + (-R_+^n) \times R_+^m$  を考えると、 $K^k \cap T^k = \emptyset$  である。 $K = \text{Lim } K^k, T = \text{Lim } T^k$  に対し、 $K \cap T$  は内点を持たないことが示される。このことから  $z \notin \text{int } T$  よって  $z \in S$  が従う。なぜなら、 $z \in \text{int } T$  なら、 $z$  が  $K$  の尖端であることとあわせて、 $z$  から  $\text{int}((-R_+^n) \times R_+^m)$  方向にわずかに動いて  $z' \in \text{int}(K \cap T)$  を見出すことができ、先の  $\text{int}(K$

$\cap T) = \phi$  という主張と矛盾する。最後に、この  $\text{int}(K \cap T) = \phi$  を示そう。仮に、 $v \in \text{int}(K \cap T)$  とすれば、 $v$  の近傍  $B$  で  $B \subset \text{int}(K \cap T)$  なるものと、 $v^k \rightarrow v$  なる点列  $v^k \in T^k$  でほとんど  $v^k \in B$  となるものが存在する。 $v \in \text{int} K$ ,  $v^k \rightarrow v$  であるから、ほとんど  $v^k \in K^k$  だが、これは  $K^k \cap T^k = \phi$  と矛盾する。

定理 3

$T$  を  $T1 \sim T4$  をみたす  $R_+^n \times R_+^m$  の冪空間  $\mathfrak{S}$  の元とする。その冪空間  $\mathfrak{S}$  には Fell の閉収束位相を導入する。また、 $f: R_+^n \times R_+^m \times R_+ \rightarrow R_+^n \times R_+^m$  は、連続かつ

$$\theta < \theta' \Rightarrow f(x, y, \theta) <^P f(x, y, \theta')$$

をみたし、さらには、境界条件

$$[Esc] \quad f(x, y, \theta) \in \partial T, \theta < \theta' \Rightarrow f(x, y, \theta') \notin T, \\ \text{かつ } \exists \theta' : f(x, y, \theta') \in T$$

をみたすものとする。このとき、

$$\psi(x, y, T) := \inf\{\theta \in R_+ \mid f(x, y, \theta) \notin T\}$$

と定義される (距離) 関数  $\psi: R_+^n \times R_+^m \times \mathfrak{S} \rightarrow R_+$  は連続である。

(証明)

$T1, T3, T4$  から  $\psi(x, y, T) < \infty$  が従い、以下ではこれを前提とする。

1°)  $\Theta(z, T) := \{\theta \in R_+ \mid f(z, \theta) \notin T\}$  は開グラフ対応になる (ここで  $(x, y) = z$  と表記している)。

$R_+^n \times R_+^m$  は正則空間だから、 $f(z, \theta)$  の近傍  $U$  と  $T$  を含む開集合  $V$  で、 $U \cap V = \phi$  なるものが存在する。ここで、 $V$  はコンパクト集合の補集合になっていると考えてよい。 $f$  の連続性から、 $(z, \theta)$  のある近傍  $B$  に属する  $(z', \theta') \in B$  に対し、 $f(z', \theta') \in U$ 。同時に、 $V$  に含まれる閉集合  $T'$  をとれば、 $f(z', \theta') \notin T'$ 。

2°) 開グラフ対応は劣半連続 (lower semicontinuous) ゆえ、maximum theorem から、 $\psi(z, T) = \inf\{\theta \in R_+ \mid \theta \in \Theta(z, T)\}$  は上半連続関数となる (たとえば Klein and Thompson (1984) theorem 9.2.1)。

