

自己相似過程と対数株価の自己相似性について

隅田誠^{*1}

^{*1} 武藏大学大学院経済学研究科博士後期課程 〒176-8534 東京都練馬区豊玉上 1-26-1

目次

1	はじめに	1
2	自己相似過程の金融市場への応用	1
3	自己相似過程	2
4	非整数ブラウン運動	4
4.1	ブラウン運動	4
4.2	非整数ブラウン運動	7
4.3	非整数ブラウン運動の増分の自己相関関数	9
4.4	非整数ブラウン運動の増分のパワースペクトル密度	12
5	非整数安定過程	21
5.1	安定過程	21
5.2	非整数安定過程	28
5.3	多変量安定分布	30
6	非整数階積分による表現	35
6.1	非整数階積分	35
6.2	自己相似過程の積分表示	38
7	フラクタル次元	45
7.1	ボックス次元とハウスドルフ次元	45
8	パラメータの推定	52
8.1	安定分布のパラメータの推定	52
8.2	ハースト指数の推定	55
8.3	フラクタル次元の推定	70
9	ARFIMA モデルとの比較	83
10	使用データ	88
11	日経平均株価を用いた分析	98
11.1	安定分布のパラメータの推定	98
11.2	ハースト指数の推定	101
11.3	フラクタル次元の推定	104
11.4	推定値の推移	107
12	業種別日経平均を用いた分析	115
13	各国の株価指數を用いた分析	123
14	秒間隔データを用いた分析	130
15	対数株価の絶対値を用いた分析	132

1 はじめに

株価の変動を確率過程としてモデル化する際には、幾何ブラウン運動が採用されることが多い。これは、その対数増分が独立に同一の正規分布に従うという非常に望ましい性質をもっているためであり、また、そのような仮定をおくことは効率的市場仮説や投資家の効用関数に関する仮定などによって正当化される。この正規分布に従うという性質は、その分散が存在して、投資のリスクをそれによって評価することを妥当なものにしており、独立であるという性質は通常の統計的分析の適用を可能にしている。しかし、実際の株価の変動からは、それが幾何ブラウン運動に従うことを支持しない結果が得られる。幾何ブラウン運動とは、その対数がブラウン運動の定数倍と時間の1次関数の和によって表されるような確率過程であるが、本稿ではこのブラウン運動の代わりに他の自己相似過程を当てはめ、実際の株価指数のデータがどのような自己相似過程によって近似されるかを検証する。

ブラウン運動は自己相似過程の中でも非常に特殊な例であり、その独立増分性と正規性が幾何ブラウン運動の望ましい性質を与えていた。自己相似過程には、独立増分でないものや正規分布に従わないものが多く存在するが、ブラウン運動の代わりにそのような確率過程を用いることで、実際のデータの特徴をよりよく捉えたモデルが得られることが期待される。しかし、独立増分でない自己相似過程の増分の自己相関構造や正規分布に従わない自己相似過程が従う分布は、いずれも特異な性質をもっている。ときに自己相似過程の増分は長期記憶とよばれる非常に減衰の遅い自己相関関数をもち、また、自己相似過程が従う分布はファットテールとよばれる極めて厚い裾をもつことがある。そのため、本稿では、そのように特殊な性質をもつ自己相似過程の定義や特徴を整理することからはじめ、その後に実際のデータを用いて自己相似過程を特定するためのパラメータの推定を行う。元の時系列が自己相似過程に従うならば、そのパラメータによって増分の自己相関構造や、分布の特徴が定まることになる。

推定対象のデータは株価指数の対数であり、主に日経平均株価を中心に分析するが、その他にも業種別日経平均や、各国を代表する株価指数、そしてTOPIXの秒間隔データを用いて推定を行う。データの詳細については後述するが、TOPIXの秒間隔データ以外は日次データであり、それぞれ約70年間、47年間、17年間、9年間のデータを用いる。それらに対するパラメータの推定方法の一部や、自己相似過程の性質を確認するために必要な数値積分や乱数生成等においては、その精度が計算環境に依存する点が多くある。それらの計算はすべてR言語(ver. 3.6.1)を用いて行っており、そのような問題が懸念される計算においては具体的にどの関数を用いているかを明記していくこととする。

2 自己相似過程の金融市場への応用

ブラウン運動が花粉に含まれる微粒子に関する研究において発見されたように、また、後述するR/S分析とよばれる自己相似過程のパラメータの推定方法がナイル川の水位に関する研究において開発されたように、自己相似過程に関する研究は自然現象を表現する際に応用されることが多い。また、近年では、Laskin, Lambadaris, Harmantzis and Devetsikiotis(2001)のように、ネットワークトライアフィックの分析に対してもしばしば応用されている。しかし、経済現象への応用も古くから盛んであり、自己相似過程の代表的な例である非整数ブラウン運動の積分表示を導入したMandelbrot and van Ness(1968)でも既に経済現象との関連が示唆されているほか、Mandelbrot(1963)では価格変動等の経済現象を表すためには自己相似過程が従うような裾が厚く無限大の分散をもつ分布を用いる必要があることが指摘されている。マンデルブロ集合の研究で広く知られるフランスの数学者Benoit B. Mandelbrotは、自身が生み出した「フラクタル」という特定の病的な集合を一般化した概念に関する幾何学的な研究の応用として、Mandelbrot and Hudson(2008)等にまとめられているように、金融市場をこのフラクタル幾何学の視点からみた分析を長年続けてきた。自己相似過程のグラフはフラクタルの典型的な例であるが、そもそも彼によるフラクタルの研究自体、金融市場で記録された価格のグラフ

と自然界で生じる複雑な現象を表したグラフの図形的な類似性の発見に端を発しており、フラクタル幾何学と金融市場は古くから密接な関係にあったといえる。

ボストンの投資会社 PanAgora Asset Management のアセットマネージャーであった Edgar E. Peters も自己相似過程やフラクタル幾何学を金融市場に応用した研究を行っており、Peters (1989) では R/S 分析を用いて S&P500 が長期記憶とよばれる自己相似過程に特有の強い自己相関構造を示すことを指摘している。しかし、彼は結果的に生じた株価変動のフラクタルとしての性質に関する分析だけでなく、そのような系列を生む原因を金融市場の構造に求め、Peters (1994) においてフラクタル市場仮説 (FMH, Fractal Market Hypothesis) とよばれる仮説を提案している。それは株価変動が長期記憶を示す理由を説明するものであり、それが投資視野 (investment horizon) の多様性に起因するものであると主張している。Peters (1994) によれば、短期投資家のように投資視野の短い投資家ほど些細なイベントにも敏感に反応するため、そのイベントが与える影響は短期投資家の行動から始まり、その行動による株価の変動が短期投資家よりも投資視野の長い投資家の行動に影響を与え、同様にして順々に長期投資家の行動へと波及していくという。その結果として、そのイベントがもつ情報が直ちに株価に反映されることではなく、株価の変動に自己相関を生じさせながら徐々に反映されていくとしている。ただし、これは必ずしも株価変動が自己相似過程に従うことを主張するものではなく、同様に過去への強い依存性を生じさせる非線形力学との関係を示唆するものもあり、Peters (1991) や Peters (1996) では、リアプノフ指数の推定や Takens の埋め込み定理に基づく相関次元の計算など、カオス理論を中心とした分析が行われている。

また、フラクタル市場仮説では、投資家の投資視野の多様性が流動的な取引を生んでいると主張される。すなわち、特定のイベントに対する反応が投資視野によって異なるため、取引が成立しやすくなるというのである。そして、そのイベントの影響が徐々に株価に反映されることで、急激な変動が避けられているとも述べ、長期記憶を示す状況を望ましい状態であるとしている。さらに、大きなイベントの直後などは長期的な予測が困難になることで、長期投資家も短期的な視点を重視するようになり、投資視野の多様性が失われ、長期記憶を示さなくなるだろうと主張している。そのことから、近年でも Anderson and Noss (2013) のように金融市場の安定性や金融危機との関係に重点を置いた議論がなされている。

3 自己相似過程

本稿は株価の変動を自己相似過程としてモデル化し、適当なパラメータを推定することを主旨としているが、まずはその定義や性質を整理することからはじめる。ただし、ここで自己相似過程に従うことを仮定するものは株価の変動そのものではなく、時点 t における株価を $S(t)$ としたとき、ある定数 μ と $\sigma > 0$ を用いて、

$$\ln(S(t)) - \ln(S(0)) = \mu t + \sigma X(t) \quad (1)$$

として得られる過程 $X(t)$ である。ここで、定数 σ を用いたのは、スケールが異なるだけの自己相似過程を同一視するためであり、 μt の項を $X(t)$ に含めないのは、以下に述べる自己相似過程の定義から、自己相似過程は一部の例外を除いて任意の時点 t において期待値が 0 でなければならないためである。株価の対数増分は連続複利表示の変化率にあたり、その期待値は一般に 0 ではない。通常仮定される幾何ブラウン運動はこの $X(t)$ がブラウン運動であるような確率過程である。

定義 1(自己相似過程). $[0, \infty)$ または $\{0, 1, 2, \dots\}$ で添字付けられた確率過程 $X(t)$ について¹、確率 1 で $X(0) = 0$ であり、なおかつ、ある定数 $H > 0$ が存在して、任意の $t > 0$ に対して、

$$X(t) \stackrel{d}{=} t^H X(1) \quad (2)$$

¹ $X(t)$ が添字集合 I で添字付けられた確率過程であるとは、任意の $t \in I$ に対して、 $X(t)$ が確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上の確率変数、すなわち、 Ω から \mathbb{R} への可測関数であることをいう。したがって、本来、 $X(t)$ は添字 $t \in I$ と標本点 $\omega \in \Omega$ の関数として $X(t, \omega)$ のように表すべきであるが、本文では省略する。また、とくに断りがない限り、添字集合 I は時間を表す非負実数 $[0, \infty)$ であるものとする。

を満たすとき, $X(t)$ は自己相似過程 (self-similar process) であるといい², このときの定数 H をスケーリング指数という. ただし, $\stackrel{d}{=}$ は両辺の確率変数が同一の分布に従うことを示すものとする. とくに, $X(t)$ が自己相似過程であり, なおかつ定常増分であるとき, すなわち, 任意の $t, s \geq 0$ と $h > 0$ に対して,

$$X(t+h) - X(t) \stackrel{d}{=} X(s+h) - X(s)$$

を満たすとき, $X(t)$ は H -sssi (Self-Similar and Stationary Increments) であるという.

この定義における「確率 1 で $X(0) = 0$ 」という条件は, 文献によっては明示しないことがある. 実際, 確率過程 $X(t)$ が定数 $H > 0$ に対して式 (2) の条件を満たすならば, 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{t \rightarrow 0} P(|X(t)| > \epsilon) = \lim_{t \rightarrow 0} P\left(t^H |X(1)| > \epsilon\right) = \lim_{t \rightarrow 0} P\left(|X(1)| > t^{-H}\epsilon\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} P(|X(1)| > x) = 0 \quad (3)$$

であるから, 確率 1 で $t \rightarrow 0$ のとき $X(t) \rightarrow 0$ である. したがって, たとえば, 「確率 1 で $X(t)$ の見本関数は càdlàg である」という条件, すなわち, 「 $X(t)$ の見本関数が右連続かつ左極限をもつ確率が 1 である」という条件を追加すれば, 「確率 1 で $X(0) = 0$ 」という条件は式 (2) が含意するものとなる. 反対に, 「確率 1 で $X(0) = 0$ 」という条件は $X(t)$ が H -sssi であるときに「確率 1 で $X(t)$ の見本関数は càdlàg である」という性質を与える. また, 確率過程 $X(t)$ が自己相似過程であるならば, 任意の $t \geq 0$ と $c > 0$ に対して $X(ct) \stackrel{d}{=} (ct)^H X(1)$ かつ $c^H X(t) \stackrel{d}{=} (ct)^H X(1)$ であるから, 式 (2) は $X(ct) \stackrel{d}{=} c^H X(t)$ であることを含意している. 反対に, $t = 1$ と選べば式 (2) に等しくなるため, この関係を条件として自己相似過程を定義することも多い.

広く分析の対象にされている自己相似過程は, そのほとんどが定常増分性を満たすもの, すなわち H -sssi であるものであり, 本稿で扱う自己相似過程もその範囲内のものである. 明らかに, 確率過程 $X(t)$ が H -sssi ならば, 任意の $t \geq 0$ と $h > 0$ に対して,

$$X(t+h) - X(t) \stackrel{d}{=} X(h) - X(0) \stackrel{d}{=} X(h) \stackrel{d}{=} h^H X(1)$$

である. したがって, 式 (3) と同様に, 任意の $t \geq 0$ と $\epsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{h \rightarrow 0} P(|X(t+h) - X(t)| > \epsilon) = \lim_{h \rightarrow 0} P(|X(h)| > \epsilon) = 0$$

となる. このことは確率過程 $X(t)$ が H -sssi であるならば, それが確率連続であることを示す. 反対に, 定常増分かつ確率連続な確率過程 $X(t)$ が定数 $H \leq 0$ に対して式 (2) の条件を満たすならば, $X(t)$ は退化分布に従わなければならない. なぜならば, 0 に収束する任意の狭義単調減少列 $\{h_i\}$ に対して, $i < j$ ならば $h_i^{-H} \geq h_j^{-H}$ であるから, 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$P(|X(t+h_i) - X(t)| > \epsilon) = P(|X(h_i)| > \epsilon) = P\left(|X(1)| > h_i^{-H}\epsilon\right)$$

は i に関して広義単調増加であるが, 一方で, $X(t)$ は確率連続であるから, これが 0 に収束しなければならないためである. つまり, 如何なる $x > 0$ に対しても $P(|X(t)| > x) = 0$ でなければならない. また, H -sssi という条件は, スケーリング指数の上限について, 次のように一定の条件を与えることになる.

定理 2. 確率過程 $X(t)$ が H -sssi かつ $0 < E[|X(1)|] < \infty$ ならば, $H \leq 1$ である.

証明. $X(t)$ の定常増分性と三角不等式より,

$$E[|X(2)|] \leq E[|X(2) - X(1)|] + E[|X(1)|] = 2E[|X(1)|]$$

² 自己相似過程に関する初期の研究である Mandelbrot and van Ness (1968) では自己相似過程のことを自己アフィン過程 (self-affine process) とよんでいる. これはそのグラフが相似変換に対して必ずしも統計的性質を維持しないためである. つまり, スケーリング指数が $H \neq 1$ の自己相似過程のグラフに関して, 時間と値の両方を h 倍する操作はその統計的性質を変化させてしまう. 時間を h 倍したときにグラフの統計的性質を等しくするためにには値を h^H 倍しなければならない. そのような変換はアフィン変換ではあるが相似変換ではない.

であるが、一方で、 $X(t)$ は自己相似過程であるから、

$$E[|X(2)|] = 2^H E[|X(1)|]$$

である。したがって、

$$2^H E[|X(1)|] \leq 2E[|X(1)|]$$

であり、 $0 < E[|X(1)|] < \infty$ であるから、 $H \leq 1$ を得る。 \square

これと同様の方法により、 $X(t)$ の期待値についても、 H -sssi という条件により次のような制限が与えられる。これが式(1)において $X(t)$ に μt の項を含めなかつた理由である。

定理 3. 確率過程 $X(t)$ が H -sssi かつ $E[X(1)] \neq 0$ であるならば、 $H = 1$ である。

証明。 $X(t)$ の定常増分性と期待値の線形性より、

$$E[X(2)] = E[X(2) - X(1)] + E[X(1)] = 2E[X(1)]$$

であるが、一方で、 $X(t)$ は自己相似過程であるから、

$$E[X(2)] = 2^H E[X(1)]$$

である。したがって、

$$2^H E[X(1)] = 2E[X(1)]$$

であり、 $E[X(1)] \neq 0$ であるから、 $H = 1$ を得る。 \square

ただし、後述する安定過程のように、すべての H -sssi な確率過程に対して常に期待値が存在するとは限らない。しかし、期待値の代わりにコーシーの主値を用いれば同様のことがいえる。つまり、 H -sssi な確率過程は、 $H = 1$ でない限り、期待値ないしはコーシーの主値は 0 でなければならない。式(1)における μt の項は、 $X(t)$ の期待値ないしはコーシーの主値を 0 にするためのものである。

4 非整数ブラウン運動

4.1 ブラウン運動

ブラウン運動あるいはウィーナー過程はおそらく最も広く知られた自己相似過程である³。上にも述べたように、株価を確率過程としてモデル化する際には、ブラウン運動を用いることが多い。一般的に用いられるブラウン運動の定義を以下に与える。

定義 4 (ブラウン運動). $[0, \infty)$ で添字付けられた確率過程 $B(t)$ が以下の条件をすべて満たすとき、 $B(t)$ はブラウン運動 (Brownian motion) であるという。

- (1) 任意の $t, s \geq 0$ に対して、 $B(t) - B(s) \sim N(0, |t - s|)$ である。
- (2) 任意の $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ に対して、 $B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ は独立である。
- (3) 確率 1 で $B(t)$ は連続である。すなわち、 $B(t)$ の見本関数は確率 1 で連続である。
- (4) 確率 1 で $B(0) = 0$ である。

ただし、 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ は確率変数 X が平均 μ 分散 σ^2 の正規分布に従うことを示すものとする。

³ 本来、ブラウン運動とは、水中の花粉から溶け出した微粒子の運動を表すものであり、その厳密な数理モデルをウィーナー過程として、これらを明確に区別することがあるが、本文ではこれらを同一視し、厳密にはウィーナー過程とよばれるものを一貫してブラウン運動とよぶ。これは後述するブラウン運動の一般化である非整数ブラウン運動の名称と一貫性をもたせるためである。

ブラウン運動 $B(t)$ は後述する非整数ブラウン運動の特別なケースとして扱うことができるため、その詳細な性質については非整数ブラウン運動とあわせて述べるが、 $B(t)$ は明らかにスケーリング指数 $H = 1/2$ の自己相似過程であり、なおかつ $1/2$ -sssi であることがわかる。スケールの違いを除けば、 $B(t)$ は独立増分かつ有限な分散をもつ唯一の自己相似過程であり、自己相似過程の中では例外的に扱いやすい確率過程である。後述するように多くの自己相似過程は有限な分散が存在しないだけでなく、確率密度関数を閉形式で表すことさえもできない。

定義 4 は一般的に用いられるブラウン運動の定義であるが、この定義における (2) から (4) の条件は、条件 (1) が含意するものである。実際、条件 (1) から、任意の $0 \leq t_1 < t_2 < t_3$ に対して、

$$\text{Var}[B(t_3) - B(t_2)] + \text{Var}[B(t_2) - B(t_1)] = (t_3 - t_2) + (t_2 - t_1) = t_3 - t_1 = \text{Var}[B(t_3) - B(t_1)]$$

であるが、分散の性質より、

$$\text{Var}[B(t_3) - B(t_1)] = \text{Var}[B(t_3) - B(t_2)] + \text{Var}[B(t_2) - B(t_1)] + 2\text{Cov}[B(t_3) - B(t_2), B(t_2) - B(t_1)] \quad (4)$$

であるから、 $\text{Cov}[B(t_3) - B(t_2), B(t_2) - B(t_1)] = 0$ でなければならない。 $B(t)$ は正規分布に従うため、 $B(t_2) - B(t_1)$ と $B(t_3) - B(t_2)$ が無相関であることは、それらが独立であることを意味する。これは条件 (2) に等しい。次に条件 (3) についてであるが、これを示すためには Kolmogorov の連続性定理とよばれる確率過程の連続性に関する定理が有用である。しかし、この定理では確率過程の Hölder 連続性についても言及されるため、その定義を先に与えておく。

定義 5 (Hölder 連続)。 距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ と X から Y への関数 $f(x)$ に対して、ある定数 $0 < \gamma \leq 1$ と C が存在して、任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して、

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C d_X(x_1, x_2)^\gamma \quad (5)$$

を満たすとき、 $f(x)$ は指數 γ で一様 Hölder 連続 (uniformly γ -Hölder continuous) であるという。また、同様に、関数 $f(x)$ に対して、ある定数 $0 < \gamma \leq 1$ が存在して、任意の $x_0 \in X$ に対して $\epsilon_{x_0} > 0$ と C_{x_0} が存在し、 $x_1, x_2 \in X$ が $d_X(x_0, x_1), d_X(x_0, x_2) < \epsilon_{x_0}$ を満たすならば、

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C_{x_0} d_X(x_1, x_2)^\gamma \quad (6)$$

を満たすとき、 $f(x)$ は指數 γ で局所 Hölder 連続 (locally γ -Hölder continuous) であるという。

関数 $f(x)$ が局所 Hölder 連続であることは $f(x)$ が連続であることの十分条件であり、次に述べる Kolmogorov の連続性定理は確率過程が局所 Hölder 連続であるための十分条件を与えていている。

定理 6 (Kolmogorov の連続性定理)。 $[0, \infty)$ で添字付けられた確率過程 $X(t)$ について、ある定数 $\alpha, \beta, C > 0$ が存在して、任意の $t, s \geq 0$ に対して、

$$\mathbb{E}[|X(t) - X(s)|^\alpha] \leq C |t - s|^{1+\beta} \quad (7)$$

を満たすならば、 $X(t)$ と確率 1 で等しい確率過程 $Y(t)$ が存在して、 $Y(t)$ の見本関数は連続である。さらに、 $Y(t)$ の見本関数は任意の $0 < \gamma < \beta/\alpha$ に対して指數 γ で局所 Hölder 連続である。ただし、 $X(t)$ と $Y(t)$ が確率 1 で等しいとは、任意の $t \geq 0$ に対して $P(X(t) = Y(t)) = 1$ であることをいう。

証明。 詳しい証明は Bell (2015) 等を参照。ここでは、 $X(t)$ を $[0, 1]$ 内の 2 進有理数に制限した確率過程の見本関数が確率 1 で局所 Hölder 連続であることを示す。最終的には、2 進有理数でない点に対して右極限を対応させ、同様の方法で定義域を拡張し、さらに局所 Hölder 連続とならない確率 0 の事象に対して条件を満たす関数を対応させることで、 $X(t)$ と確率 1 で等しい確率過程 $Y(t)$ を得ることになる。まず、自然数 n に対して、間隔 2^{-n} でみた区間 $[0, 1]$ における $X(t)$ の増分の α 乗和を L_n とする。つまり、

$$L_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} |X(2^{-n}(k+1)) - X(2^{-n}k)|^\alpha$$

とおく. このとき, 式(7)の条件より, 任意の $0 < \gamma < \beta/\alpha$ に対して,

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\alpha\gamma} L_n\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\alpha\gamma} \sum_{k=0}^{2^n-1} E\left[|X(2^{-n}(k+1)) - X(2^{-n}k)|^\alpha\right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\alpha\gamma} \sum_{k=0}^{2^n-1} C |2^{-n}(k+1) - 2^{-n}k|^{1+\beta} \\ &= C \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\alpha\gamma} \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{-n-\eta\beta} = C \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(\beta-\alpha\gamma)} = \frac{C}{2^{\beta-\alpha\gamma}-1} < \infty \end{aligned}$$

である. これは $2^{n\alpha\gamma} L_n$ の和の期待値が収束することを示すが, そのためには $2^{n\alpha\gamma} L_n$ が 0 に収束しない確率が 0 でなければならない. つまり, 確率 1 で $n \rightarrow \infty$ のとき $2^{n\alpha\gamma} L_n \rightarrow 0$ である. したがって, 任意の $\epsilon > 0$ に対してある n_ϵ が存在して, 任意の $n \geq n_\epsilon$ に対して $2^{n\alpha\gamma} L_n < \epsilon$ となる確率が 1 である. L_n の総和の中身はすべて正であるから, そのいずれを選んでも $2^{-n\alpha\gamma}\epsilon$ 未満である. $\epsilon = 1$ と選べば, 任意の $n \geq n_1$ と $0 \leq k \leq 2^n - 1$ に対して,

$$|X(2^{-n}(k+1)) - X(2^{-n}k)| < 2^{-n\gamma}$$

である. これは $[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)]$ の形で表される区間にに対してのみ, その $X(t)$ の変動の上限を与える. 2進有理数 t, s を両端とする幅 2^{-n_1} 未満の任意の区間 $[s, t]$ に対しては, $m = 1 - \lceil \log_2(t-s) \rceil \geq n_1$ と選べば $2^{-m} \leq t-s \leq 2^{-m+1}$ であり, 各 $n \geq m$ に対して $[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)]$ の形で表される区間を高々 2 個ずつ適当に集めることで, その和集合として区間 $[s, t]$ を表すことができるため,

$$|X(t) - X(s)| < 2 \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n\gamma} = 2 \frac{2^{-m\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}} \leq \frac{2}{1 - 2^{-\gamma}} |t-s|^\gamma$$

である. これは確率 1 で $t-s < 2^{-n_1}$ に対して満たされ, そのとき $X(t)$ の $[0, 1]$ 内の 2 進有理数への制限が指數 γ で局所 Hölder 連続となっていることを示す. なお, n_1 は標本点に依存する. $X(t)$ が 2 進有理数上で局所 Hölder 連続であるならば, 2 進有理数でない点 t に対して 2 進有理数上における $X(t)$ の右極限が存在するが, もしそれが $X(t)$ に一致しない確率が 0 よりも大きいならば, t に十分近い 2 進有理数 s を選ぶことで式(7)が満たされなくなる. なお, 2 進有理数は稠密であるから t にいくらでも近い s をとることができる. したがって, 点 t に対して右極限を対応させることで得られた確率過程 $Y(t)$ は確率過程 $X(t)$ と確率 1 で等しい. □

この定理は確率過程 $X(t)$ に対して式(7)を満たすような定数 $\alpha, \beta, C > 0$ が存在するときに, 連続な確率過程 $Y(t)$ が存在することを保証するものであるが, それが $X(t)$ と確率 1 で等しいということは, $X(t)$ そのものが確率 1 で連続, さらには局所 Hölder 連続であるということを意味する. 定義 4 の条件(1)から, $B(t) - B(s)$ は平均 0 分散 $|t-s|$ の正規分布に従うが, 式(7)を満たすことを確認するためには, その絶対値の α 乗の期待値を求める必要がある. より一般に, 確率変数 X が平均 0 分散 σ^2 の正規分布に従うものとして考えると, X の確率密度関数 $f_X(x)$ は⁴,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

と与えられるから, 任意の $\text{Re}(a) > -1$ に対して,

$$\begin{aligned} E[|X|^\alpha] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) |x|^\alpha dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) x^\alpha dx \\ &= \sqrt{\frac{(2\sigma^2)^\alpha}{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-t) t^{\alpha/2-1/2} dt = \sqrt{\frac{(2\sigma^2)^\alpha}{\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

である. ここで, $\text{Re}(z)$ は複素数 z の実部を示す. また, $\Gamma(z)$ はガンマ関数であり,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt$$

⁴ 本稿では, 確率変数 X の確率密度関数を一貫して $f_X(x)$ と表すこととする.

である。したがって、定理 6において、たとえば $\alpha = 4, \beta = 1, C = 3$ とすれば、任意の $t, s \geq 0$ に対して、

$$E[|B(t) - B(s)|^\alpha] = \sqrt{\frac{(2|t-s|)^4}{\pi}} \Gamma\left(\frac{4+1}{2}\right) = \frac{4|t-s|^2}{\sqrt{\pi}} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = 3|t-s|^2 = C|t-s|^{1+\beta}$$

であり、式(7)が満たされる。ゆえに、 $B(t)$ は確率1で連続であり、条件(3)が得られる。最後に、条件(1)に加えて条件(3)を用いれば、式(3)と同様にして条件(4)が得られる。このように、定義4における(2)から(4)の条件は、条件(1)が含意するものであるが、通常はブラウン運動の定義に含めことが多い。

4.2 非整数ブラウン運動

非整数ブラウン運動は次のように定義されるブラウン運動の一般化であり、自己相似過程に特有の興味深い性質をもちながら、比較的分析が容易なため、しばしば取り上げられる。

定義7(非整数ブラウン運動). $[0, \infty)$ で添字付けられた確率過程 $B_H(t)$ について、あるパラメータ $0 < H < 1$ が存在して、以下の条件をすべて満たすとき、 $B_H(t)$ は非整数ブラウン運動(fractional Brownian motion)であるといい⁵、このときのパラメータ H をハースト指数(Hurst exponent)という⁶。

- (1) 任意の $t, s \geq 0$ に対して、 $B_H(t) - B_H(s) \sim N(0, |t-s|^{2H})$ である。
- (2) 確率1で $B_H(t)$ は連続である。
- (3) 確率1で $B_H(0) = 0$ である。

非整数ブラウン運動は Kolmogorov (1940) によって初めて導入されたが、そこでは Wiener spiral とよばれていた。fractional Brownian motion という名称は Mandelbrot and van Ness (1968) によって後述する積分形式での表現が与えられた際に用いられた。図1には非整数ブラウン運動の見本関数を示した。 H が小さいほどギザギザなグラフになっていることがわかる。そして、それをどれだけ拡大してもその複雑さが失われることがないというフラクタルの性質をもっていることも観察できる。通常のブラウン運動は増分の分散が時間に比例するようedefineされたが、非整数ブラウン運動はこの点に自由を与えている。この違いにより必然的に独立増分性は要求されなくなっている。明らかに $H = 1/2$ のとき、非整数ブラウン運動はブラウン運動に等しく、非整数ブラウン運動はこのときに限り独立増分である。非整数ブラウン運動 $B_H(t)$ の自己相似性は、正規分布の特性関数を用いれば次のように示せる。まず、確率変数 X が平均 μ 分散 σ^2 の正規分布に従うとき、 X の特性関数 $\phi_X(u)$ は⁷、

$$\phi_X(u) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + i\mu u\right)$$

であり、また、正規分布に限らず、 X が任意の確率変数であるとき、任意の定数 a に対して、 aX の特性関数 $\phi_{aX}(u)$ は $\phi_{aX}(u) = \phi_X(au)$ である。したがって、定義7の条件(1)より、任意の $t \geq 0$ に対して、

$$\phi_{B_H(t)}(u) = \exp\left(-\frac{1}{2}t^{2H}u^2\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}(t^H u)^2\right) = \phi_{B_H(1)}(t^H u) = \phi_{t^H B_H(1)}(u)$$

であり、 $B_H(t) \stackrel{d}{=} t^H B_H(1)$ である。つまり、 $B_H(t)$ はスケーリング指数 H の自己相似過程である。条件(1)より $B_H(t)$ は明らかに定常増分であるから、 $B_H(t)$ は H -sssi である。また、ブラウン運動の場合と同様に、定理

⁵ 「fractional Brownian motion」の訳として、松葉(2007)では「非整数ブラウン運動」を用い、熊谷(2002)では「フラクタルブラウン運動」を用いている。日本語の文献では「非整数ブラウン運動」と訳されることが多いが、パラメータ H は通常のブラウン運動に対しても $1/2$ であり整数ではない。また、ブラウン運動自体が代表的なフラクタルであり、フラクタルになるように拡張したブラウン運動であるということでもない。

⁶ 本来、ハースト指数は、その確率過程の自己相関関数やパワースペクトル密度の振る舞いを定めるパラメータであり、また、後述するR/S分析やDFA等によって得られる値を示すものである。したがって、必ずしも非整数ブラウン運動のパラメータだけに用いられる語ではない。非整数ブラウン運動 $B_H(t)$ に対してR/S分析やDFAを行うと、そのハースト指数が H となることが知られているため、 $B_H(t)$ をハースト指数 H の非整数ブラウン運動とよぶことが多いが、後述するように、非整数ブラウン運動においてはハースト指数とスケーリング指数が等しくなるため、 H は $B_H(t)$ のスケーリング指数である。

⁷ 本稿では、確率変数 X の特性関数を一貫して $\phi_X(u)$ と表すこととする。

6において $\alpha > 1/H, \beta = \alpha H - 1, C = \sqrt{2^\alpha/\pi} \Gamma((\alpha + 1)/2)$ とすれば、式(8)より、定義7の条件(1)だけを用いて、任意の $t, s \geq 0$ に対して、

$$E[|B_H(t) - B_H(s)|^\alpha] = E[|t - s|^H |B_H(1)|^\alpha] = |t - s|^{\alpha H} E[|B_H(1)|^\alpha] = C |t - s|^{\alpha H} = C |t - s|^{1+\beta} \quad (9)$$

であることが得られ、式(7)を満たすため、(2)と(3)の条件は条件(1)が含意するものであることがわかる。さらに、定理6から、 $B_H(t)$ の見本関数が確率1で連続であるだけでなく、任意の $0 < \gamma < H$ に対して指數 γ で局所 Hölder 連続であることも示される。つまり、いま、 $\beta = \alpha H - 1$ とっているから、定理6より、任意の $0 < \gamma < \beta/\alpha = (\alpha H - 1)/\alpha = H - 1/\alpha$ に対して指數 γ で局所 Hölder 連続であるが、 α はいくらでも大きく選べるため、 $0 < \gamma < H$ に対して指數 γ で局所 Hölder 連続であることになる。非整数ブラウン運動の見本関数が確率1で局所 Hölder 連続であるという性質は、後述するフラクタル次元の計算において、大きく役に立つ。

以下では非整数ブラウン運動の自己相関関数やパワースペクトル密度に関する重要な性質について述べていくが、これらは主に松葉(2007)や Biagini, Hu, Øksendal and Zhang (2008), Mishura (2008)を参考にしている。

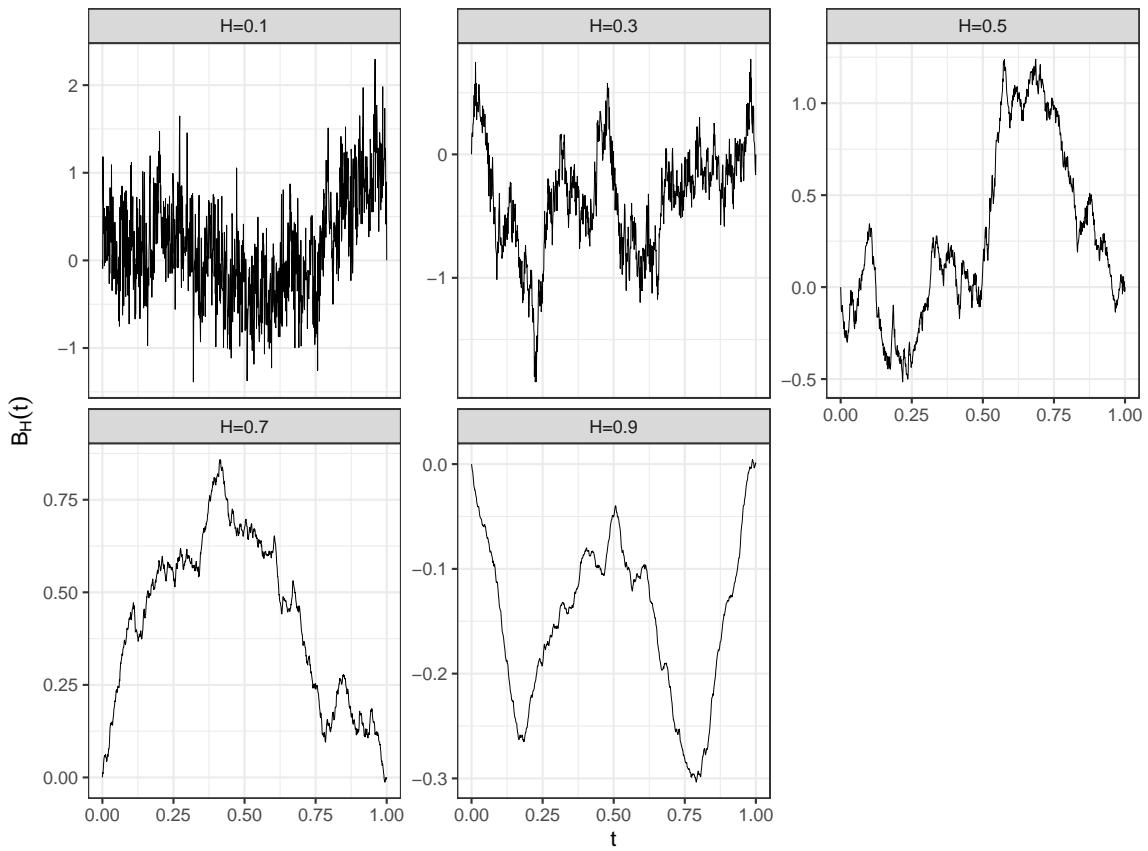


図1 非整数ブラウン運動の見本関数⁸

⁸ 非整数ブラウン運動に従う乱数の生成は arfima パッケージ (ver. 1.7-0) の arfima.sim 関数による。

4.3 非整数ブラウン運動の増分の自己相関関数

非整数ブラウン運動の最も興味深い性質は、その増分の自己相関関数にある。まず、定常過程 $X(t)$ の自己共分散関数と自己相関関数をそれぞれ $\gamma_X(\tau), \rho_X(\tau)$ と表すことにする。すなわち、 $E[X(t)] = \mu$ として、

$$\gamma_X(\tau) = E[(X(t + \tau) - \mu)(X(t) - \mu)] \quad (10)$$

$$\rho_X(\tau) = \frac{\gamma_X(\tau)}{\gamma_X(0)} \quad (11)$$

と定義する。このとき、 $X(t)$ は定常過程であると仮定しているため、 $\gamma_X(\tau), \rho_X(\tau)$ は t によらないし、いずれも偶関数である。また、以下では確率過程 $X(t)$ の時間間隔 h の増分の過程を $\Delta_h X(t) = X(t + h) - X(t)$ と表することにする。ただし、表記を簡略化するために、時間間隔 1 の増分の過程は $\Delta X(t)$ と表す。式(4)と同様の方法で、任意の $0 \leq t$ と $h > 0$ に対して、

$$Var[\Delta_{2h} B_H(t)] = Var[\Delta_h B_H(t + h)] + Var[\Delta_h B_H(t)] + 2Cov[\Delta_h B_H(t + h), \Delta_h B_H(t)]$$

であるから、

$$(2h)^{2H} = 2h^{2H} + 2Cov[\Delta_h B_H(t + h), \Delta_h B_H(t)]$$

であり、

$$Cov[\Delta_h B_H(t + h), \Delta_h B_H(t)] = h^{2H}(2^{2H-1} - 1)$$

を得る。つまり、 $\gamma_{\Delta_h B_H}(h) = h^{2H}(2^{2H-1} - 1)$ かつ $\rho_{\Delta_h B_H}(h) = 2^{2H-1} - 1$ である。 $\rho_{\Delta_h B_H}(h)$ が h によらないという性質が重要である。同様にして、すべての整数 k に対して $\rho_{\Delta_h B_H}(kh)$ を $k = 2$ から順々に定めていくことができるが、計算が煩雑になる。一般に非整数ブラウン運動の増分の自己相関関数 $\rho_{\Delta_h B_H}(\tau h)$ は次のように得られる。まず、

$$(B_H(t) - B_H(s))^2 = B_H(t)^2 + B_H(s)^2 - 2B_H(t)B_H(s)$$

であるから、定義 7 の条件(1)より、

$$E[B_H(t)B_H(s)] = \frac{1}{2}(E[B_H(t)^2] + E[B_H(s)^2] - E[(B_H(t) - B_H(s))^2]) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})$$

である。したがって、任意の $\tau \geq 0$ と $h > 0$ に対して、

$$\begin{aligned} \gamma_{\Delta_h B_H}(\tau h) &= E[\Delta_h B_H(t + \tau h)\Delta_h B_H(t)] = E[(B_H(t + \tau h + h) - B_H(t + \tau h))(B_H(t + h) - B_H(t))] \\ &= E[(B_H(\tau h + h) - B_H(\tau h))B_H(h)] = E[B_H(\tau h + h)B_H(h)] - E[B_H(\tau h)B_H(h)] \\ &= \frac{1}{2}((\tau h + h)^{2H} + h^{2H} - (\tau h)^{2H}) - \frac{1}{2}((\tau h)^{2H} + h^{2H} - |\tau h - h|^{2H}) \\ &= \frac{h^{2H}}{2}((\tau + 1)^{2H} - 2\tau^{2H} + |\tau - 1|^{2H}) \end{aligned}$$

であり、 $\gamma_{\Delta_h B_H}(\tau h)$ は偶関数であるから、任意の τ と $h > 0$ に対して、

$$\gamma_{\Delta_h B_H}(\tau h) = \gamma_{\Delta_h B_H}(|\tau| h) = \frac{h^{2H}}{2}((|\tau| + 1)^{2H} - 2|\tau|^{2H} + ||\tau| - 1|^{2H}) = \frac{h^{2H}}{2}(|\tau + 1|^{2H} - 2|\tau|^{2H} + |\tau - 1|^{2H}) \quad (12)$$

である。これを用いて、

$$\rho_{\Delta_h B_H}(\tau h) = \frac{1}{2}(|\tau + 1|^{2H} - 2|\tau|^{2H} + |\tau - 1|^{2H}) \quad (13)$$