3°) 次に、 $\psi$  の下半連続性を示す。 $(z^k, T^k) \rightarrow (z^0, T^0)$ ,  $\theta^k = \psi(z^k, T^k)$ ,  $\theta^0 = \psi(z^0, T^0)$  として、 $\psi$  が下半連続ではなく、ある  $\varepsilon > 0$  と無数の  $k$  に対し  $\theta^0 - \varepsilon > \theta^k$  となるなら、 $f$  の  $\theta$  に関する単調性と自由処分の仮定  $T3$  から、無数に  $f(z^k, \theta^0 - \varepsilon) \notin T^k$  となる。よって、 $f(z^k, \theta^0 - \varepsilon) \notin T^k \supset \text{int } T^k$ 。 $f$  の連続性と仮定から、 $f(z^k, \theta^0 - \varepsilon) \rightarrow f(z^0, \theta^0 - \varepsilon)$ ,  $T^k \rightarrow T^0$  であり、

$$\Lambda(z, T) := \{\theta \in R_+ \mid f(z, \theta) \notin \text{int } T\}$$

で定義される  $\Lambda$  は、閉収束の定義と補題より、閉対応になることから、 $f(z^0, \theta^0 - \varepsilon) \notin \text{int } T^0$  が従う。ここで  $\varepsilon$  よりわずかに小さい  $\varepsilon'$  をとれば、ふたたび  $f$  の  $\theta$  に関する単調性、自由処分の仮定  $T3$  および境界条件 [Esc] から  $f(z^0, \theta^0 - \varepsilon') \notin T^0$  となり ( $f$  が  $\partial T$  上に停留しない!)、 $\theta^0 = \inf\{\theta \in R_+ \mid f(z^0, \theta) \notin T^0\}$  と矛盾する。これで、

$$\psi(z^0, T^0) \leq \liminf \psi(z^k, T^k)$$

が示された。◇

この定理の証明は、Aubin (1991) lemma 4.2.2 (p. 134) の証明からヒントを得たものである。

次に  $\theta(x, y, T)$  の上半連続性を示そう。

定理 4

$P(x)$  が有界という標準的な仮定の下で、

$$\theta(x, y, T) = \sup\{\theta \in R_+ \mid Fr(T) \cap \Phi(x, y, \theta) \neq \emptyset\}$$

(ここに  $Fr(T)$  は  $T$  の位相的境界)

と定義される (距離) 関数  $\theta: R_+^n \times R_+^m \times \mathfrak{S} \rightarrow R_+$  は上半連続である。

(証明)

$\Delta(x, y, \theta): (x, y)$  から  $L_1$  距離  $\theta$  にある投入・産出ベクトルの集合、

$$K(x, y) = (x, y) + (-R_+^n) \times R_+^m$$

として  $\Phi(x, y, \theta) = \Delta(x, y, \theta) \cap K(x, y)$  である。 $\Delta(x, y, \theta)$  は  $L_1$ -ball の face だからコンパクトであり、 $K(x, y)$  が closed なることより、 $\Phi$  はコンパクト値写像となる。また、 $L_1$  距離の連続性から  $\Phi$  は閉対応になる。さらに、 $\Delta(x, y, \theta)$  が局所一様有界であることから  $\Phi$  も局所一様有界になる。よって  $\Phi$  は優半連続である。

次に、 $\Gamma = \{(x, y, T, \theta) \mid Fr(T) \cap \Phi(x, y, \theta) \neq \emptyset\}$  および  $\Theta(x, y, T) = \{\theta \in R_+ \mid (x, y, T, \theta) \in \Gamma\}$  として  $\Theta$  が閉対応 ( $\Gamma$  が閉集合) となることを示す。 $(x, y, T, \theta) \in \Gamma$  として  $\Phi(x, y, \theta)$  のコンパクト近傍  $B$  で  $Fr(T) \cap B = \emptyset$  なるものをとれば、 $B$  と  $B^c$  は  $\Phi(x, y, \theta)$  と  $Fr(T)$  を分離する。 $\Phi$  の優半連続性と Fell (upper) 位相の定義から、 $(x, y, T, \theta)$  の近傍  $U$  で  $U \cap \Gamma = \emptyset$  なるものを見いだし得る。よって  $\Theta$  は閉対応。 $T \cap K(x, y)$  のコンパクト性 ( $P(x)$  の有界性から従う) から  $\Theta$  の局所一様有界性も示せて、 $\Theta$  の優半連続性が従う。 $\theta(x, y, T) = \sup \Theta(x, y, T)$  だから、maximum theorem により所期の結果が得られる。◇

$\theta(x, y, T)$  の下半連続性までは示せないのには理由がある。Russell and Schworm (2009) は、反例を用いて Färe and Lovell 型や CCGSS 型の効率性指標は不連続点をも