が得られる。自己相関関数 $\rho_{\Delta_h B_H}(\tau h)$ は $\tau = 1$ の場合に限らず、常に h によらない。これが非整数ブラウン運動の大きな特徴である。したがって、とくに時間間隔が重要でない場合、非整数ブラウン運動の増分の自己相関関数を代表する関数として $\rho_{\Delta B_H}(\tau)$ を用いる。 $H < 1/2$ ならば、少なくとも $|\tau| \geq 1$ に対して $\rho_{\Delta B_H}(\tau) < 0$ であり、負の自己相関が生じ、 $H > 1/2$ ならばすべての τ に対して $\rho_{\Delta B_H}(\tau) > 0$ であり、常に正の自己相関が生

じることがわかる。そして、独立増分であるのは $H = 1/2$ である場合に限られる。 $\rho_{\Delta B_H}(\tau)$ のグラフを図 2 に示した。

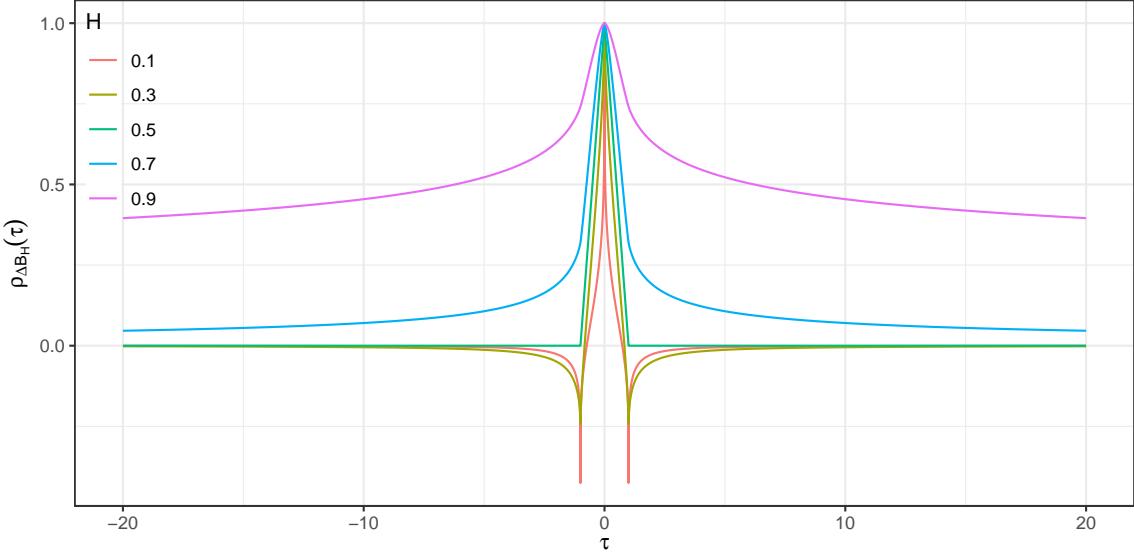


図 2 非整数ブラウン運動の増分の自己相関関数

$\rho_{\Delta B_H}(\tau)$ の興味深い特徴は、その和を計算することで観察できるが、その前に長期記憶と短期記憶とよばれる性質の定義を以下のように与えておく。

定義 8 (長期記憶と短期記憶). 定常過程 $X(t)$ について、自己相関関数 $\rho_X(\tau)$ が存在して、

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \rho_X(\tau) = \infty$$

であるとき、 $X(t)$ は長期記憶 (long-range dependence) であるといい、

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \rho_X(\tau) < \infty$$

であるとき、 $X(t)$ は短期記憶 (short-range dependence) であるという。

たとえば、ARMA モデルでは、その次数が有限である限り、短期記憶となる。例として定常な AR(1) モデルでは、自己回帰係数を $|\phi| < 1$ として $\rho_{\text{AR}(1)}(\tau) = \phi^{|\tau|}$ であるから、

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \rho_{\text{AR}(1)}(\tau) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \phi^{|\tau|} = \frac{1+\phi}{1-\phi} < \infty$$

であり、短期記憶となる。次数が大きい場合でも $\rho_{\text{ARMA}(p,q)}(\tau)$ は指数関数的に減衰するため、 $\rho_{\text{ARMA}(p,q)}(\tau)$ の和は収束する。一方で、非整数ブラウン運動の増分は $H > 1/2$ のとき長期記憶となることが知られており、後述する ARFIMA モデルと並び、長期記憶をもつ過程の好例としてしばしば取り上げられる。実際、

$$\sum_{\tau=-T}^T \rho_{\Delta B_H}(\tau) = \sum_{\tau=-T}^T \frac{1}{2} (|\tau+1|^{2H} - 2|\tau|^{2H} + |\tau-1|^{2H}) = (T+1)^{2H} - T^{2H}$$

であるから、

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \rho_{\Delta B_H}(\tau) = \begin{cases} \infty & (H > 1/2) \\ 1 & (H = 1/2) \\ 0 & (H < 1/2) \end{cases}$$

であり、 $\Delta B_H(t)$ は $H > 1/2$ ならば長期記憶、 $H \leq 1/2$ ならば短期記憶である。ただし、 $H = 1/2$ の場合には $|\tau| \geq 1$ に対して $\rho_{\Delta B_H}(\tau) = 0$ であり、短期記憶の定義にこのようなケースを除外することを明示することは少ないが、これを短期記憶とよぶことはほとんどない。

また、 $\rho_{\Delta B_H}(\tau)$ は幂乗則に従うことが知られている。非整数ブラウン運動のような自己相似過程を分析する上では、この自己相関関数の他にも、様々なところに幂乗則が現れる。そのため、まずその定義を述べておく。

定義 9 (幂乗則)。 実関数 $f(x)$ について、ある定数 s と $0 < |C| < \infty$ が存在して、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^s} = C \quad (14)$$

であるとき、 $f(x)$ は指数 s の幂乗則に従うといい、 $f(x) \sim Cx^s$ と表す。

たとえば、 $\gamma_{\Delta B_H}(0)$ を h の関数とみなせば、指数 $2H$ の幂乗則に従うことは明らかである。つまり、関数 $f(x)$ が指数 s の幂乗則に従うということは、十分大きな x に対して、 $f(x)$ が x の s 乗に比例することを意味する。したがって、幂乗則に従う関数のグラフを両対数グラフに描くと、 x が十分大きな範囲では線型になり、その傾きが s となる。本題の $\rho_{\Delta B_H}(\tau)$ では、 $H \neq 1/2$ のとき、指数 $2H - 2$ の幂乗則に従うことになる。実際、 $f(x) = x^{2H}$ とおけば、

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\rho_{\Delta B_H}(\tau)}{\tau^{2H-2}} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau^{2H-2}} \frac{1}{2} \left(|\tau + 1|^{2H} - 2|\tau|^{2H} + |\tau - 1|^{2H} \right) = \frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^2 \left(\left(1 + \frac{1}{\tau}\right)^{2H} - 2 + \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^{2H} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \left((1+h)^{2H} - 2 + (1-h)^{2H} \right) = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{h} (f(1+h) - f(1)) - \frac{1}{h} (f(1) - f(1-h)) \right) \\ &= \frac{1}{2} f^{(2)}(1) = H(2H-1) \end{aligned}$$

である。ここで、 $f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 次導関数を表す。したがって、 $H \neq 1/2$ のとき、

$$\rho_{\Delta B_H}(\tau) \sim H(2H-1)|\tau|^{2H-2} \quad (15)$$

である。 $H = 1/2$ の場合には $H(2H-1) = 0$ となるため、正確には幂乗則に従うとはいえない。つまり、非整数ブラウン運動の増分の自己相関関数は、指数関数的に減衰する ARMA モデルのような線形モデルに比べて遙かに遅く減衰し、このことが長期記憶という性質を与えている。 $\rho_{\Delta B_H}(\tau)$ が実際にこのように近似できることを図 3 に示した。図中の破線が式 (15) によって近似した値である。 τ が大きいとき十分よく近似されており、 $\tau = 10$ 付近ではほとんど見分けがつかなくなっている。

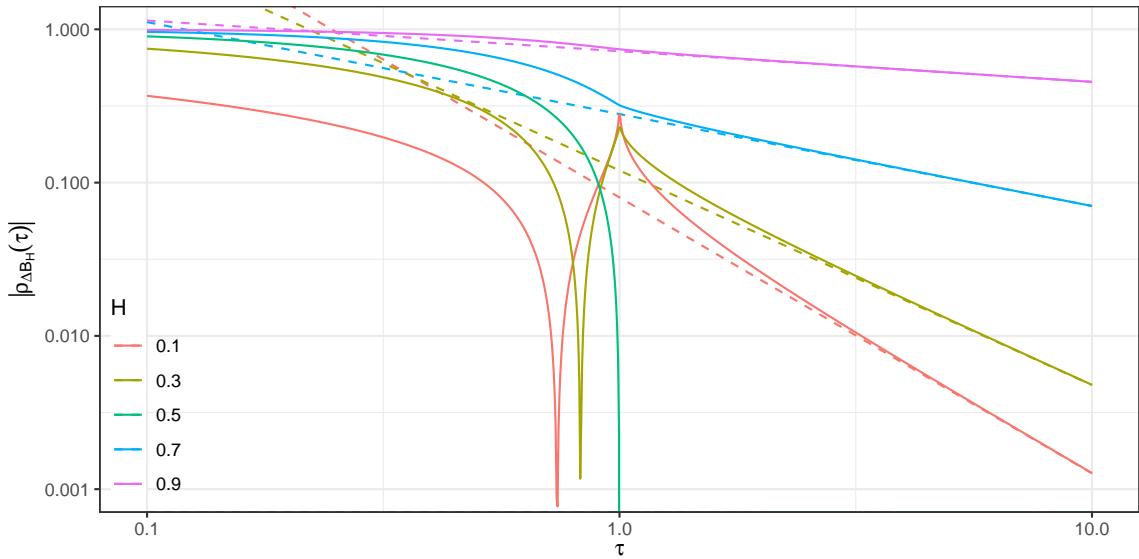


図 3 非整数ブラウン運動の増分の自己相関関数の幂乗則

4.4 非整数ブラウン運動の増分のパワースペクトル密度

非整数ブラウン運動には、増分の自己相関関数の他にも冪乗則に従うものが存在する。それは増分のパワースペクトル密度である。後述するように自己相関関数とパワースペクトル密度は密接な関係にある。そのことを示す前に、パワースペクトル密度とフーリエ変換の定義からはじめる。

定義 10 (フーリエ変換)。関数 $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt$$

を $f(t)$ のフーリエ変換 (CTFT, Continuous-Time Fourier Transform) といい、

$$P_f(\omega) = |\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)|^2 \quad (16)$$

を $f(t)$ のパワースペクトルという。また、関数 $F(\omega) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

を $F(\omega)$ のフーリエ逆変換という。

関数 $f(t)$ のフーリエ変換は、フーリエ逆変換によって元の関数 $f(t)$ に戻すことができる。つまり、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)\}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s) \exp(-i\omega s) ds \right) \exp(i\omega t) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega(t-s)) d\omega \right) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \mathcal{F}^{-1}\{1\}(t-s) ds \end{aligned}$$

であるが、

$$\mathcal{F}^{-1}\{1\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i}{2\pi T} (\exp(-iTt) - \exp(iTt)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin(Tt)}{\pi t} = \delta(t) \quad (17)$$

であるから、

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)\}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \delta(t-s) ds = f(t)$$

である。ここで、 $\delta(t)$ はディラックのデルタ関数である。すなわち、任意の連続関数 $f(t)$ に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad (18)$$

を満たすような超関数であるが、これを満たすためには $\delta(t)$ は $t = 0$ のとき $\delta(t) = \infty$ 、 $t \neq 0$ のとき $\delta(t) = 0$ であり、なおかつ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (19)$$

でなければならない。一方で、任意の $T > 0$ に対して、 $\sin(Tt)/(\pi t)$ は式 (19) を満たし、 $t = 0$ で T/π をとる。 $t \neq 0$ に対しては絶対値が高々 $1/|\pi t|$ であり、 $T \rightarrow \infty$ で式 (18) を満たすように収束するという点において、 $\delta(t)$ に近づく。

非整数ブラウン運動の増分のように無限の時間に対して定義される定常過程は、積分が収束しないためにフーリエ変換ができず、パワースペクトルを得ることができない。そのようなフーリエ変換可能でない定常過程ないしは関数に対しては、次のようにパワースペクトル密度が定義される。

定義 11 (パワースペクトル密度). $[0, \infty)$ で添字付けられた定常過程 $X(t)$ に対して,

$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} \left| \int_0^T X(t) \exp(-i\omega t) dt \right|^2 \right] \quad (20)$$

を $X(t)$ のパワースペクトル密度という.

ここでは $X(t)$ の添字集合を $[0, \infty)$ として定義したが, $(-\infty, \infty)$ を添字集合とするならば, $1/T$ の代わりに $1/(2T)$ を用いればよい. また, 確率過程でない通常のフーリエ変換可能でない関数に関しても同様に定義することができる. このパワースペクトル密度は自己共分散関数や自己相関関数と密接な関係にある. それを表したもののが後に示す Wiener-Khinchin の定理であり, これによってパワースペクトル密度の計算を容易に行うことができるようになる. しかし, それを示す前に, 相互相関関数に関するフーリエ変換の性質を述べておく必要がある.

定義 12 (相互相関関数). 関数 $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ と $g(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して,

$$(f(t) \star g(t))(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(t + \tau) dt \quad (21)$$

を $f(t)$ と $g(t)$ の相互相関関数という. ここで, \bar{z} は複素数 z の複素共役を示す.

たとえば, 定常過程 $X(t)$ が $E[X(t)] = 0$ であるならば, 確率過程 $X_T(t)$ を

$$X_T(t) = \begin{cases} X(t) & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (22)$$

と定義したとき,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (X_T(t) \star X_T(t))(\tau) = \gamma_X(\tau)$$

となることが期待されるが, これは必ずしも成り立たない. これが満たされたためには $X(t)$ が自己共分散関数に関してエルゴード的である必要がある. つまり, 時点をある点 t に固定したときの確率変数 $X(t)X(t + \tau)$ の期待値と, 確率点をある点 $\omega \in \Omega$ に固定したときに, 十分大きな T に対して時点 t を $[0, T]$ から等確率で選んだときの確率変数 $X(t)X(t + \tau)$ の期待値が等しくなければならないが, これは定常性によって保証される性質ではない. 一方で, $X(t)$ がエルゴード的であるならば, 式 (20)において期待値の演算は不要であり, 確率過程のエルゴード性を条件に入れることで, 期待値をとらずにパワースペクトル密度を定義する場合もある. そして, この相互相関関数のフーリエ変換は次のように与えられる.

定理 13 (相互相関定理). 関数 $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ と $g(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ について,

$$\mathcal{F}\{(f(t) \star g(t))(\tau)\}(\omega) = \overline{\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)} \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) \quad (23)$$

である.

証明. 相互相関関数に関して, $f(t)$ と $g(t)$ をフーリエ逆変換によって表せば,

$$\begin{aligned} (f(t) \star g(t))(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(t + \tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega_f) \exp(i\omega_f t) d\omega_f \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega_g) \exp(i\omega_g(t + \tau)) d\omega_g \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega_f)} \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega_g) \exp(i\omega_g \tau) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(\omega_g - \omega_f)t) dt \right) d\omega_f d\omega_g \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega_f)} \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega_g) \exp(i\omega_g \tau) \delta(\omega_g - \omega_f) d\omega_f d\omega_g \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)} \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) \exp(i\omega \tau) d\omega \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \overline{\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)} \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) \right\}(\tau) \end{aligned}$$

である。両辺をフーリエ変換することで式(23)を得る。 \square

相互相関定理の特別な例として、 $f(t) = g(t)$ とすれば、

$$\mathcal{F}\{(f(t) \star f(t))(\tau)\}(\omega) = P_f(\omega)$$

が得られる。ただし、これは関数 $f(t)$ がフーリエ変換可能な場合に成り立つものであり、上述のように定常過程は一般にフーリエ変換可能ではない。つまり、定常過程 $X(t)$ 同士の相互相関関数は収束しないし、そのフーリエ変換としてパワースペクトルを得ることもできない。しかし、この相互相関定理を利用して $X(t)$ の自己共分散関数からパワースペクトル密度を得ることができる。次の定理はそれを示すものである。

定理 14 (Wiener–Khinchin の定理). $[0, \infty)$ で添字付けられた定常過程 $X(t)$ について、 $E[X(t)] = 0$ ならば、

$$\mathcal{F}\{\gamma_X(\tau)\}(\omega) = S_X(\omega)$$

である。

証明. $X_T(t)$ を式(22)と同様に、 $0 \leq t \leq T$ のとき $X_T(t) = X(t)$ 、それ以外のとき $X_T(t) = 0$ と定める。 $X_T(t)$ が実数であることに注意すれば、定理 13 より、

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T X(t) \exp(-i\omega t) dt \right|^2 &= \overline{\mathcal{F}\{X_T(t)\}(\omega)} \mathcal{F}\{X_T(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{(X_T(t) \star X_T(t))(\tau)\}(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(t) X_T(t+\tau) \exp(-i\omega\tau) dt d\tau \\ &= \int_{-T}^T \exp(-i\omega\tau) \int_{\max\{0, -\tau\}}^{\min\{T, T-\tau\}} X(t) X(t+\tau) dt d\tau \end{aligned}$$

である。これを、式(20)に代入すれば、

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} \int_{-T}^T \exp(-i\omega\tau) \int_{\max\{0, -\tau\}}^{\min\{T, T-\tau\}} X(t) X(t+\tau) dt d\tau \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T \exp(-i\omega\tau) \int_{\max\{0, -\tau\}}^{\min\{T, T-\tau\}} \gamma_X(\tau) dt d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \exp(-i\omega\tau) \gamma_X(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega\tau) \gamma_X(\tau) d\tau = \mathcal{F}\{\gamma_X(\tau)\}(\omega) \end{aligned}$$

を得る。なお、2つ目の等号において $E[X(t)] = 0$ であることを用いている。 \square

これを用いれば、非整数ブラウン運動の増分 $\Delta_h B_H(t)$ のパワースペクトル密度を、その自己共分散関数のフーリエ変換として次のように得ることができる。まず、フーリエ変換の一般的な性質として、関数 $f(t)$ および定数 $a \neq 0$ と b に対して、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(at+b)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at+b) \exp(-i\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty \operatorname{sgn}(a)} f(s) \exp\left(-i\omega\left(\frac{s}{a} - \frac{b}{a}\right)\right) \frac{1}{a} ds \\ &= \exp\left(i\omega\frac{b}{a}\right) \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \exp\left(-i\frac{\omega}{a}s\right) ds = \exp\left(i\omega\frac{b}{a}\right) \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\{f(t)\}\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

であるから、式(12)を用いて、

$$S_{\Delta_h B_H}(\omega) = \mathcal{F}\{\gamma_{\Delta_h B_H}(\tau)\}(\omega) = h \mathcal{F}\{\gamma_{\Delta_h B_H}(\tau h)\}(\omega h) = h \mathcal{F}\left\{\frac{h^{2H}}{2} (|\tau+1|^{2H} - 2|\tau|^{2H} + |\tau-1|^{2H})\right\}(\omega h)$$

となる。ただし、 $\operatorname{sgn}(x)$ は符号関数である。フーリエ変換の線形性と式(24)を用いれば、

$$\begin{aligned}
S_{\Delta_h B_H}(\omega) &= h \mathcal{F} \left\{ \frac{h^{2H}}{2} (|\tau + 1|^{2H} - 2|\tau|^{2H} + |\tau - 1|^{2H}) \right\} (\omega h) \\
&= \frac{h^{2H+1}}{2} (\mathcal{F} \{|\tau + 1|^{2H}\} (\omega h) - 2\mathcal{F} \{|\tau|^{2H}\} (\omega h) + \mathcal{F} \{|\tau - 1|^{2H}\} (\omega h)) \\
&= \frac{h^{2H+1}}{2} (\exp(i\omega h) - 2 + \exp(-i\omega h)) \mathcal{F} \{|\tau|^{2H}\} (\omega h) \\
&= h^{2H+1} (\cos(\omega h) - 1) \mathcal{F} \{|\tau|^{2H}\} (\omega h)
\end{aligned}$$

である。 $|\tau|^{2H}$ が偶関数であることに注意すれば、

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \{|\tau|^{2H}\} (\omega h) &= \mathcal{F} \{|\tau|^{2H}\} (|\omega h|) = \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2H} \exp(-i|\omega h|\tau) d\tau \\
&= 2\operatorname{Re} \left(\int_0^{\infty} \tau^{2H} \exp(-i|\omega h|\tau) d\tau \right) = 2\operatorname{Re} \left(\int_0^{\infty} \left(\frac{t}{i|\omega h|} \right)^{2H} \exp(-t) \frac{1}{i|\omega h|} dt \right) \\
&= 2\operatorname{Re} \left(\left(\frac{1}{i|\omega h|} \right)^{2H+1} \right) \int_0^{\infty} t^{2H} \exp(-t) dt = 2\operatorname{Re}(i^{-2H-1}) |\omega h|^{-2H-1} \Gamma(2H+1) \\
&= -2 \sin(\pi H) |\omega h|^{-2H-1} \Gamma(2H+1)
\end{aligned} \tag{25}$$

であり、

$$S_{\Delta_h B_H}(\omega) = 2(1 - \cos(\omega h)) \sin(\pi H) \Gamma(2H+1) |\omega|^{-2H-1} \tag{26}$$

である。しかし、この $S_{\Delta_h B_H}(\omega)$ の結果は正しいものの、実際には式 (25) は $H < 0$ でしか収束しない。絶対値の十分大きな $x \in \mathbb{C}$ に対する（下）不完全ガンマ関数 $\gamma(z, x)$ の漸近的な振る舞いを

$$\gamma(z, x) = \int_0^x t^{z-1} \exp(-t) dt \approx \Gamma(z) - x^{z-1} \exp(-x) - x^{z-2} \exp(-x)(z-1) \tag{27}$$

と評価すれば⁹、式 (25) の積分区間を $[-T, T]$ から徐々に広げていったとき、評価すべき不完全ガンマ関数における x は純虚数となるから、 $H > 0$ では式 (25) の最右辺の値を中心に振動することがわかる。つまり、 $H > 0$ のとき関数 $|\tau|^{2H}$ はフーリエ変換可能でない。しかし、元々の関数 $\gamma_{\Delta_h B_H}(\tau h)$ はフーリエ変換可能であり、式 (27) の第 2, 3 項による振動が $\gamma_{\Delta_h B_H}(\tau h)$ を構成する 3 つの項同士で互いに打ち消し合うため、 $\Gamma(z) = \Gamma(2H+1)$ によって評価しても正しい結果が得られている。実際、この不完全ガンマ関数に関する評価を用いて $S_{\Delta_h B_H}(\omega)$ を詳しく計算していくと、

⁹ (下) 不完全ガンマ関数 $\gamma(z, x)$ は $|x|$ が十分大きいとき次のような漸近展開をもつ。

$$\gamma(z, x) \sim \Gamma(z) \left(1 - x^{z-1} \exp(-x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{-k}}{\Gamma(z-k)} \right)$$

ここで、 $\operatorname{Re}(x) = 0$ であるならば、 $\operatorname{Re}(z-1-k) < 0$ に対して $|x| \rightarrow \infty$ で $|x^{z-1-k} \exp(-x)| \rightarrow 0$ であるから、誤差が 0 に近づくようになるためには $k \leq \operatorname{Re}(z-1)$ の項まで計算すればよい。 $S_{\Delta_h B_H}(\omega)$ の計算では $z = 2H+1$ とすることになり、 $0 < H < 1$ であるから $0 < \operatorname{Re}(z-1) < 2$ であるため、式 (27) では $k = 1$ までの項によって評価している。

$$\begin{aligned}
S_{\Delta_h B_H}(\omega) &= h \mathcal{F} \left\{ \frac{h^{2H}}{2} (|\tau + 1|^{2H} - 2|\tau|^{2H} + |\tau - 1|^{2H}) \right\} (\omega h) \\
&= h^{2H+1} \lim_{T \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left(\int_0^T (|\tau + 1|^{2H} - 2|\tau|^{2H} + |\tau - 1|^{2H}) \exp(-i|\omega h|\tau) d\tau \right) \\
&= h^{2H+1} \operatorname{Re} \left(-\exp(i|\omega h|) \int_0^1 \tau^{2H} \exp(-i|\omega h|\tau) d\tau + \exp(-i|\omega h|) \int_0^1 \tau^{2H} \exp(i|\omega h|\tau) d\tau \right) \\
&\quad + h^{2H+1} \lim_{T \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left(\exp(i|\omega h|) \int_0^{T+1} \tau^{2H} \exp(-i|\omega h|\tau) d\tau - 2 \int_0^T \tau^{2H} \exp(-i|\omega h|\tau) d\tau \right. \\
&\quad \left. + \exp(-i|\omega h|) \int_0^{T-1} \tau^{2H} \exp(-i|\omega h|\tau) d\tau \right) \\
&= h^{2H+1} \operatorname{Re} \left(-\exp(i|\omega h|) \int_0^1 \tau^{2H} \exp(-i|\omega h|\tau) d\tau + \overline{\exp(i|\omega h|)} \int_0^1 \tau^{2H} \exp(-i|\omega h|\tau) d\tau \right) \\
&\quad + |\omega|^{-2H-1} \lim_{T \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left(i^{-2H-1} \left(\exp(i|\omega h|) \int_0^{(T+1)|\omega h|i} t^{2H} \exp(-t) dt - 2 \int_0^{T|\omega h|i} t^{2H} \exp(-t) dt \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \exp(-i|\omega h|) \int_0^{(T-1)|\omega h|i} t^{2H} \exp(-t) dt \right) \right) \\
&= |\omega|^{-2H-1} \Gamma(2H+1) \operatorname{Re} \left(i^{-2H-1} (\exp(i|\omega h|) - 2 + \exp(-i|\omega h|)) \right) \\
&\quad - |\omega|^{-2H-1} \lim_{T \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left(i^{-2H-1} \left(\exp(i|\omega h|) ((T+1)|\omega h|i)^{2H} \exp(-(T+1)|\omega h|i) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2(T|\omega h|i)^{2H} \exp(-T|\omega h|i) + \exp(-i|\omega h|)((T-1)|\omega h|i)^{2H} \exp(-(T-1)|\omega h|i) \right) \right) \\
&\quad - |\omega|^{-2H-1} 2H \lim_{T \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left(i^{-2H-1} \left(\exp(i|\omega h|)((T+1)|\omega h|i)^{2H-1} \exp(-(T+1)|\omega h|i) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2(T|\omega h|i)^{2H-1} \exp(-T|\omega h|i) + \exp(-i|\omega h|)((T-1)|\omega h|i)^{2H-1} \exp(-(T-1)|\omega h|i) \right) \right) \\
&= |\omega|^{-2H-1} \Gamma(2H+1) 2(\cos(\omega h) - 1) \operatorname{Re} \left(\exp \left(-i\pi \left(H + \frac{1}{2} \right) \right) \right) \\
&\quad - h^{2H} |\omega|^{-1} \lim_{T \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left(i^{-1} \exp(-T|\omega h|i) ((T+1)^{2H} - 2T^{2H} + (T-1)^{2H}) \right) \\
&\quad - h^{2H-1} |\omega|^{-2} 2H \lim_{T \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left(i^{-2} \exp(-T|\omega h|i) ((T+1)^{2H-1} - 2T^{2H-1} + (T-1)^{2H-1}) \right) \\
&= 2(1 - \cos(\omega h)) \sin(\pi H) \Gamma(2H+1) |\omega|^{-2H-1}
\end{aligned}$$

となり、式(26)と同じ結果が得られる。図4には $h = 1$ のときのこの関数の振る舞いを示した。図中の濃い実線が $S_{\Delta B_H}(\omega)$ であり、薄い実線は後に述べる離散時間フーリエ変換である。

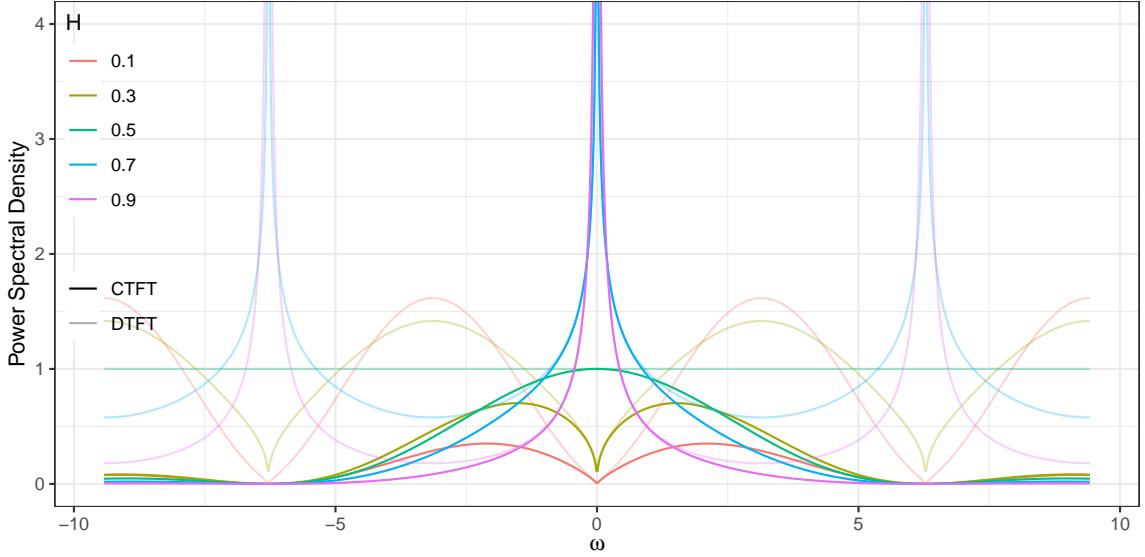


図 4 非整数ブラウン運動の増分のパワースペクトル密度¹⁰

この結果から, $S_{\Delta_h B_H}(\omega)$ は幕乗則に従うことが期待される. しかし, 厳密には定義 9 の意味で幕乗則に従うとはいえない. なぜならば,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{S_{\Delta_h B_H}(\omega)}{\omega^{-2H-1-s}} = 2 \sin(\pi H) \Gamma(2H+1) \left(\lim_{\omega \rightarrow \infty} (1 - \cos(\omega h)) \omega^s \right)$$

は $s < 0$ ならば 0 に収束し, $s = 0$ ならば 0 の周りで振動, $s > 0$ ならば発散するためである. しかし, $\omega \rightarrow 0$ の極限では, 0 でない有限な値に収束する指数が存在する. すなわち,

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{S_{\Delta_h B_H}(\omega)}{\omega^{-2H+1}} &= 2 \sin(\pi H) \Gamma(2H+1) \left(\lim_{\omega \rightarrow 0} (1 - \cos(\omega h)) \frac{1}{\omega^2} \right) = 2 \sin(\pi H) \Gamma(2H+1) \left(\lim_{\omega \rightarrow 0} 2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \omega h \right) \frac{1}{\omega^2} \right) \\ &= h^2 \sin(\pi H) \Gamma(2H+1) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \right) = h^2 \sin(\pi H) \Gamma(2H+1) < \infty \end{aligned}$$

である. したがって, $S_{\Delta_h B_H}(\omega)$ は定義 9 の意味で幕乗則に従うとはいえないものの, $S_{\Delta_h B_H}(1/x)$ は x について指数 $2H-1$ の幕乗則に従うといえる. このような状況を, すなわち, 関数 $f(x)$ に対して関数 $g(x) = f(1/x)$ が指数 $-s$ の幕乗則に従うことを, $f(x)$ は $x \rightarrow 0$ で指数 s の幕乗則に従うということにする. つまり, $S_{\Delta_h B_H}(\omega)$ は $\omega \rightarrow 0$ で指数 $-2H+1$ の幕乗則に従う. $S_{\Delta_h B_H}(\omega)$ が偶関数であることに注意すれば, $|\omega|$ が十分小さいときの振る舞いを,

$$S_{\Delta_h B_H}(\omega) \sim h^2 \sin(\pi H) \Gamma(2H+1) |\omega|^{-2H+1} \quad (28)$$

と表すことができる. このように近似できることを観察するために図 5 に ω が小さい範囲における $h = 1$ のときの $S_{\Delta B_H}(\omega)$ のグラフを示した. 図 4 と同様に図中の濃い実線が $S_{\Delta B_H}(\omega)$ であり, 薄い実線は離散時間フーリエ変換である. 破線が式 (28) により近似した値である. この性質は, $H > 1/2$ ならば $S_{\Delta_h B_H}(\omega)$ が $\omega \rightarrow 0$ で発散し, $H \leq 1/2$ ならば収束することを示すが, これは長期記憶と深く関係している. ここでは自己共分散関数からパワースペクトル密度を導出したが, 反対に長期記憶の定義に必要な自己相関関数をパワースペクトル密度のフーリエ逆変換から得ることもできる. そして, 定常過程 $X(t)$ に対する $\rho_X(\tau)$ の τ が大きなところでの振る舞いは, $|\omega|$ が小さなところでの $S_X(\omega)$ の振る舞いに強く依存しており, $\omega \rightarrow 0$ で $S_X(\omega) \rightarrow \infty$ となることは $X(t)$ が長期記憶であることにつながる.

¹⁰ 離散フーリエ変換は式 (36)において, k を -10000 から 10000 の範囲に制限して近似的に計算したものである.

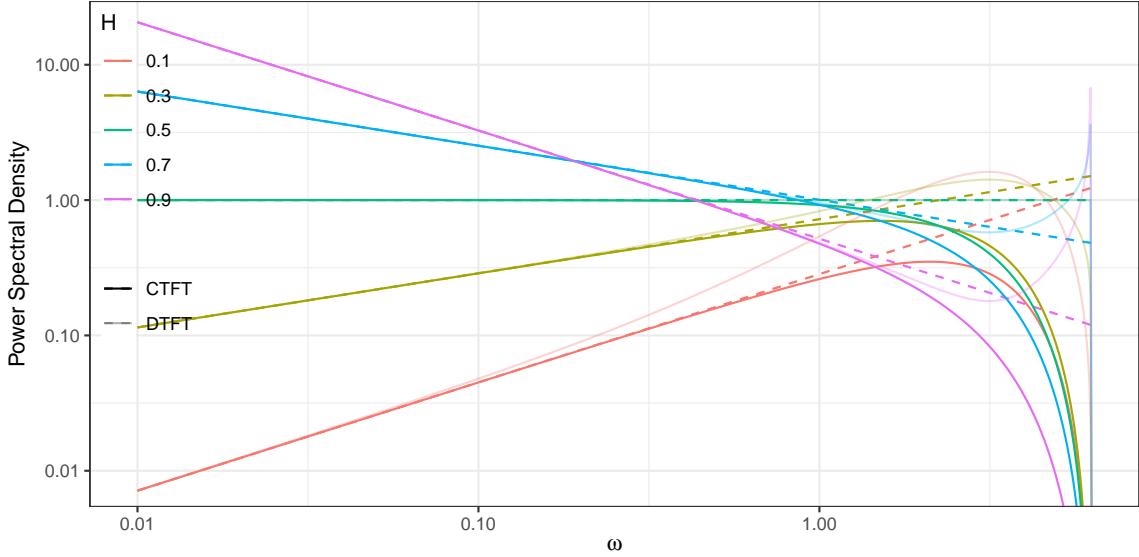


図 5 非整数ブラウン運動の増分のパワースペクトル密度の幕乗則¹¹

ここまで非整数ブラウン運動の増分 $\Delta_h B_H(t)$ を連続時間で定義された確率過程としてパワースペクトル密度を計算してきたが、一般には重複のないように増分をとった離散時間で定義される確率過程を考えることが多い。これを区別するため、確率過程 $X(t)$ の増分を時間間隔 h で重複のないようにとった離散時間過程を $\underline{\Delta}_h X(k) = X(h(k+1)) - X(hk)$ と表すことにする。このとき、 $\gamma_{\underline{\Delta}_h X}(k)$ や $\rho_{\underline{\Delta}_h X}(k)$ は、 $X(t)$ が定常増分であり、なおかつ k が整数である場合にのみ定義できる。定理 14 より、 $\underline{\Delta}_h X(k)$ のパワースペクトル密度を得るために、 $\gamma_{\underline{\Delta}_h X}(k)$ をフーリエ変換すればよいと期待されるが、そのためには、そのような離散的な関数のフーリエ変換や離散時間過程のパワースペクトル密度を定義しなければならない。

定義 15 (離散時間フーリエ変換)。関数 $f(k) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、

$$\mathcal{F}_S \{f(k)\}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \exp(-i\omega k) \quad (29)$$

を $f(k)$ の離散時間フーリエ変換 (DTFT, Discrete-Time Fourier Transform) という。

定義 16 (離散時間過程のパワースペクトル密度)。 $\{0, 1, 2, \dots\}$ で添字付けられた定常過程 $X(k)$ に対して、

$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} \left| \sum_{k=0}^{T-1} X(k) \exp(-i\omega k) \right|^2 \right] \quad (30)$$

を $X(k)$ のパワースペクトル密度という。

このとき、定理 14 と同様の関係が成り立つ。また、明らかに $\gamma_{\underline{\Delta}_h X}(k) = \gamma_{\Delta_h X}(hk)$ であるから、 $\gamma_{\underline{\Delta}_h X}(k)$ は $\gamma_{\Delta_h X}(\tau)$ をサンプリング周波数 $1/h$ で標本化したものであると考えることができる。このことは、 $\underline{\Delta}_h X(k)$ のパワースペクトル密度が $\Delta_h X(t)$ のパワースペクトル密度から求められることを示唆する。より一般に、実数上で定義された関数 $f(t)$ をサンプリング周波数 $1/T$ で標本化した関数を $f_T(k) = f(kT)$ と表せば、 $f_T(k)$ の離散時間フーリエ変換と $f(t)$ のフーリエ変換との間に次のような関係が成り立つ。

¹¹ 離散フーリエ変換は式 (36)において、 k を -10000 から 10000 の範囲に制限して近似的に計算したものである。

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_S \{Tf_T(k)\}(\omega T) &= T \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \exp(-i\omega Tk) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) \delta(t - kT) dt \\
&= T \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \right) \exp(-i\omega t) dt \\
&= T \mathcal{F} \left\{ f(t) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \right) \right\}(\omega) = T \mathcal{F} \{f(t) \text{comb}_T(t)\}(\omega)
\end{aligned} \tag{31}$$

ここで, $\text{comb}_T(t)$ は周期 T の楕型関数である. 全体に T を掛けているのは, この値を $f(t)$ のフーリエ変換に近似させるためである. 実際, 2つ目の式から, この値は $T \rightarrow 0$ で $\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)$ に近づくことがわかる. さらにこの具体的な値を求めるために, 署名込み定理を用いる.

定義 17 (署名込み). 関数 $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ と $g(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して,

$$(f(t) * g(t))(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(\tau - t) dt \tag{32}$$

を $f(t)$ と $g(t)$ の署名込みという.

定理 18 (署名込み定理). 関数 $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ と $g(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ について,

$$\mathcal{F}\{(f(t) * g(t))(\tau)\}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) \tag{33}$$

である.