ち得ることを示した。実は、彼らが連続性をみたとしている Shephard の距離関数も件の反例の例外ではなく、Debreu-Farrell 指標は連続で Färe-Lovell 指標は不連続という決めつけ、先入観は持たない方がよい。Free Disposable Hull technology のグラフィカルなイメージは階段状の図形となるが、階段の段差に当たる箇所で多くの距離関数の不連続性が生じる。Pareto-Koopmans の意味で効率的な投入・産出ベクトルを強く識別できる距離関数は  $\partial(T)$  の不連続な縮退と一蓮托生の関係にあり連続性を犠牲にせざるを得ないのだが、弱い indication property しか要求しない Shephard の距離関数でさえも  $T$  のとり得る範囲を制限せねば連続性が担保されないのである。

さて、ここで以下の点を強調しておきたい。距離関数  $\psi$  は、前節でみたように、Shephard の距離関数のほか、Chambers, Chung and Färe (1995) の一般化方向距離関数、Chavas and Cox (1999) の一般化距離関数、Färe, Grosskopf and Lovell (1985) の双曲型距離関数、等々を包摂する。したがって、Russell (1990), Russell and Schworm (2011) や Hackman and Russell (1995) が積み残した<sup>5)</sup> Shephard の距離関数の  $T$  に関する連続性証明のみならず、一群の距離関数が  $T$  に関して連続になることの証明が一気に与えられたことになる。ただし、既述の通り大きな留意事項がある。距離関数  $\psi$  の連続性は比較参照点への射影  $f$  の振る舞いの良さ (境界条件) に依存しているので、たとえば、Shephard の  $f$  は Free Disposable Hull technology に対しては境界条件を充足しない状況が生じて、結局は Hackman and Russell (1995) が行った  $P$  と  $L$  の劣半連続性を仮定するような形で  $T$  のクラスを制限する必要があるかもしれない。これとは対照的に、一般化方向距離関数と Free Disposable Hull technology の相性はよく、包括的な連続性証明の意義をアピールするには都合がよい。

ちなみに第1節で紹介した *metric distance function* の  $(x, y, T)$  に関する連続性はどうか? 基礎空間  $Z$  上の距離  $d$  を用いて  $d(z, T^k)$  の収束から冪空間に位相を導入する Choquet-Wijsman 流の冪位相の定義があるが、Choquet-Wijsman 位相はユークリッド空間の冪空間においては Fell 位相と一致するので、 $T$  とその境界 ( $T$  の効率的部分集合)  $\partial^*(T)$  に対し、 $T^k \rightarrow T$  なら  $\partial^*(T^k) \rightarrow \partial^*(T)$  を示すことができれば、所期の連続性証明を容易に行うことができる。絶対値関数の凸性と  $d(z, T)$  が一樣リプシッツになることを用いれば、距離関数の  $(x, y, T)$  に関する (同時) 連続性が示される。ただし、 $T$  が Leontief technology で、 $T^k$  がこれを近似する正則な生産可能集合の場合を想起すれば分かるように、効率的部

分集合  $\partial^*(T)$  の定義次第では、 $\partial^*(T^k) \rightarrow \partial^*(T)$  は期待できない ( $\partial^*(T^k)$  の不連続な縮退が生じ得る)。このような不連続が生じるのは、Pareto-Koopmans の効率性の定義がある意味で厳しすぎるためともいえる。

なお、一般化された距離関数の連続性以外の性質、たとえば単位非依存性は自動的に保証されるものではなく、その成否は  $f$  に課される追加的条件に依存するが、追加的条件が課された場合でも、距離関数の連続性証明は本稿と同様に進められる。

距離関数の連続性に関してもう一点付言すれば、比較参照点の決め方を指定する写像  $f$  や  $\phi$  をも引数とする形に距離関数を一般化して、距離関数  $\psi$  や  $\theta$  の  $f$  や  $\phi$  に関する連続性を示すこともできる。たとえば、 $f$  の関数空間にコンパクト開位相を入れて前掲 Aubin (1991) lemma 4.2.2 (p. 134) の証明をなぞり、境界条件  $[Esc]$  を用いて最短到達時間と最短脱出時間の一致をいえばよい (ただし、極限操作によっても境界条件が保たれるためには横断性条件のような仮定が必要となる)。これは無意味な抽象化ではなく、たとえば、方向距離関数における方向ベクトルの変化に関する効率性評価の安定性、もっといえば、距離関数の定式化変更に関する効率性評価の安定性を確認することにつながる。