証明. 式 (32) において $u = -t$ で変数変換すれば,

$$(f(t) * g(t))(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-u) g(u + \tau) du = (\overline{f(-u)} \star g(u))(\tau) \tag{34}$$

であるから, 定理 13 と式 (24) より,

$$\mathcal{F}\{(f(t) * g(t))(\tau)\}(\omega) = \overline{\mathcal{F}\{\overline{f(-t)}\}(\omega)} \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \overline{\mathcal{F}\{\overline{f(t)}\}(-\omega)} \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$$

である. また, 一般に,

$$\mathcal{F}\{\overline{f(t)}\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} \exp(-i\omega t) dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} \exp(-i\omega t) dt} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt} = \overline{\mathcal{F}\{f(t)\}(-\omega)}$$

であるから,

$$\mathcal{F}\{(f(t) * g(t))(\tau)\}(\omega) = \overline{\mathcal{F}\{\overline{f(t)}\}(-\omega)} \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$$

を得る. □

式 (33) において, フーリエ変換をフーリエ逆変換で置き換える, それに応じて 2π を掛ければ, 同じことが成り立つ. 式 (33) をそのように置き換えた上で, さらに $f(t), g(t)$ をそれぞれのフーリエ変換で置き換え, 両辺をフーリエ変換すると,

$$(\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega_0) * \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega_0))(\omega) = 2\pi \mathcal{F}\{f(t)g(t)\}(\omega)$$

となる. つまり, 関数の積のフーリエ変換は, それぞれの関数のフーリエ変換の署名込みとして得られる. しかし, 式 (31) を署名込みで表すためには, $\text{comb}_T(t)$ のフーリエ変換を考えなければならない. 式 (17) と式 (24) より,

$$\mathcal{F}\{\text{comb}_T(t)\}(\omega) = \mathcal{F} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \right\}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\delta(t - kT)\}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega kT)$$

であるが、これはまた橢型関数になることが知られている。実際、任意の整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$\mathcal{F}\{\text{comb}_T(t)\}\left(\omega + n\frac{2\pi}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega kT + 2\pi nk) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega kT) = \mathcal{F}\{\text{comb}_T(t)\}(\omega)$$

であるから、 $\mathcal{F}\{\text{comb}_T(t)\}(\omega)$ は周期 $2\pi/T$ の周期関数であり、

$$\mathcal{F}\{\text{comb}_T(t)\}\left(n\frac{2\pi}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1 = \infty$$

であるから、 ω が $2\pi/T$ の倍数であるとき ∞ となる。一方で、 ω が $2\pi/T$ の倍数でないところでの振る舞いをみるために $|k| \leq N$ に制限して計算すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\text{comb}_T(t)\}(\omega) &\approx \sum_{k=-N}^N \exp(-i\omega kT) = \exp(i\omega NT) \sum_{k=0}^{2N} \exp(-i\omega T)^k = \exp(i\omega NT) \frac{1 - \exp(-i\omega T)^{2N+1}}{1 - \exp(-i\omega T)} \\ &= \frac{\exp(i\omega TN) - \exp(-i\omega TN) \exp(-i\omega T) - \exp(i\omega TN) \exp(i\omega T) + \exp(-i\omega NT)}{2 - 2 \cos(\omega T)} \\ &= \frac{2 \cos(\omega TN)(1 - \cos(\omega T)) + 2 \sin(\omega TN) \sin(\omega T)}{2 - 2 \cos(\omega T)} \\ &= \cos(\omega TN) + \sin(\omega TN) \frac{\sin(\omega T)}{1 - \cos(\omega T)} \end{aligned}$$

となる。一般に定数 a, b に対して $|a \cos(x) + b \sin(x)|$ の最大値は $\sqrt{a^2 + b^2}$ であるから、この結果は $|\mathcal{F}\{\text{comb}_T(t)\}(\omega)|$ が高々 $\sqrt{2/(1 - \cos(\omega T))}$ であることを示す。これに対して ω が $2\pi/T$ の倍数である場合には ∞ となるため、周期 $2\pi/T$ の橢型関数を近似する。ただし、橢型関数は平行移動されたデルタ関数の和として表されるため、式(19)より、1周期あたりの積分値は 1 になる。一方で、 $\mathcal{F}\{\text{comb}_T(t)\}(\omega)$ を 1周期にわたって積分すると、

$$\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \mathcal{F}\{\text{comb}_T(t)\}(\omega) d\omega = \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega kT) d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin(\pi k)}{kT} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\pi k)}{kT} = \frac{2\pi}{T}$$

であるから、橢型関数にこの値を掛けることで、最終的なフーリエ変換を得る。すなわち、

$$\mathcal{F}\{\text{comb}_T(t)\}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \text{comb}_{2\pi/T}(\omega)$$

である。したがって、畳み込み定理を用いて式(31)を計算すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_S\{Tf_T(k)\}(\omega T) &= T\mathcal{F}\{f(t)\text{comb}_T(t)\}(\omega) = \frac{T}{2\pi} (\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega_0) * \mathcal{F}\{\text{comb}_T(t)\}(\omega_0))(\omega) \\ &= (\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega_0) * \text{comb}_{2\pi/T}(\omega_0))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega_0) \text{comb}_{2\pi/T}(\omega - \omega_0) d\omega_0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega_0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \omega_0 - k\frac{2\pi}{T}\right) d\omega_0 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f(t)\}\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right) \end{aligned} \tag{35}$$

となる。つまり、 $f(t)$ をサンプリング周波数 $1/T$ で標本化した関数 $f_T(t)$ の離散時間フーリエ変換は、 $f(t)$ のフーリエ変換を周期 $2\pi/T$ ごとに計算して平均を得ることで周期化したものであり、 $f(t)$ のバンド幅、すなわち、フーリエ変換がある程度大きな値をとる範囲の幅に対して、 $f_T(t)$ のサンプリング周波数 $1/T$ が十分大きければ、 $f_T(t)$ の離散時間フーリエ変換は $f(t)$ のフーリエ変換に近似する。

非整数ブラウン運動に話題を戻すと、その増分のパワースペクトル密度 $S_{\Delta_h B_H}(\omega)$ 、すなわち、自己共分散関数 $\gamma_{\Delta_h B_H}(\tau)$ のフーリエ変換は式(26)で与えられたが、ここに $|\omega|$ に対する指数 $-2H - 1$ が現れることは、 H が小さくなるほどバンド幅が広がり、離散的に観測されるデータからパワースペクトル密度を推定して近似する

ことが難しくなることを示す。上に述べたように、 $\underline{\Delta}_h B_H(k)$ の自己共分散関数 $\gamma_{\underline{\Delta}_h B_H}(k)$ は $\Delta_h B_H(t)$ の自己共分散関数 $\gamma_{\Delta_h B_H}(\tau)$ をサンプリング周波数 $1/h$ で標本化したものと考えることができる。したがって、 $\underline{\Delta}_h B_H(k)$ のパワースペクトル密度 $S_{\underline{\Delta}_h B_H}(\omega)$ 、すなわち、 $\gamma_{\underline{\Delta}_h B_H}(k)$ の離散時間フーリエ変換は、式(35)を用いて次のように得ることができる。

$$\begin{aligned} S_{\underline{\Delta}_h B_H}(\omega) &= \mathcal{F}_S \{ \gamma_{\underline{\Delta}_h B_H}(k) \}(\omega) = \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F} \{ \gamma_{\Delta_h B_H}(\tau) \} \left(\frac{\omega}{h} - k \frac{2\pi}{h} \right) \\ &= \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2(1 - \cos(\omega - 2\pi k)) \sin(\pi H) \Gamma(2H+1) \left| \frac{\omega}{h} - k \frac{2\pi}{h} \right|^{-2H-1} \\ &= h^{2H} 2(1 - \cos(\omega)) \sin(\pi H) \Gamma(2H+1) \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\omega - 2\pi k|^{-2H-1} \end{aligned} \quad (36)$$

この結果は、 $\underline{\Delta}_h B_H(k)$ のパワースペクトル密度がスケールの違いを除いて h によらないことを示す。これは $\rho_{\Delta_h B_H}(\tau h)$ が h に依存しないことによるものであり、自己相関関数の性質と同様に $B_H(t)$ の自己相似性を特徴づけている。また、 $k \neq 0$ に対して $\omega \rightarrow 0$ で $(1 - \cos(\omega))|\omega - 2\pi k|^{-2H-1}/\omega^{-2H+1} \rightarrow 0$ であるから、

$$S_{\underline{\Delta}_h B_H}(\omega) \sim h^{2H} \sin(\pi H) \Gamma(2H+1) |\omega|^{-2H+1}$$

であり、 $S_{\underline{\Delta}_h B_H}(\omega)$ も $S_{\Delta_h B_H}(\omega)$ と同様に $\omega \rightarrow 0$ で指数 $-2H+1$ の幕乗則に従う。そして、 h が十分小さいとき、 $S_{\underline{\Delta}_h B_H}(\omega)$ は $S_{\Delta_h B_H}(\omega/h)/h$ に近似する。図4には $h=1$ のときの $S_{\underline{\Delta}_h B_H}$ のグラフを薄い実線で示しているが、周期 2π の周期関数に変換されていることが観察できる。

5 非整数安定過程

5.1 安定過程

非整数ブラウン運動はブラウン運動から独立増分性という条件を除く形で一般化した確率過程であったが、ブラウン運動の別の一般化として広く知られる自己相似過程がもう一つある。それがここで述べる安定過程であり、これはブラウン運動から正規性という条件を外して一般化したものである。さらに、独立増分性と正規性をともに除外した、自己相似過程の非常に広いグループである非整数安定過程というのも存在する。株価の変動の分布を考えると、数理的な扱いやすさから対数増分が正規分布に従うことを仮定する場合が多いが、経験的には、大きな変動が生じる頻度の高さから正規分布よりも裾の重い分布に従う可能性が指摘されている。安定過程や非整数安定過程は、自己相似過程の範囲で、そのような状況に対応する確率過程である。しかし、正規性という条件を外すことにより、著しく扱いづらい確率過程となる。

安定過程は安定分布とよばれる分布に従う確率過程であるが、安定過程を定義する前に、この安定分布の定義や性質を整理していく。安定分布に関する性質については Nolan (2018) 等に詳しくまとめられている。

定義 19 (安定分布). 確率変数 X の特性関数 $\phi_X(u)$ がパラメータ $\alpha \in (0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$, $\gamma \in (0, \infty)$, $\delta \in (-\infty, \infty)$ を用いて、

$$\phi_X(u) = \exp(-\gamma^\alpha |u|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sgn}(u) \psi_\alpha(u)) + i\delta u) \quad (37)$$

$$\psi_\alpha(u) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & (\alpha \neq 1) \\ -\frac{2}{\pi} \ln(|u|) & (\alpha = 1) \end{cases}$$

と与えられるとき、 X が従う分布をパラメータ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の安定分布 (stable distribution) といい¹²、 X がパラメータ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の安定分布に従うこと

$$X \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

¹² Nolan (2018) 等では安定分布の特性関数を 2つの形式で定義している。本稿で採用している定義では $\alpha > 1$ のとき期待値が δ となるが、Nolan (2018) 等で定義されるもう一方の定義では、 $\alpha > 1$ のとき期待値が $\delta - \gamma\beta \tan(\pi\alpha/2)$ となるように分布の位置が移動されている。この 2つの定義は、前者を 1、後者を 0 として、安定分布を $\mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$ ないしは $\mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ のように表記するこ

と表す。とくに、 $\beta = 0$ かつ $\delta = 0$ の安定分布を対称安定分布 (symmetric stable distribution) という。

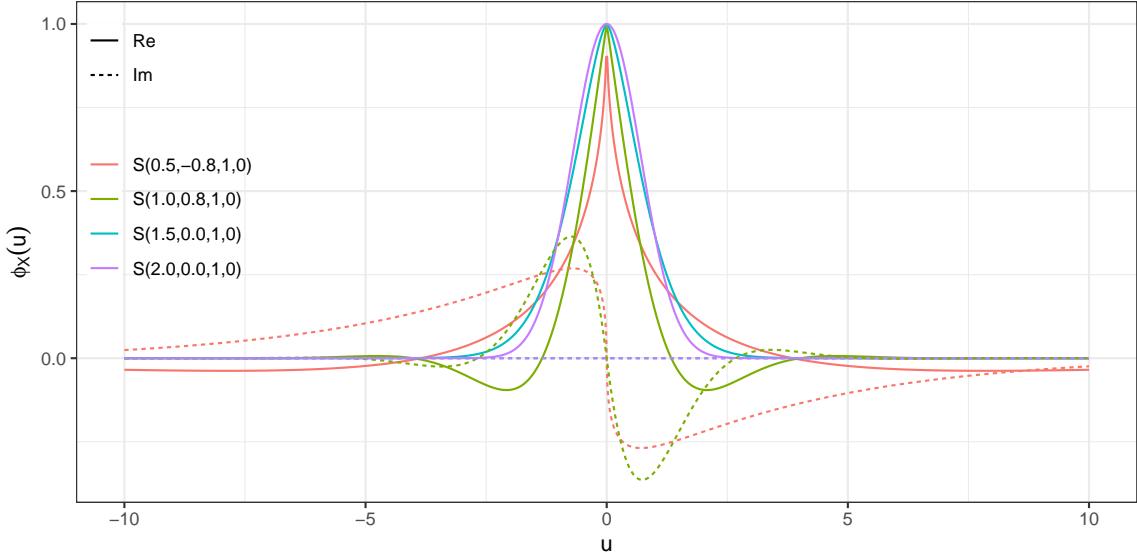


図 6 安定分布の特性関数

図 6 に安定分布の特性関数の例を示した。 α が小さいほど特性関数の実部は鋭いピークをもち、緩やかな減衰を示すことがわかる。このような特性関数によって定義される安定分布は次のような 2 つの重要な性質をもつ。

定理 20. 確率変数 X が $X \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ であるとき、任意の $a \neq 0$ と b に対して、

$$aX + b \sim \mathcal{S}\left(\alpha, \operatorname{sgn}(a)\beta, |a|\gamma, a\delta + b - a\gamma\beta\frac{2}{\pi} \ln(|a|)\delta_{\alpha,1}\right) \quad (38)$$

である。ここで $\delta_{i,j}$ はクロネッカーデルタであり、 $i = j$ ならば $\delta_{i,j} = 1$ 、 $i \neq j$ ならば $\delta_{i,j} = 0$ である。

証明。特性関数が等しいことを示せばよい。値 x_0 をとる退化分布の特性関数が $\exp(ix_0u)$ であることに注意すれば、

$$\begin{aligned} \phi_{aX+b}(u) &= \phi_X(au)\phi_b(u) \\ &= \exp(-\gamma^\alpha |au|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sgn}(au)\psi_\alpha(au)) + i\delta au) \exp(ibu) \\ &= \exp(-(|a|\gamma)^\alpha |u|^\alpha (1 - i(\operatorname{sgn}(a)\beta)\operatorname{sgn}(u)\psi_\alpha(au)) + i(a\delta + b)u) \end{aligned}$$

である。 $\psi_\alpha(u)$ は $\alpha \neq 1$ のとき定数関数であるから、 $\psi_\alpha(au) = \psi_\alpha(u)$ であり、 $\delta_{\alpha,1} = 0$ より、式 (38) の右辺の安定分布の特性関数に一致する。 $\alpha = 1$ の場合を考えると、

$$\psi_1(au) = -\frac{2}{\pi} \ln(|au|) = -\frac{2}{\pi} \ln(|u|) - \frac{2}{\pi} \ln(|a|) = \psi_1(u) - \frac{2}{\pi} \ln(|a|)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \phi_{aX+b}(u) &= \exp\left(-(|a|\gamma)^1 |u|^1 \left(1 - i(\operatorname{sgn}(a)\beta)\operatorname{sgn}(u)\left(\psi_1(u) - \frac{2}{\pi} \ln(|a|)\right)\right) + i(a\delta + b)u\right) \\ &= \exp\left(-(|a|\gamma)^1 |u|^1 (1 - i(\operatorname{sgn}(a)\beta)\operatorname{sgn}(u)\psi_1(u)) - i|a|\gamma|u|\operatorname{sgn}(a)\beta\operatorname{sgn}(u)\frac{2}{\pi} \ln(|a|) + i(a\delta + b)u\right) \\ &= \exp\left(-(|a|\gamma)^1 |u|^1 (1 - i(\operatorname{sgn}(a)\beta)\operatorname{sgn}(u)\psi_1(u)) + i\left(a\delta + b - a\gamma\beta\frac{2}{\pi} \ln(|a|)\right)u\right) \end{aligned}$$

上でパラメータ化されている。libstableR パッケージ (ver. 1.0.2) や stabledist パッケージ (ver. 0.7-1) のデフォルト値のように、後者の定義が優先的に用いられることが少なくないため、注意が必要である。また、宮原 (2003) では $c = \gamma^\alpha$ とおいて γ の代わりにこのパラメータ c を用いて定義している。

であり， $\delta_{1,1} = 1$ より，式(38)の右辺の安定分布の特性関数に一致する。□

定理 21. 独立な 2 つの確率変数 X_1, X_2 が $X_1 \sim S(\alpha, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$, $X_2 \sim S(\alpha, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$ であるとき，

$$X_1 + X_2 \sim S\left(\alpha, \frac{\beta_1 \gamma_1^\alpha + \beta_2 \gamma_2^\alpha}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha}, (\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha)^{1/\alpha}, \delta_1 + \delta_2\right)$$

である。

証明. 右辺の安定分布の特性関数を $\phi_S(u)$ とおいて整理すると，

$$\begin{aligned}\phi_S(u) &= \exp\left(-\left(\left(\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha\right)^{1/\alpha}\right)^\alpha |u|^\alpha \left(1 - i\left(\frac{\beta_1 \gamma_1^\alpha + \beta_2 \gamma_2^\alpha}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha}\right) \operatorname{sgn}(u) \psi_\alpha(u)\right) + i(\delta_1 + \delta_2)u\right) \\ &= \exp\left(-|u|^\alpha \left(\left(\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha\right) - i\left(\beta_1 \gamma_1^\alpha + \beta_2 \gamma_2^\alpha\right) \operatorname{sgn}(u) \psi_\alpha(u)\right) + i\delta_1 u + i\delta_2 u\right) \\ &= \exp\left(-|u|^\alpha \left(\gamma_1^\alpha (1 - i\beta_1 \operatorname{sgn}(u) \psi_\alpha(u)) + \gamma_2^\alpha (1 - i\beta_2 \operatorname{sgn}(u) \psi_\alpha(u))\right) + i\delta_1 u + i\delta_2 u\right) \\ &= \exp\left(-\gamma_1^\alpha |u|^\alpha (1 - i\beta_1 \operatorname{sgn}(u) \psi_\alpha(u)) + i\delta_1 u\right) \exp\left(-\gamma_2^\alpha |u|^\alpha (1 - i\beta_2 \operatorname{sgn}(u) \psi_\alpha(u)) + i\delta_2 u\right)\end{aligned}$$

である。これは $\phi_{X_1}(u) \phi_{X_2}(u)$ の形になっているが， X_1 と X_2 は独立なので， $\phi_{X_1+X_2}(u) = \phi_{X_1}(u) \phi_{X_2}(u) = \phi_S(u)$ である。□

これらの性質は，確率ベクトル X の各成分が独立に α の等しい安定分布に従うとき， X の任意のアフィン変換によって与えられる確率ベクトルもまた，各成分が α の等しい安定分布に従うことを意味する。また，反対に，確率変数 X が $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ であるとき，独立な 2 つの確率変数 $Z_1, Z_2 \sim S(\alpha, 1, 1, 0)$ の適当な線形結合と平行移動によって X と同一の分布に従う確率変数を得ることができる。具体的には， $X \stackrel{d}{=} aZ_1 + bZ_2 + c$ とするためには，

$$\begin{aligned}a &= \gamma \left(\frac{1+\beta}{2}\right)^{1/\alpha} \\ b &= -\gamma \left(\frac{1-\beta}{2}\right)^{1/\alpha} \\ c &= \delta + \frac{2}{\pi} (a \ln(a) + b \ln(-b)) \delta_{\alpha,1}\end{aligned}$$

と選べばよい。ただし， $\beta = -1$ のとき $a = 0$ となるが，その場合には $a \ln(a) = 0$ とする。 $\beta = 1$ の場合も同様である。

安定分布を特徴づけるものとして，その分布が安定であるという性質がある。一般に，確率分布 P が安定であるとは，任意の定数 $a, b > 0$ に対して，ある定数 $c > 0$ と d が存在して，確率分布 P に従う独立な確率変数 X_1, X_2, X_3 について， $aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX_3 + d$ となることをいい，とくに常に $d = 0$ となるとき，確率分布 P は厳密に安定であるという。 $X_1, X_2, X_3 \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ であるとき， $a, b > 0$ であることに注意すれば，定理 20 と定理 21 から，

$$c = (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} \quad (39)$$

$$d = \delta(a + b - c) - \gamma \beta \frac{2}{\pi} \delta_{\alpha,1} (a \ln(a) + b \ln(b) - c \ln(c))$$

と選ぶことで $aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX_3 + d$ とすることができるため，安定分布は安定である。とくに， $\alpha \neq 1$ のとき， $\delta = 0$ ならば厳密に安定であり， $\alpha = 1$ のとき， $\delta = 0$ かつ $\beta = 0$ ならば厳密に安定である。

確率過程 $X(t)$ が H -sssi かつ独立増分であるとき，その分布は必ず厳密に安定でなければならない。その理由は次の通りである。まず，任意の $h_1, h_2 > 0$ に対して， $\Delta_{h_1} X(t) + \Delta_{h_2} X(t+h_1) = \Delta_{h_1+h_2} X(t)$ であるが， $X(t)$ は独立増分であるから， $\Delta_{h_1} X(t)$ と $\Delta_{h_2} X(t+h_1)$ は独立である。一方で， $X(t)$ は H -sssi であるから， $\Delta_{h_1} X(t) \stackrel{d}{=} h_1^H X(1)$ ， $\Delta_{h_2} X(t+h_1) \stackrel{d}{=} h_2^H X(1)$ ， $\Delta_{h_1+h_2} X(t) \stackrel{d}{=} (h_1 + h_2)^H X(1)$ である。したがって， $X(1)$ と同一の分布に従う独立な 2 つの確率変数 X_1, X_2 に対して， $h_1^H X_1 + h_2^H X_2 \stackrel{d}{=} (h_1 + h_2)^H X(1)$ でなければならない。

これは $X(1)$ の分布が厳密に安定でなければならないことを示す。ここで、 $h_1^H X_1 + h_2^H X_2 \stackrel{d}{=} cX(1)$ となるための c が h_1 と h_2 に対して $c = (h_1 + h_2)^H$ と選ばれるように制限されているため、 $X(1)$ に関するこの条件は、分布が厳密に安定であるという条件よりもさらに厳しいものである。しかし、安定分布は、式 (39)において、 $a = h_1^{1/\alpha}, b = h_2^{1/\alpha}$ とおけば、 $c = (h_1 + h_2)^{1/\alpha}$ となるため、それが厳密に安定であるならば、 $H = 1/\alpha$ のとき、この条件を同時に満たすことができる。この性質を利用して定義される自己相似過程が、次に述べる安定過程である。

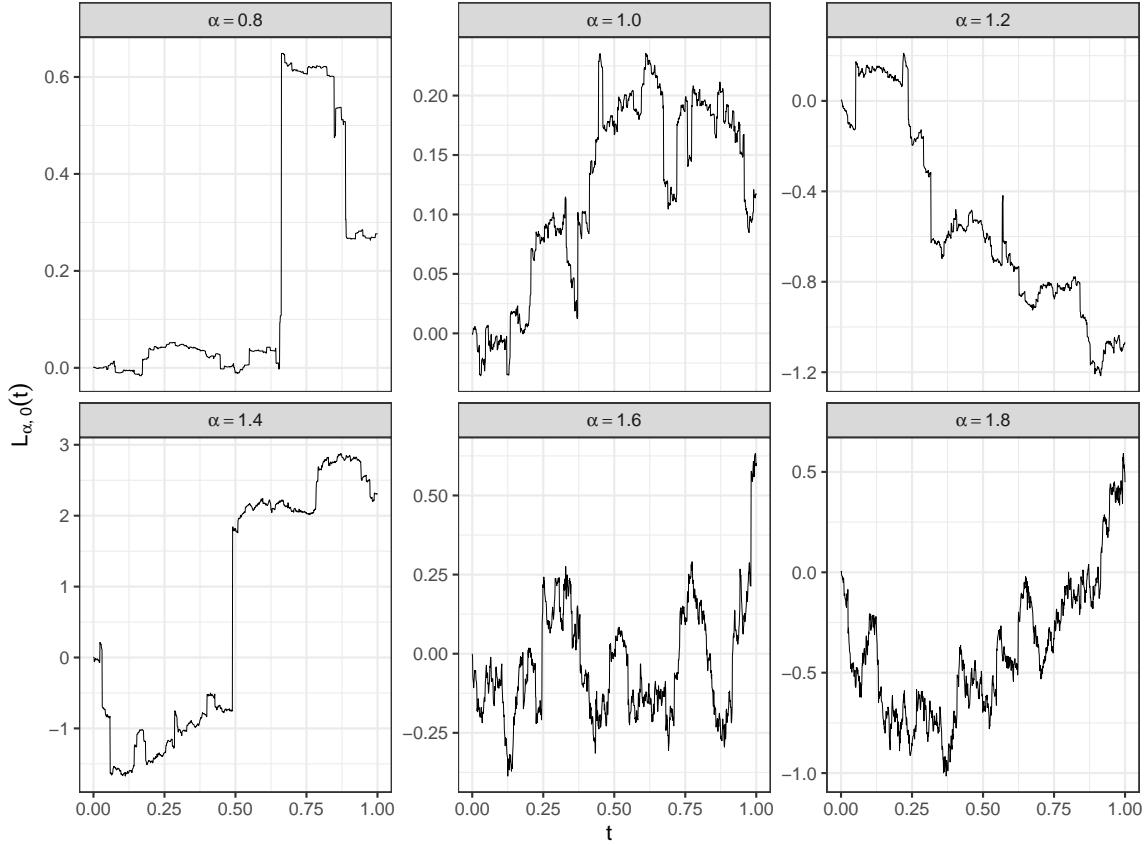


図 7 対称安定過程の見本関数¹³

定義 22 (安定過程). $[0, \infty)$ で添字付けられた確率過程 $L_{\alpha,\beta}(t)$ について、あるパラメータ $\alpha \in (0, 2] \setminus \{1\}, \beta \in [-1, 1]$ または $\alpha = 1, \beta = 0$ が存在して、以下の条件をすべて満たすとき、 $L_{\alpha,\beta}(t)$ は安定過程 (stable process) であるという¹⁴。

- (1) 任意の $0 \leq s < t$ に対して、 $L_{\alpha,\beta}(t) - L_{\alpha,\beta}(s) \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, |t-s|^{1/\alpha}, 0)$ である。
- (2) 任意の $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ に対して、 $L_{\alpha,\beta}(t_2) - L_{\alpha,\beta}(t_1), \dots, L_{\alpha,\beta}(t_n) - L_{\alpha,\beta}(t_{n-1})$ は独立である。
- (3) $L_{\alpha,\beta}(t)$ は確率連続である。
- (4) 確率 1 で $L_{\alpha,\beta}(t)$ の見本関数は càdlàg である。

¹³ 安定分布に従う乱数の生成は stabledist パッケージ (ver. 0.7-1) の rstable 関数による。

¹⁴ 安定過程は Lévy 安定過程あるいは単に Lévy 過程とよばれることがあるが、宮原 (2003) や佐藤 (2011) 等では Lévy 過程という語を加法過程あるいはそれに一定の条件を加えた確率過程に対して用いている。安定過程もそのような確率過程の一種ではあるものの、あくまでその特殊な例であるため、それを区別するためには Lévy 過程ではなく Lévy 安定過程とよばなければならぬ。しかし、安定過程を後述する非整数安定過程に拡張すると、それはもはや加法過程ではなくなる。そのときに非整数 Lévy 安定過程とよぶのは些か不自然であるため、本稿では非整数安定過程に合わせてこの確率過程を単に安定過程とよぶことにする。また、宮原 (2003) では安定分布に従う Lévy 過程 (加法過程) を広く安定過程とよんでいるが、本文にも述べた通り、それが自己相似過程であるためにはその安定分布のパラメータが特定の条件を満たさなければならない。

(5) 確率 1 で $L_{\alpha,\beta}(0) = 0$ である.

とくに $\beta = 0$ であるとき, $L_{\alpha,0}(t)$ は対称安定過程 (symmetric stable process) であるという.

対称安定過程の見本関数を図 7 に示した. α が小さいほど不連続な点が目立つようになることが観察できる. 条件 (1)において分布の形状を指定しないならば, この定義は Lévy 過程の定義に等しく, 条件 (1) によって $L_{\alpha,\beta}(t)$ が $1/\alpha$ -sssi であるように制限されている. 実際, $L_{\alpha,\beta}(t)$ がスケーリング指数 $1/\alpha$ で自己相似であることは, 定理 20 から明らかである. すなわち, 任意の $t \geq 0$ に対して, 条件 (1) より $t^{1/\alpha}L_{\alpha,\beta}(1) \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, t^{1/\alpha}, 0)$ であり, $t^{1/\alpha}L_{\alpha,\beta}(1) \stackrel{d}{=} L_{\alpha,\beta}(t)$ である. また, 条件 (1) は $L_{\alpha,\beta}(t)$ が定常増分であることも要求しているため, $L_{\alpha,\beta}(t)$ は $1/\alpha$ -sssi である. そして, そのような自己相似性を独立増分性を保ちつつ実現することが可能であることを保証するのが式 (39) であった. 上に述べたように, 安定分布に従う自己相似過程が独立増分であるならば, スケーリング指数は $1/\alpha$ となる. $L_{\alpha,\beta}(t)$ が $1/\alpha$ -sssi であるという性質を用いると, 定義 22 の条件の中には他の条件によって含意されるものがある. たとえば, 条件 (3) や条件 (4) はこの性質が含意するものである.

ところで, 定理 2 より, $L_{\alpha,\beta}(t)$ が $0 < E[|L_{\alpha,\beta}(1)|] < \infty$ ならば $1/\alpha \leq 1$ でなければならぬことになるが, $\alpha < 1$ のとき $1/\alpha > 1$ である. このことから予想されるように, 實は $\alpha \leq 1$ のとき $E[|L_{\alpha,\beta}(1)|] = \infty$ である. これは安定過程を扱いづらいものにしている性質の一つであるといえる. 安定過程が独立増分であることから, このような特筆すべき性質の多くは, その安定分布自体の特徴に起因するものである. したがって, 一旦確率過程から離れ, 以下では安定分布の分布としての特徴を整理していく.

まず, 定理 20 から, パラメータ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ のうち, γ は分布のスケールを定め, δ は分布の位置を定めていることがわかる. したがって, これらのパラメータはそれほど重要ではない. 安定分布の形状に影響を与える重要なパラメータは α と β の 2 つである. 確率分布を分析するとき, その確率密度関数が与えられるか否かによって, 分析の難しさが大きく変わる. 安定分布は定義 19 のように特性関数によって定義される分布であり, 確率密度関数は与えられていない. 確率変数 X の特性関数 $\phi_X(u)$ は $\phi_X(u) = E[\exp(iuX)]$ と定義されるが, もし X の確率密度関数 $f_X(x)$ が存在するならば,

$$\phi_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) f_X(x) dx = 2\pi \mathcal{F}^{-1}\{f_X(x)\}(u)$$

であるから,

$$\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{\phi_X(u)\}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_X(u) \exp(-iux) du = f_X(x)$$

である. つまり, 特性関数 $\phi_X(u)$ のフーリエ変換によって確率密度関数 $f_X(x)$ を得ることができる. しかし, 都合の悪いことに, この $\phi_X(u)$ に式 (37) の安定分布の特性関数を代入しても, 一部の特殊なケースを除いて, これ以上簡単な形で表すことができない. その特殊なケースの一つが正規分布である. 安定分布の特性関数から明らかであるように, $\alpha = 2$ のとき, $\psi_\alpha(u)$ は u によらず $\psi_2(u) = 0$ となるため, パラメータ β は分布に影響しない. そして, そのときの特性関数は平均 δ 分散 $2\gamma^2$ の正規分布の特性関数に他ならない. したがって, $\alpha = 2$ のとき, 安定過程 $L_{2,\beta}(t)$ はスケールの違いを除いてブラウン運動に等しく, $L_{2,\beta}(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{2}B(t)$ である. 正規分布は安定分布の極めて特殊な例であり, 正規分布以外の安定分布はすべて非常に厚い裾をもつ, 次のように定義されるファットテールとよばれる分布である.

定義 23 (ファットテール). 確率分布 P について, ある定数 $\alpha > 0$ が存在して, P に従う確率変数 X に対して, 関数 $F_+(x) = P(X > x)$ または関数 $F_-(x) = P(X < -x)$ のいずれかないしは両方が指數 $-\alpha$ の幕乗則に従うとき, P はファットテール (fat tail) であるという. とくに, $F_+(x)$ と $F_-(x)$ の一方だけが幕乗則に従うとき, P は片側ファットテールであるといい, 両方が幕乗則に従うとき, P は両側ファットテールであるという.

正規分布の裾は指數関数的に減衰するため, ファットテールではない. 一般に分布の裾が正規分布の裾よりも遅く, すなわち指數関数よりも遅く減衰するとき, その分布はヘヴィーテールであるというが, ファットテールはヘヴィーテールの一種である. 正規分布以外の安定分布がファットテールであることを示すのは容易

でないが、Nolan (2018) によれば、結果的に次の性質をもつことが知られている。 $0 < \alpha < 2, -1 < \beta \leq 1$ に対して、 $X \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ であるとき、

$$\begin{aligned} P_X(X > x) &\sim \frac{1}{\pi} \gamma^\alpha \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \Gamma(\alpha)(1+\beta)x^{-\alpha} \\ f_X(x) &\sim \frac{1}{\pi} \gamma^\alpha \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \Gamma(\alpha+1)(1+\beta)x^{-\alpha-1} \end{aligned}$$

であり、 $0 < \alpha < 2, -1 \leq \beta < 1$ に対して、 $X \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ であるとき、

$$\begin{aligned} P_X(X < -x) &\sim \frac{1}{\pi} \gamma^\alpha \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \Gamma(\alpha)(1-\beta)x^{-\alpha} \\ f_X(-x) &\sim \frac{1}{\pi} \gamma^\alpha \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \Gamma(\alpha+1)(1-\beta)x^{-\alpha-1} \end{aligned}$$

である。 $P_X(X > x)$ や $P_X(X < -x)$ は確率密度関数 $f_X(x)$ の積分によって得られるため、両者が上のような関係にあることは自然である。

パラメータ β は分布が片側ファットテールであるか両側ファットテールであるかを左右しており、 $0 < \alpha < 2$ かつ $-1 < \beta < 1$ であるならば、安定分布は両側ファットテールである。また、 β は幕乗則の係数に現れており、 $\beta > 0$ ならば右裾が厚い分布となり、 $\beta < 0$ ならば左裾が厚い分布となることがわかる。そして、 $\beta = 0$ ならば左右対称な分布である。このことは確率密度関数が特性関数のフーリエ変換として与えられることからもわかる。一般に、偶関数や奇関数という性質はフーリエ変換やフーリエ逆変換に対して不变であるから、 $f_X(x)$ が偶関数であるためには $\phi_X(u)$ も偶関数でなければならないが、そのためには $\beta = 0$ でなければならない。このように、 β は分布に対して、歪度や 3 次のモーメントを定めるパラメータであるかのように振る舞うが、実際には $\alpha < 2$ のときこれらの値が定義できないため、 β が歪度を定めるパラメータであるということはできない。

パラメータ α は幕乗則の係数だけでなく指数にも現れており、安定分布の性質を左右する最も重要なパラメータとなっている。たとえば、定理 20 や定理 21 から明らかのように、 α が等しい安定分布の特性関数全体は積について閉じており、畳み込み定理（定理 18）より、確率密度関数は畳み込みについて閉じている。あるいは、パラメータ α だけは独立に安定分布に従う確率変数の線形結合によって変更することができないパラメータであるともいえる。また、安定分布は無限分解可能であるが、すなわち、任意の安定分布と自然数 N に対してある分布 P_N が存在して、独立に P_N に従う N 個の確率変数の和が元の安定分布に従うが、このとき P_N が安定分布ならばその α は元の安定分布と等しい。

安定分布の確率密度関数が従う幕乗則の指数が $-\alpha - 1$ であることは、 $X \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ であるとき、任意の $\gamma \geq \alpha$ に対して $E[|X|^\gamma] = \infty$ であることを意味する。これは関数 $g(x)$ に対して $g(X)$ の期待値が確率密度関数と $g(x)$ との積の積分によって与えられることから明らかである。反対に任意の $-1 < \gamma < \alpha$ に対しては $E[|X|^\gamma] < \infty$ である。したがって、安定分布は $\alpha = 2$ の正規分布である場合を除いて有限な分散が存在せず、当然、歪度や尖度も定義できない。さらに、 $0 < \alpha \leq 1$ の場合にいたっては、期待値さえも定義できない。このことは、株価の対数増分に安定分布を仮定した際に、通常のリスクや期待リターンの評価に対して深刻な問題をもたらす。

また、有限な分散が存在しないことは、中心極限定理が成立しないことを意味する。つまり、 $0 < \alpha < 2$ であるとき、独立に同一の安定分布に従う N 個の確率変数の和は、 N をいくら大きくしても正規分布に収束しない。しかし、一方で、 N 個の独立な確率変数について、それらの分布がファットテールであり、確率密度関数がある同一の幕指数 $0 < \alpha < 2$ に対して指数 $-\alpha - 1$ の幕乗則に従うとき、その確率変数の和は同一の α をもつ特定の安定分布に収束することが知られている。この事実は Shintani and Umeno (2018) において示され、超一般化中心極限定理（Super Generalized Central Limit Theorem）とよばれている。株価の対数増分のように分布の形状が定かでないものに対して正規分布を仮定するとき、中心極限定理がそれを正当化する根拠の一つとなることがあるが、この超一般化中心極限定理は、それらの分布に安定分布が仮定される場合に同様の根拠を与える。

確率密度関数が簡単な形で表されるような安定分布の特殊なケースのうち、有名な分布としては正規分布の他にコーシー分布が挙げられる。式(37)の特性関数に対して $\alpha = 1, \beta = 0$ を代入すれば、位置パラメータ δ スケールパラメータ γ のコーシー分布の特性関数が得られる。コーシー分布の性質として広く知られているように、期待値は存在しないものの、コーシーの主値は位置パラメータ δ に一致する。同様に、 $0 < \alpha \leq 1$ の安定分布に従う確率変数 X に対して $E[|X|] = \infty$ となるため期待値が存在しないが、 $\beta = 0$ のとき、コーシーの主値は δ となる。なお、 $\beta \neq 0$ のとき、一方の裾のほうが遅く 0 に近づくため、コーシーの主値は存在しない。また、上に述べたように、 $E[|X|] = \infty$ であることは、このときの安定過程のスケーリング指数が 1 を超えることを許容させている。

ここまで安定分布の特徴を述べてきたが、 $0 < \alpha < 2$ のとき $-1 < \gamma < \alpha$ に対して $E[|X|^\gamma] < \infty$ であるという性質は、安定過程の連続性に関連する。非整数ブラウン運動の見本関数が確率 1 で連続であることは、Kolmogorov の連続性定理（定理 6）を用いて示すことができたが、 $0 < \alpha < 2$ である安定過程 $L_{\alpha,\beta}(t)$ の場合、式(7)を満たすように定数 $\alpha, \beta, C > 0$ を選ぶことができない。安定分布のパラメータと記号が重複するため定理 6 の定数 $\alpha, \beta, C > 0$ を $a, b, C > 0$ と書き換えると、 $E[|L_{\alpha,\beta}(1)|^a] = C < \infty$ であるためには $a < \alpha$ でなければならないが、 $L_{\alpha,\beta}(t)$ は指數 $1/\alpha$ の自己相似過程であるから、そのような a と任意の $0 \leq s < t$ に対して、

$$E[|L_{\alpha,\beta}(t) - L_{\alpha,\beta}(s)|^a] = E[|t-s|^{1/\alpha} |L_{\alpha,\beta}(1)|^a] = |t-s|^{a/\alpha} E[|L_{\alpha,\beta}(1)|^a] = C |t-s|^{a/\alpha} \quad (40)$$

である。ここで、 $a/\alpha < 1$ であるから、 $a/\alpha = 1 + b$ となるような $b > 0$ は存在しない。ただし、この結果は $L_{\alpha,\beta}(t)$ が連続でないことを示すわけではなく、 $L_{\alpha,\beta}(t)$ と確率 1 で等しい連続な確率過程が存在する保証がないことを示すだけである。しかし、実際には、 $L_{\alpha,\beta}(t)$ の見本関数は連続ではなく、定義 22 の条件(4)で要求されるように、見本関数が確率 1 で càdlàg であることしか保証されないことが知られている。非整数ブラウン運動 $B_H(t)$ の見本関数は確率 1 で連続であったから、 $B_H(t)$ はいわゆるジャンプのない確率過程であるが、それに対して $L_{\alpha,\beta}(t)$ の見本関数には不連続な点が存在し、ジャンプが生じるような確率過程となっている。これは株価の急激な変動を取り入れる際に有用な性質であるといえる。

最後に安定分布の確率密度関数を図 8 と図 9 に示す。図 9 は両対数グラフであり、 x が大きいところでの確率密度関数の振る舞いを示しているが、 $\alpha = 2$ の正規分布の場合を除き、幕乗則に従っていることが観察できる。なお、図中の破線は幕乗則による近似である。また、図 8 では α や β が分布の形状に与える影響が観察できる。つまり、 α が大きいほど両裾が厚くなり、 $\beta > 0$ ならば右裾が、 $\beta < 0$ ならば左裾が相対的に厚くなっていることがわかる。