以上、本稿では、生産理論に現れる様々な距離関数の概説とそれらを包括的に表現する一般化距離関数の連続性証明を行ってきた。生産の効率性を測る距離の選択に過敏になる必要はないことを示唆しているという「連続性」の解釈もあり得るが、さりとて、距離の選択は慣例に従えばよいというものでもない。効率性分析や生産性分析の実際において、距離関数の選択が測定結果にどのような影響を与えているのかを検証することは重要な課題であり、筆者はこのような問題意識に沿った研究を継続していきたいと考えている。

## 注

- 1) 本稿は、旧稿伊藤 (2011) の続編にあたり、フォーマルな記述のために必要な事柄をまとめた第1節と、距離関数の連続性に関する第3節の一部はこれに依拠している。また、本研究は武蔵大学長期特別研修制度の恩恵を受けており、記して謝意を表したい。
- 2) 生産可能集合  $T$  の自由処分包とは  $T + R_+^n \times (-R_+^m)$  を指す。生産集合や等量集合の自由処分包についても同様に定義できる。
- 3) 「産出」距離関数については、代表的論客である Färe や Russell (Färe and Primont (1995), Russell (1998) 等) を始め  $D^0(x, y, T) := \inf\{\theta \in R_+ \mid (x, y/\theta)$

$\in T$ ) という定義を採用する立場が支配的なようだが、「距離」のニュアンスを重視するなら本稿の定義の方が適切であろう。どちらの定義を採用しても意味を取り違えなければよいのだが、注意が必要である。たとえば、Sickles and Zelenyuk (2019) は好著だが、そこでは産出効率性は数値が小さい方が効率的となるように定義されていて強い違和感が残る。ちなみに、Shephard (1970) は専ら投入距離関数を扱っており、Hackman and Russell (1995) は本稿と同じ定義を採用している。

- 4) 本節における定理3の証明は拙稿(2011)のそれに準拠しているが、証明の修正や定理4に関する加筆等も行っている。
- 5) Russell and Schworm は効率性指標の同時連続性を証明したと主張しているが、「 $x^k \rightarrow x$ かつ  $T^k \rightarrow T$ なら  $P^k(x^k) \rightarrow P(x)$ 」という誤った推論(括弧内は自明に成立するわけではない joint continuity を要求するものである!)に基づいて証明を展開しているので、修正が必要である。 $T^k = T$ だが、 $P$ が $x$ で劣半連続ではなく「外割れ」するとき  $P^k(x^k) \rightarrow P(x)$ とはならない。

#### 数学記号注

$\Rightarrow$ : 論理的含意(「ならば」),  $\Leftrightarrow$ : 論理的同値,  $\in$ : 元の集合への帰属,  $\forall$ : 全称量子(すべての),  $\exists$ : 存在量子(ある),  $int(\cdot)$ : 集合の内部,  $\partial(\cdot)$ : 集合の境界,  $Li(T^k)$ : 集合列  $T^k$  の位相的下極限,  $Ls(T^k)$ : 集合列  $T^k$  の位相的上極限,  $\text{Lim}(T^k)$ : 集合列  $T^k$  の位相的極限(Klein and Thompson (1984) 参照),  $R_+^n$ : 非負実数半直線の  $n$  重積 ( $n$  次元ユークリッド空間の非負象限),  $x \leq u \Leftrightarrow x_i \leq u_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $x < u \Leftrightarrow x_i < u_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $x <^* u \Leftrightarrow x_i < u_i$  or  $x_i = u_i = 0$  for all  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $(x, y) <^P(u, v) \Leftrightarrow (x, v) < (u, y)$  等々とする。

#### 参考文献

Aubin, J.-P. (1991), *Viability Theory*, Birkhauser  
 Briec, W. (1998), "Hölder Distance Function and Measurement of Technical Efficiency," *Journal of Productivity Analysis* 11, 111-131.  
 Caves, D.W., L.R.Christensen and W.E.Diewert (1982), "The Economic Theory of Index Numbers and the Measurement of Input, Output and Productivity," *Econometrica* 50, 1393-1414.  
 Chambers, R., Y.Chung and R.Färe (1995), "Benefit and Distance Functions," *Journal of Economic Theory* 70, 407-419.  
 Charnes, A., W.Cooper and E.Rhodes (1978), "Measuring the Efficiency of Decision Making Units," *European Journal of Operational Research* 2, 429-444.