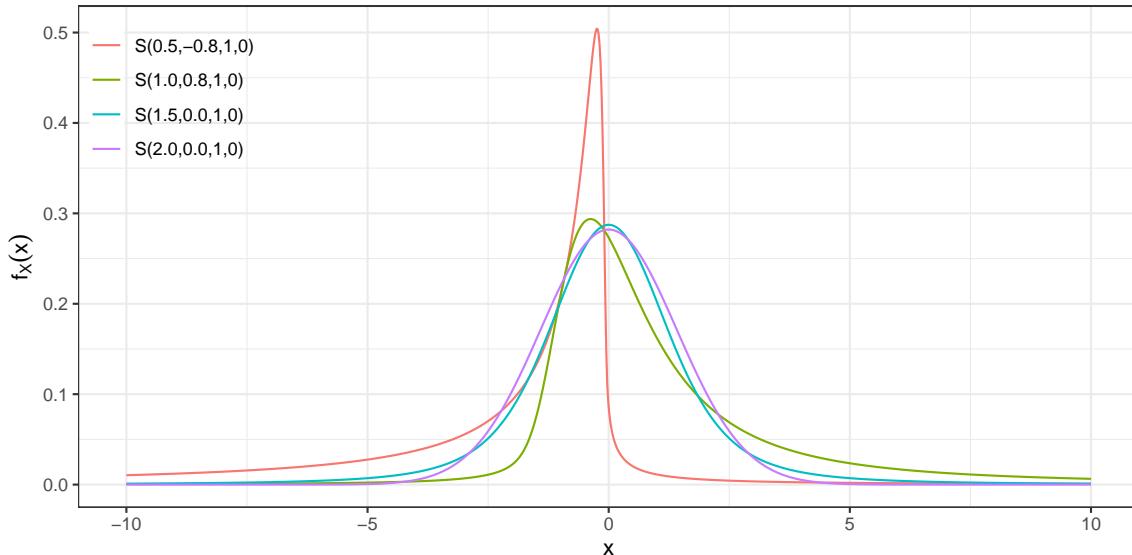


図 8 安定分布の確率密度関数¹⁵

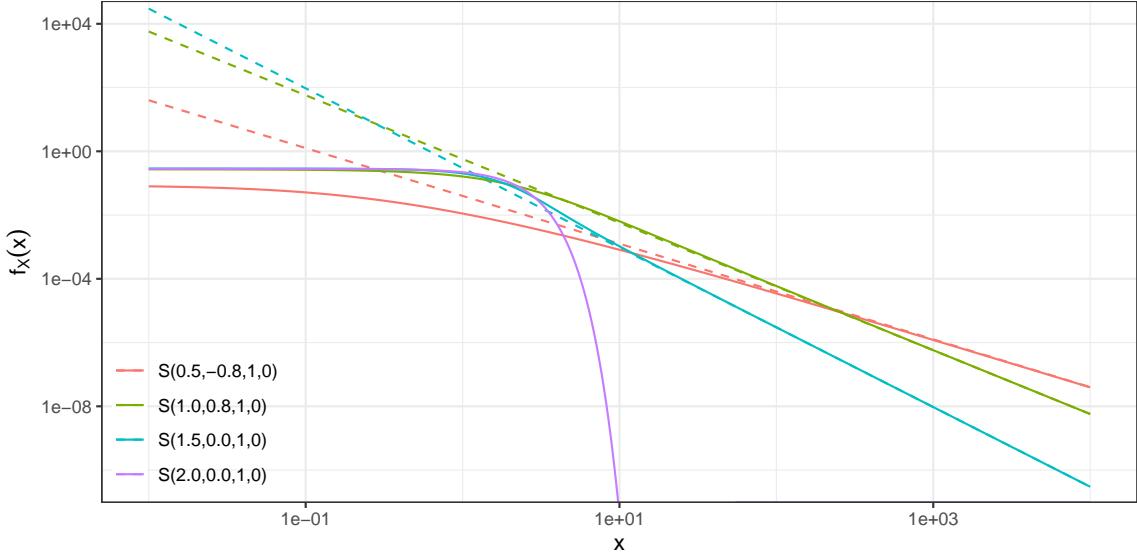


図 9 安定分布の確率密度関数の幕乗則¹⁶

5.2 非整数安定過程

非整数ブラウン運動はブラウン運動を独立増分に制限しないように拡張したものであり、安定過程はブラウン運動を正規分布に制限しないように拡張したものであった。これらの自己相似過程が存在することから、独立増分性も正規性も保証しないようなブラウン運動の拡張が存在することが期待される。そのような確率過程が次のように定義される非整数安定過程である。

定義 24 (非整数安定過程). $[0, \infty)$ で添字付けられた確率過程 $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ について、あるパラメータ $\alpha \in (0, 2] \setminus \{1\}$, $\beta \in [-1, 1]$, $H \in (0, 1)$ または $\alpha = 1, \beta = 0, H \in (0, 1)$ が存在して、以下の条件をすべて満たすとき、 $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ は非整数安定過程 (fractional stable process) であるといい¹⁷、このときのパラメータ H をハースト指数という。

- (1) 任意の $0 \leq s < t$ に対して、 $L_{\alpha,\beta,H}(t) - L_{\alpha,\beta,H}(s) \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, |t-s|^{H+1/\alpha-1/2}, 0)$ である。
- (2) $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ は確率連続である。
- (3) 確率 1 で $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ の見本関数は càdlàg である。
- (4) 確率 1 で $L_{\alpha,\beta,H}(0) = 0$ である。

ただし、定理 2 等により、ハースト指数 H が取り得る範囲は α と β に応じて適当に制限される。また、とくに $\beta = 0$ であるとき、 $L_{\alpha,0,H}(t)$ は非整数対称安定過程 (fractional symmetric stable process) であるという。

非整数安定過程 $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ が存在するならば、 $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ は $(H + 1/\alpha - 1/2)$ -sssi となるが、ここでスケーリング指数が $H + 1/\alpha - 1/2$ となるように定義したのは、非整数安定過程のハースト指数 H が非整数ブラウン運動におけるハースト指数と同様の役割を果たすようにするためである。また、このようなパラメータの設定は Laskin, Lambadaris, Harmantzis and Devetsikiotis (2001) を参考にしたが、Burnecki and Weron (2010) や

¹⁵ 安定分布の確率密度関数は libstableR パッケージ (ver. 1.0.2) の stable.pdf 関数による。

¹⁶ 安定分布の確率密度関数は libstableR パッケージ (ver. 1.0.2) の stable.pdf 関数による。

¹⁷ 安定過程を Lévy 過程とよぶ文脈から、非整数安定過程を非整数 Lévy 過程 (fractional Lévy process) や非整数 Lévy 運動 (fractional Lévy motion) とよぶことが多いが、非整数安定過程は加法過程ないしはそれに一定の条件を加えた確率過程という意味での Lévy 過程には含まれないため、その混同を防ぐために本稿では非整数安定過程とよぶことにした。たとえば、Huang and Li (2007) では fractional stable process とよばれているが、Laskin, Lambadaris, Harmantzis and Devetsikiotis (2001) では fractional Lévy motion, Burnecki and Weron (2010) では fractional Lévy stable motion とよばれている。

Pipiras and Taqqu (2017) ではスケーリング指数が H になるように定義しており, Huang and Li (2007) では H の代わりにパラメータ β を用い, スケーリング指数が $\beta + 1/\alpha$ になるように定義している。なお, 記号が重複しているが, Huang and Li (2007) による定義の β は安定分布のパラメータではなく, それとは独立した別のパラメータである。本稿での定義のようにスケーリング指数が $H + 1/\alpha - 1/2$ となるようにすれば, スケールの違いを除いて, $\alpha = 2$ であるとき $L_{2,\beta,H}(t)$ は $B_H(t)$ に等しく, $H = 1/2$ であるとき $L_{\alpha,\beta,1/2}(t)$ は $L_{\alpha,\beta}(t)$ と等しくなる。もちろん, たとえば, スケーリング指数が $2H/\alpha$ となるように定義しても同じことがいえるが, 実は, そのように定義すると H と自己相関関数との関係が曖昧になってしまう。後に説明するように, スケーリング指数を $H + 1/\alpha - 1/2$ と選ぶことで, $0 < \alpha < 2$ の場合においても非整数安定過程の増分の自己相関関数が同一のハースト指数 H をもつ非整数ブラウン運動の増分の自己相関関数と同じように与えられることが期待できるようになる。

しかし, 非整数安定過程の増分 $\Delta_h L_{\alpha,\beta,H}(t)$ の自己共分散関数 $\gamma_{\Delta_h L_{\alpha,\beta,H}}(\tau)$ や自己相関関数 $\rho_{\Delta_h L_{\alpha,\beta,H}}(\tau)$ は, 式(10) や式(11)の定義では意味のある結果を得ることができない。非整数安定過程は, 明らかに $H = 1/2$ のときに限り独立増分となるが, $0 < \alpha < 2, H \neq 1/2$ のとき, 任意の $\tau \neq 0$ に対して, $E[\Delta_h L_{\alpha,\beta,H}(t+\tau) \Delta_h L_{\alpha,\beta,H}(t)] = \pm\infty$ であると考えられるためである。しかし, $\Delta_h L_{\alpha,\beta,H}(t+\tau)$ と $\Delta_h L_{\alpha,\beta,H}(t)$ のように無限大の分散をもつ 2 つの確率変数 X, Y に対して, とくに X, Y の分布の中心が (μ_X, μ_Y) にあるとき, X, Y の同時確率密度関数を $f_{X,Y}(x, y)$ として次のように定義される量 $R[X, Y]$ は, 意味のある有限な値に収束することが期待される。

$$R[X, Y] = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\int \int_{B_r((\mu_X, \mu_Y))} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy}{\sqrt{\int \int_{B_r((\mu_X, \mu_Y))} x^2 f_{X,Y}(x, y) dx dy} \sqrt{\int \int_{B_r((\mu_X, \mu_Y))} y^2 f_{X,Y}(x, y) dx dy}} \quad (41)$$

ここで $B_r((x_0, y_0)) = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$ は中心 (x_0, y_0) 半径 r の円板である。 X と Y の間に線形関係が一切ない場合を除いて, 式(41)の分母と分子はともに発散するが, その速さが同程度であるならば, 適当な値に収束するはずであり, その値はコーチー-シュワルツの不等式より $-1 \leq R[X, Y] \leq 1$ である。とくに, X と Y の間に一切の線形関係がないならば $R[X, Y] = 0$ となり, 完全な線形関係にあるならば $R[X, Y] = \pm 1$ となる。また, X と Y の分散が有限ならば $R[X, Y]$ は X と Y の相関係数に一致する。 $R[X, Y]$ は通常の相関係数を計算する際の積分区間を少しづつ広げていっているだけであるから, このように相関係数と同じように振る舞う。以下では $\Delta_h L_{\alpha,\beta,H}(t+\tau)$ と $\Delta_h L_{\alpha,\beta,H}(t)$ のように安定分布に従う 2 つの確率変数 X, Y に対して $R[X, Y]$ がどのような値をとるのかを考えていく。

ちなみに, 安定過程は連続ではなかったが, 非整数安定過程の場合には Kolmogorov の連續性定理(定理 6)により $H > 1/2$ のとき確率 1 で連続であることが次のように示せる。まず, 式(40)と同様に, 定数 $0 < a < \alpha$ に対して定数 C を $C = E[|L_{\alpha,\beta,H}(1)|^a] < \infty$ とおけば, 非整数安定過程 $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ は $(H + 1/\alpha - 1/2)$ -sssi であるから, 任意の $0 \leq s < t$ に対して,

$$E[|L_{\alpha,\beta,H}(t) - L_{\alpha,\beta,H}(s)|^a] = E[|t - s|^{H+1/\alpha-1/2} |L_{\alpha,\beta,H}(1)|^a] = |t - s|^{a(H+1/\alpha-1/2)} E[|L_{\alpha,\beta,H}(1)|^a] = C |t - s|^{a(H+1/\alpha-1/2)}$$

である。ここで, $H > 1/2$ であるならば $0 < 1/(H + 1/\alpha - 1/2) < \alpha$ であり, さらに $1/(H + 1/\alpha - 1/2) < a < \alpha$ であるならば $a(H + 1/\alpha - 1/2) > 1$ である。したがって, $b = a(H + 1/\alpha - 1/2) - 1 > 0$ と選ぶことで式(7)の条件を満たすことができ, このとき $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ が確率 1 で連続であるといえる。ただし, 式(40)と同様に記号の重複を防ぐため定理 6 の定数を $\alpha = a, \beta = b$ で書き換えている。さらに, このことから $0 < \gamma < b/a = H + 1/\alpha - 1/2 - 1/a$ に対して確率 1 で指數 γ で局所 Hölder 連続であることが同時に示され, a はいくらでも α に近づけることができるため, 実質的に $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ は $0 < \gamma < H - 1/2$ に対して確率 1 で指數 γ で局所 Hölder 連続であることになる。非整数ブラウン運動は $0 < \gamma < H$ に対して確率 1 で指數 γ で局所 Hölder 連続であったが, それとは状況が異なる。もちろん, $\alpha = 2$ であれば a をいくらでも大きく選べるため, 非整数ブラウン運動の場合と同じ結果が得られる。

5.3 多変量安定分布

2つの確率変数 X, Y が正規分布に従うとき、その同時分布は多変量正規分布として表されたが、 X, Y が安定分布に従う場合には、その同時分布は多変量安定分布とよばれる。多変量正規分布のパラメータは期待値ベクトルと共に分散行列だけであり、比較的単純なものであるが、多変量安定分布の場合にはそれがやや複雑なものになる。これは安定分布に従う2つの確率変数の関係性に対して、線形関係以外にも様々なパターンが考えられるためである。

定義 25 (多変量安定分布)。 n 次元確率ベクトル X の特性関数 $\phi_X(u)$ がパラメータ $\alpha \in (0, 2]$, $\delta \in \mathbb{R}^n$ と $n - 1$ 次元単位球面 $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ 上の有限な測度 Λ を用いて、

$$\phi_X(u) = \exp\left(-\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |u^T s|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sgn}(u^T s) \psi_\alpha(u^T s)\right) d\Lambda(s)\right) + i u^T \delta\right) \quad (42)$$

と与えられるとき、 X が従う分布を多変量安定分布 (multivariate stable distribution) といい、 X が多変量安定分布に従うこと

$$X \sim \mathcal{S}_n(\alpha, \Lambda, \delta)$$

と表す。なお、 $\psi_\alpha(u)$ は定義 19 におけるものと同一である。とくに、 Λ が離散測度であるとき、その分布を離散多変量安定分布 (discrete multivariate stable distribution) という。

多変量安定分布に関する詳細は Nolan (2008) に詳しい。この多変量安定分布のパラメータのうち α と δ は安定分布の場合と同じように機能する。つまり、 α が分布の裾の厚さを定め、 δ が分布の位置を定めている。一方で、安定分布における β と γ に相当するパラメータは、多変量安定分布では測度 Λ が同様の役割を果たしている。式 (42) の被積分関数は、式 (37) の指數関数の中身に $\beta = 1, \gamma = 1, \delta = 0$ を代入して符号を変えたものになっているが、これを測度 Λ に関して積分することで、各 $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ に応じて異なるパラメータ β, γ をもつ安定分布の特性関数を \mathbb{S}^{n-1} 上で積分するのと同じことを実現している。つまり、各 $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ に対応する安定分布のパラメータ γ は $d\Lambda(s)$ の大きさによって定まり、パラメータ β は $d\Lambda(s)$ と $d\Lambda(-s)$ の比率によって定まる。

n 次元確率ベクトル X が $X \sim \mathcal{S}(\alpha, \Lambda, \delta)$ であるとき、 X の各成分が安定分布に従うだけでなく、任意の n 次元ベクトル t に対して $t^T X$ も安定分布に従う。そのとき、 α はすべて同一であるが、 β, γ, δ は t に依存する。そこで、多変量安定分布に対してパラメータ関数とよばれるものが定義される。すなわち、パラメータ関数 $\beta_X(t), \gamma_X(t), \delta_X(t)$ は \mathbb{R}^n から $[-1, 1], (0, \infty), (-\infty, \infty)$ への関数であり、それぞれ $t^T X$ が従う安定分布のパラメータ β, γ, δ を返すものである。実際にそれらがどのような関数となるかを調べるために、 $t^T X$ の特性関数を計算すると、

$$\begin{aligned} \phi_{t^T X}(u) &= E\left[\exp(iu(t^T X))\right] = E\left[\exp(i(ut)^T X)\right] \\ &= \exp\left(-\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |(ut)^T s|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sgn}((ut)^T s) \psi_\alpha((ut)^T s)\right) d\Lambda(s)\right) + i(ut)^T \delta\right) \\ &= \exp\left(-|u|^\alpha \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |t^T s|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sgn}(u) \operatorname{sgn}(t^T s) \left(\psi_\alpha(u) - \delta_{\alpha,1} \frac{2}{\pi} \ln(|t^T s|)\right)\right) d\Lambda(s)\right) + it^T \delta u\right) \\ &= \exp\left(-|u|^\alpha \left(\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |t^T s|^\alpha d\Lambda(s)\right) - i \operatorname{sgn}(u) \psi_\alpha(u) \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |t^T s|^\alpha \operatorname{sgn}(t^T s) d\Lambda(s)\right)\right)\right. \\ &\quad \left.- \delta_{\alpha,1} i u \frac{2}{\pi} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} t^T s \ln(|t^T s|) d\Lambda(s)\right) + it^T \delta u\right) \\ &= \exp\left(-\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |t^T s|^\alpha d\Lambda(s)\right) |u|^\alpha \left(1 - i \left(\frac{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |t^T s|^\alpha \operatorname{sgn}(t^T s) d\Lambda(s)}{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |t^T s|^\alpha d\Lambda(s)}\right) \operatorname{sgn}(u) \psi_\alpha(u)\right)\right. \\ &\quad \left.+ i \left(t^T \delta - \delta_{\alpha,1} \frac{2}{\pi} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} t^T s \ln(|t^T s|) d\Lambda(s)\right)\right) u\right) \end{aligned}$$

となる。5つ目の等号が成立するためには、 $\delta_{\alpha,1}$ が掛かっている項は $\alpha = 1$ と評価していることに注意。したがって、

$$\begin{aligned}\beta_X(t) &= \gamma_X(t)^{-\alpha} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |t^T s|^\alpha \operatorname{sgn}(t^T s) d\Lambda(s) \\ \gamma_X(t) &= \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |t^T s|^\alpha d\Lambda(s) \right)^{1/\alpha} \\ \delta_X(t) &= t^T \delta - \delta_{\alpha,1} \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} t^T s \ln(|t^T s|) d\Lambda(s)\end{aligned}$$

である。

非整数安定過程の増分 $\Delta_h L_{\alpha,\beta,H}(t)$ をいくつか集めた確率ベクトルはこのような多変量安定分布に従っていると考えられる。たとえば、 $\Delta L_{\alpha,\beta,H}(0)$ と $\Delta L_{\alpha,\beta,H}(1)$ からなる2次元確率ベクトル X が $X \sim \mathcal{S}_2(\alpha, \Lambda, 0)$ であるとする。このとき、 $(1, 1)X = \Delta_2 L_{\alpha,\beta,H}(0)$ である。 X は2次元確率ベクトルであるから、パラメータ関数で積分する範囲は単位円上であり、 $\Lambda(S)$ に対して S を極座標系に変換することで $[0, 2\pi]$ 上に定義される測度を $\tilde{\Lambda}(\theta)$ とおくと、非整数安定過程の条件を満たすためには、

$$\begin{aligned}\gamma_X((1, 0)^T) &= \left(\int_0^{2\pi} |\cos(\theta)|^\alpha d\tilde{\Lambda}(\theta) \right)^{1/\alpha} = 1 \\ \gamma_X((0, 1)^T) &= \left(\int_0^{2\pi} |\sin(\theta)|^\alpha d\tilde{\Lambda}(\theta) \right)^{1/\alpha} = 1 \\ \gamma_X((1, 1)^T) &= \left(\int_0^{2\pi} |\cos(\theta) + \sin(\theta)|^\alpha d\tilde{\Lambda}(\theta) \right)^{1/\alpha} = 2^{H+1/\alpha-1/2}\end{aligned}$$

が少なくとも満たされなければならないことがわかる。一方で、ミンコフスキーハーの不等式より、 $\alpha \geq 1$ のとき、

$$2^{H+1/\alpha-1/2} = \left(\int_0^{2\pi} |\cos(\theta) + \sin(\theta)|^\alpha d\tilde{\Lambda}(\theta) \right)^{1/\alpha} \leq \left(\int_0^{2\pi} |\cos(\theta)|^\alpha d\tilde{\Lambda}(\theta) \right)^{1/\alpha} + \left(\int_0^{2\pi} |\sin(\theta)|^\alpha d\tilde{\Lambda}(\theta) \right)^{1/\alpha} = 2$$

であるから、このとき H の取り得る範囲は $H \leq 3/2 - 1/\alpha$ に制限される。 $\alpha > 1$ のとき $0 < E[|L_{\alpha,\beta,H}(1)|] < \infty$ であるから、 $\alpha = 1$ の場合を除き、この結果は定理2による H の制限よりも厳しい。なお、この他にも $\beta((1, 0)^T) = \beta((0, 1)^T) = \beta((1, 1)^T) = \beta$ を満たさなければならない。

多変量安定分布に関する分析は測度 Λ に関する積分を伴うため、どうしても複雑になる。しかし、この測度 Λ を離散測度に制限した離散多変量安定分布は簡単な分析で様々な性質が得られるうえ、それに従う乱数を生成することも容易である。そこで、 n 次元確率ベクトル X が離散多変量安定分布に従い、 N 個の正の実数 $\{\lambda_k\}$ と \mathbb{S}^{n-1} 上の点 $\{s_k\}$ に対して、

$$\Lambda(S) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \delta_{s_k}(S)$$