Charnes, A., W.Cooper, B.Golany, L.Seiford and J.Stutz (1985), "Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions," *Journal of Econometrics* 30, 91-107.  
 Chavas, J.-P. and T.L.Cox (1999), "A Generalized Distance Function and the Analysis of Production Efficiency," *Southern Economic Journal* 66, 294-318.  
 Debreu G. (1951), "The Coefficient of Resource Utilization," *Econometrica* 19, 273-292.  
 Färe, R. and C.A.K.Lovell (1978), "Measuring the Technical Efficiency of Production," *Journal of Economic Theory* 19, 150-162.  
 Färe, R. and S.Grosskopf (1983), "Measuring Congestion in Production," *Zeitschrift für Nationalökonomie* 43, 257-271.  
 Färe, R., S.Grosskopf and C.A.K.Lovell (1985), *The Measurement of Efficiency of Production*, Kluwer-Nijhoff  
 Färe, R., S. Grosskopf and R.R.Russell (eds.) (1998), *Index Numbers: Essays in Honour of Sten Malmquist*, Springer  
 Färe, R. and B.McGough (2010), "Continuity of Inefficiency Indexes: New Findings," [http://people.oregonstate.edu/~mcgoughb/Cont\\_neff\\_ind\\_13July2010.pdf](http://people.oregonstate.edu/~mcgoughb/Cont_neff_ind_13July2010.pdf)  
 Färe, R. and D.Primont (1995), *Multi-Output Production and Duality: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers  
 Farrell, M.J. (1957), "The Measurement of Productive Efficiency," *Journal of the Royal Statistical Society, Series A* 120, 253-290.  
 Fried, H., C.A.K. Lovell and S. Schmidt (eds.) (2008), *The Measurement of Productive Efficiency and Productivity Change*, Oxford University Press  
 Hackman, S.T. and R.R.Russell (1995), "Duality and Continuity," *Journal of Productivity Analysis* 6, 99-116.  
 Khan, A.A., C.Tammer and C.Zalinescu (2015), *Set-Valued Optimization; An Introduction with Applications*, Springer  
 Klein, E. and A.C.Thompson (1984), *Theory of Correspondences*, John Wiley and Sons  
 Lucchetti, R. (2006), *Covexity and Well-Posed Problems*, Springer  
 Malmquist, S. (1953), "Index Numbers and Indifference Surfaces," *Trabajos des Estadística* 4 (2), 209-242.  
 Matheron, G. (1975), *Random Sets and Integral Geometry*, John Wiley and Sons  
 Russell, R.R. (1985), "Measures of Technical Efficiency," *Journal of Economic Theory* 35, 109-126.  
 Russell, R.R. (1990), "Continuity of Measures of Technical Efficiency," *Journal of Economic Theory* 51, 255-267.  
 Russell, R.R. (1998), "Distance Functions in Consumer and Producer Theory," in Färe, R. et al. eds., pp. 7-90.  
 Russell, R.R. and W.Schworm (2009), "Axiomatic Foundations of Efficiency Measurement on Data-Generating Technologies," *Journal of Productivity Analysis* 31, 77-86.  
 Russell, R.R. and W.Schworm (2011), "Properties of Inefficiency Indexes on <input, output> space," *Journal of Productivity Analysis* 36, 143-156.  
 Shephard, R.W. (1953), *Cost and Production Functions*, Princeton University Press  
 Shephard, R.W. (1970), *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton University Press

Sickles, R.C. and V.Zelenyuk (2019), *Measurement of Productivity and Efficiency: Theory and Practice*, Cambridge University Press

伊藤成康 (2011), “投入／産出距離関数の連続性について,” 武蔵大学論集第 59 巻 129-138.