と与えられる \mathbb{S}^{n-1} 上の離散測度 Λ を用いて $X \sim \mathcal{S}_n(\alpha, \Lambda, \delta)$ であるとする。ただし、 $\delta_s(S)$ はディラック測度であり、 $s \in S$ ならば $\delta_s(S) = 1$ 、 $s \notin S$ ならば $\delta_s(S) = 0$ である。このとき、 X の特性関数は、

$$\begin{aligned}\phi_X(u) &= \exp \left(- \left(\sum_{k=1}^N \lambda_k |u^T s_k|^\alpha (1 - i \operatorname{sgn}(u^T s_k) \psi_\alpha(u^T s_k)) \right) + i u^T \delta \right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^N \exp \left(- \lambda_k |u^T s_k|^\alpha (1 - i \operatorname{sgn}(u^T s_k) \psi_\alpha(u^T s_k)) \right) \right) \exp(i u^T \delta) \\ &= \left(\prod_{k=1}^N \exp \left(- |\lambda_k^{1/\alpha} u^T s_k|^\alpha (1 - i \operatorname{sgn}(\lambda_k^{1/\alpha} u^T s_k) (\psi_\alpha(\lambda_k^{1/\alpha} u^T s_k) + \delta_{\alpha,1} \frac{2}{\pi} \ln(\lambda_k))) \right) \right) \exp(i u^T \delta) \\ &= \left(\prod_{k=1}^N \exp \left(- |\lambda_k^{1/\alpha} u^T s_k|^\alpha (1 - i \operatorname{sgn}(\lambda_k^{1/\alpha} u^T s_k) \psi_\alpha(\lambda_k^{1/\alpha} u^T s_k)) \right) \right) \exp \left(i u^T \left(\delta + \delta_{\alpha,1} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \lambda_k s_k \ln(\lambda_k) \right) \right)\end{aligned}$$

と表すことができるが、ここで、 $(n \times N)$ 行列 M を $\{\lambda_k^{1/\alpha} s_k\}$ を横に並べた行列として定め、すなわち、

$$M_{i,j} = \lambda_j^{1/\alpha} (s_j)_i$$

と定め、定数部分を簡単にするため、

$$\tilde{\delta} = \delta + \delta_{\alpha,1} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \lambda_k s_k \ln(\lambda_k)$$

とおき、 Z を各成分が独立に $\beta = 1, \gamma = 1, \delta = 0$ の安定分布に従う N 次元確率ベクトルとすれば、すなわち、 $Z_1, \dots, Z_N \sim \mathcal{S}(\alpha, 1, 1, 0)$ とすれば、

$$\begin{aligned} \phi_X(u) &= \exp(iu^T \tilde{\delta}) \prod_{k=1}^N \phi_{Z_k}(\lambda_k^{1/\alpha} u^T s_k) = \exp(iu^T \tilde{\delta}) \prod_{k=1}^N \mathbb{E}[\exp(i\lambda_k^{1/\alpha} u^T s_k Z_k)] \\ &= \exp(iu^T \tilde{\delta}) \mathbb{E}\left[\exp\left(i \sum_{k=1}^N \lambda_k^{1/\alpha} u^T s_k Z_k\right)\right] = \exp(iu^T \tilde{\delta}) \mathbb{E}\left[\exp\left(i \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^n u_l \lambda_k^{1/\alpha} (s_k)_l Z_k\right)\right] \\ &= \exp(iu^T \tilde{\delta}) \mathbb{E}[\exp(iu^T MZ)] = \mathbb{E}[\exp(iu^T (MZ + \tilde{\delta}))] = \phi_{MZ+\tilde{\delta}}(u) \end{aligned}$$

となる。つまり、 X は Z のアフィン変換で表すことができ、

$$X \stackrel{d}{=} MZ + \tilde{\delta} \quad (43)$$

である。反対に、 Z の任意のアフィン変換は適当な離散多変量安定分布に従い、さらには任意の離散多変量安定分布に従う確率ベクトルのアフィン変換もまた適当な離散多変量安定分布に従うことがわかる。そして、多変量安定分布に従う乱数を生成することは一般に容易ではないが³、離散多変量安定分布の場合、この関係を用いて簡単に乱数を生成できる。

一般に、 N 次元確率ベクトル Z の共分散行列が Σ で与えられるならば、任意の $(n \times N)$ 行列 M に対して、 $X = MZ$ の共分散行列は $M\Sigma M^T$ となる。とくに Σ が単位行列であるならば X の共分散行列は MM^T であり、相関行列の各成分は M の各行ベクトル同士が成す角の余弦に等しい。つまり、 X_i と X_j の相関係数は M の i 行目のベクトルと j 行目のベクトルが成す角の余弦となる。実際、離散多変量安定分布は、 $\alpha = 2$ のとき、平均ベクトル δ 共分散行列 $2MM^T$ の多変量正規分布に等しく、 MM^T が変わらない限り分布は M の選び方によらない。このことから、 $0 < \alpha < 2$ のとき、多変量安定分布には共分散行列が存在しないものの、式 (41) に従って計算される相関行列が存在するならば、それは式 (43) の表現における行列 M によって定まることが期待される。とくに M の行ベクトル同士の成す角が重要であると考えられる。ただし、 $0 < \alpha < 2$ の場合には、 MM^T が同一であっても M に応じて分布自体は異なる。なお、行列 M の k 列目のベクトルを $M_{:,k}$ と表せば、 X のパラメータ関数は、

$$\begin{aligned} \beta_X(t) &= \gamma_X(t)^{-\alpha} \sum_{k=1}^N \lambda_k |t^T s_k|^\alpha \operatorname{sgn}(t^T s_k) = \gamma_X(t)^{-\alpha} \sum_{k=1}^N |t^T M_{:,k}|^\alpha \operatorname{sgn}(t^T M_{:,k}) \\ \gamma_X(t) &= \left(\sum_{k=1}^N \lambda_k |t^T s_k|^\alpha \right)^{1/\alpha} = \left(\sum_{k=1}^N |t^T M_{:,k}|^\alpha \right)^{1/\alpha} \\ \delta_X(t) &= t^T \delta - \delta_{\alpha,1} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \lambda_k t^T s_k \ln(|t^T s_k|) = t^T \tilde{\delta} - \delta_{\alpha,1} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N t^T M_{:,k} \ln(|t^T M_{:,k}|) \end{aligned}$$

となる。

多変量安定分布に従う確率ベクトルにおいて、式 (41) が計算可能な例が少なからず存在することを確かめるために、さらに計算が容易な非常に特殊な離散多変量安定分布に従う確率ベクトル X を考える。すなわち、 X

が2次元確率ベクトルであり、式(43)の形式で表現したとき、 $\tilde{\delta} = 0$ となり、 M は (2×4) 行列であって、パラメータ $\theta \in (0, \pi), \beta \in [-1, 1]$ を用いて、

$$M = \begin{pmatrix} c_1 \cos(\theta_1) & c_1 \cos(\theta_2) & c_2 \cos(\theta_1) & c_2 \cos(\theta_2) \\ c_1 \sin(\theta_1) & c_1 \sin(\theta_2) & c_2 \sin(\theta_1) & c_2 \sin(\theta_2) \end{pmatrix}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}, \quad c_1 = \left(\frac{1+\beta}{2}\right)^{1/\alpha}, \quad c_2 = -\left(\frac{1-\beta}{2}\right)^{1/\alpha}$$

と与えられる場合である。ただし、定数部分に関する議論を避けるため、 $\alpha = 1$ ならば $\beta = 0$ であるとする。このとき、分布は $X_1 = X_2$ に対して対称であり、

$$X_1, X_2 \sim \begin{cases} \mathcal{S}(\alpha, \beta, (|\cos(\theta_1)|^\alpha + |\cos(\theta_2)|^\alpha)^{1/\alpha}, 0) & \left(0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ \mathcal{S}(\alpha, \beta \frac{|\cos(\theta_1)|^\alpha - |\cos(\theta_2)|^\alpha}{|\cos(\theta_1)|^\alpha + |\cos(\theta_2)|^\alpha}, (|\cos(\theta_1)|^\alpha + |\cos(\theta_2)|^\alpha)^{1/\alpha}, 0) & \left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right) \end{cases} \quad (44)$$

となる。 X は独立に安定分布に従う確率ベクトル Z の M による線形変換で表されるが、このように M の列ベクトルの中にちょうど対極を向くものが存在するならば、 Z が従う分布を修正することで Z と M の次元を削減できる。つまり、この場合、独立な2次元確率ベクトル \tilde{Z} を $\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2 \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, 1, 0)$ として、 (2×2) 行列 \tilde{M} を

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_1) & \sin(\theta_2) \end{pmatrix}$$

とすれば、 $X \stackrel{d}{=} \tilde{M}\tilde{Z}$ となる。このとき、 X の成分間の相関関係 $R[X_1, X_2]$ は \tilde{M} の1行目のベクトルと2行目のベクトルの成す角の余弦に等しいことが期待されるが、 θ_1, θ_2 を $\pi/4 \mp \theta/2$ と選んでいるため、 \tilde{M} の1行目と2行目の成す角は1列目と2列目の成す角、すなわち θ に等しい。そして、 $\cos(\theta) < 0$ であって負の相関関係が存在すると期待されるとき、すなわち $\theta \in (\pi/2, \pi)$ であるとき、 X_1, X_2 の分布は式(44)のように与えられるため、この形で表される離散多変量安定分布では X_1, X_2 が従う分布のパラメータ β が一定の範囲に制限されることになる。しかし、これは自然な結果である。なぜならば、安定分布において $\beta \neq 0$ であるという状況は一方の裾が相対的に厚いことを示すが、そのような分布と負の相関関係をもたらせるためには、反対側の裾を厚くしなければならず、同じ β の値を維持することが難しくなるためである。このことは、自己相関関数が負になるような非整数安定過程において、分布が対称でないケースが極めて稀であるか、あるいは存在しない可能性を示唆する。

実際に $R[X_1, X_2]$ を計算して $R[X_1, X_2] = \cos(\theta)$ となるか否かをみるために X の同時確率密度関数 $f_X(x_1, x_2)$ を求める必要がある。 $X \stackrel{d}{=} \tilde{M}\tilde{Z}$ であることを利用して、

$$\begin{cases} X_1 \stackrel{d}{=} \cos(\theta_1) Z_1 + \cos(\theta_2) Z_2 \\ X_2 \stackrel{d}{=} \sin(\theta_1) Z_1 + \sin(\theta_2) Z_2 \end{cases}$$

を Z_1, Z_2 について解くと、

$$\begin{cases} Z_1 \stackrel{d}{=} \frac{\sin(\theta_2) X_1 - \cos(\theta_2) X_2}{\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) - \cos(\theta_2) \sin(\theta_1)} = \frac{\sin(\theta_2) X_1 - \cos(\theta_2) X_2}{\sin(\theta)} \\ Z_2 \stackrel{d}{=} \frac{\cos(\theta_1) X_2 - \sin(\theta_1) X_1}{\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) - \cos(\theta_2) \sin(\theta_1)} = \frac{\cos(\theta_1) X_2 - \sin(\theta_1) X_1}{\sin(\theta)} \end{cases}$$

であり、

$$|\tilde{M}| = \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) - \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) = \sin(\theta)$$

であるから、 Z_1, Z_2 の独立性より、

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{\sin(\theta)} f_{Z_1} \left(\frac{\sin(\theta_2) x_1 - \cos(\theta_2) x_2}{\sin(\theta)} \right) f_{Z_2} \left(\frac{\cos(\theta_1) x_2 - \sin(\theta_1) x_1}{\sin(\theta)} \right)$$

を得る。つまり、安定分布の確率密度関数が計算できるならば、 X のような離散多変量安定分布の確率密度関数も容易に得られることになる。図 10 にはこの確率密度関数の等確率曲線の例を示した。直線は \tilde{M} の列ベクトルを示している。各ベクトルに沿って指定の安定分布が広がっている様子が観察できる。

この確率密度関数を用いて、いくつかの α, β, θ に対して、実際に $R[X_1, X_2]$ を近似的に計算した結果を図 11 に示す。図中の破線は $\cos(\theta)$ の水準を示している。少なくとも $\beta = 0$ である場合には安定的に収束していくおり、しかも、期待された通り、収束していく先が $\cos(\theta)$ であることがわかる。また、 $\beta \neq 0$ の場合でも、 r が小さいときには不安定な変動を示すものの、 r を大きくするに従って次第に安定的に $\cos(\theta)$ に収束していくようになる。パラメータ α が分布の裾の厚さを定めていたことから推察できるように、同一の β に対しては α が大きいほど急速に収束している。ちなみに、ここでは $\beta \geq 0$ のケースしか計算していないが、 β の符号を反転しても $X_1 = -X_2$ を軸に反転した分布になるだけであるから、 β の符号は $R[X_1, X_2]$ の値に影響しない。この結果から、多変量安定分布に対して相関関係を表す指標 $R[X_1, X_2]$ が定義できるケースが存在するようであることが確認できた。したがって、無限大の分散をもつ非整数安定過程を考える場合でも、その自己相関関数に関する議論がまったく無益なものではないといえる。

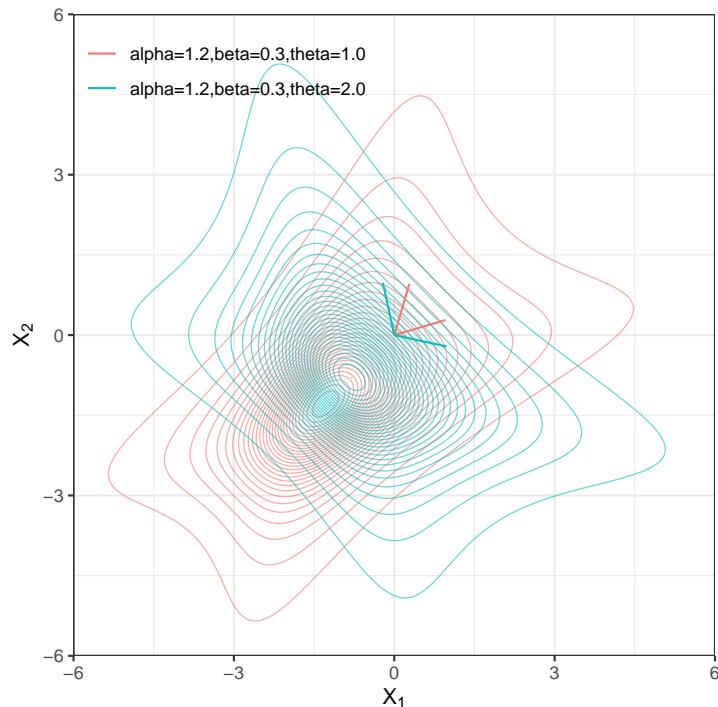


図 10 離散多変量安定分布の確率密度関数¹⁸

¹⁸ 安定分布の確率密度関数は libstableR パッケージ (ver. 1.0.2) の stable_pdf 関数による。

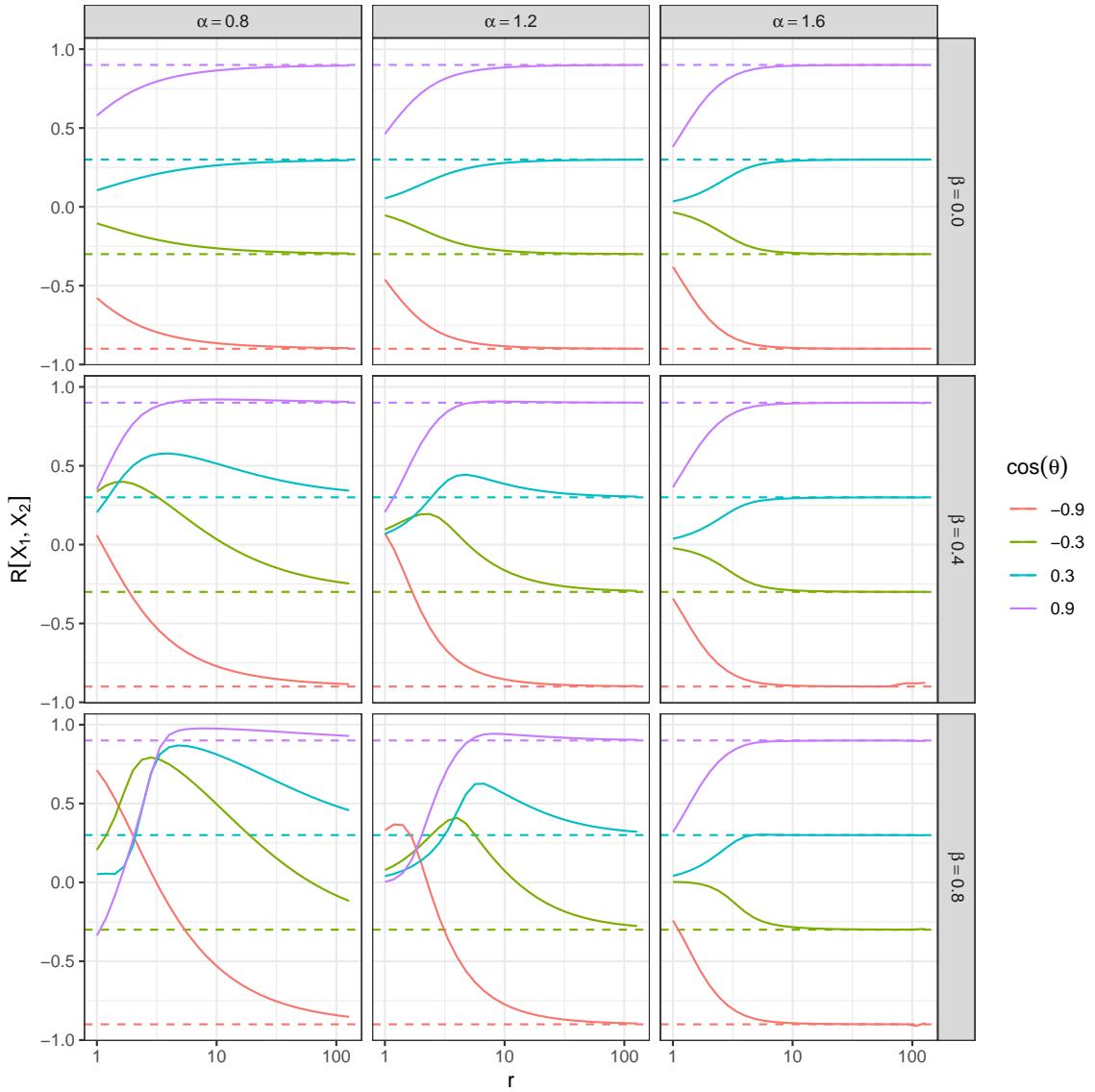


図 11 $R[X_1, X_2]$ の近似計算結果¹⁹

6 非整数階積分による表現

6.1 非整数階積分

ここまで自己相似過程には非整数ブラウン運動や安定過程など、様々なものが存在することを述べてきた。それらはその確率過程がもつ性質によって定義してきたが、その性質を満たすような確率過程はホワイトノイズ、あるいはそれに類するノイズの非整数階積分 (fractional integral) によって表現することができる。ブラウン運動がガウシアンホワイトノイズの積分として与えられることは広く知られているが、この積分を非整数階に拡張すると非整数ブラウン運動が得られ、さらにホワイトノイズの分布を変えると安定過程や非整数安定過程が得られる。このことを確認するために、まず非整数階積分について整理していく。以下に述べるような非整数階積分やその自己相似過程との関係については Mishura (2008) や Fallahgoul, Focardi and Fabozzi (2016), 杉本 (2016) 等に詳しい。

¹⁹ 安定分布の確率密度関数は libstableR パッケージ (ver. 1.0.2) の stable_pdf 関数による。また、数値積分は stats パッケージ (ver. 3.6.1) の integrate 関数による。

非整数階積分は反復積分に関するコーシーの公式の一般化として導入される。 \mathbb{R} 上で定義された関数 $f(t)$ の区間 $[t_0, t]$ に対する定積分を

$$f_{t_0}^{(-1)}(t) = \int_{t_0}^t f(t_1) dt_1$$

と表すと、関数 $f_{t_0}^{(-1)}(t)$ の区間 $[t_0, t]$ に対する定積分 $f_{t_0}^{(-2)}(t)$ は、

$$f_{t_0}^{(-2)}(t) = \int_{t_0}^t f_{t_0}^{(-1)}(t_2) dt_2 = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 = \int_{t_0}^t \int_{t_1}^t f(t_1) dt_2 dt_1 = \int_{t_0}^t (t - t_1) f(t_1) dt_1$$

であり、同様に、関数 $f_{t_0}^{(-2)}(t)$ の区間 $[t_0, t]$ に対する定積分 $f_{t_0}^{(-3)}(t)$ は、

$$f_{t_0}^{(-3)}(t) = \int_{t_0}^t f_{t_0}^{(-2)}(t_3) dt_3 = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_3} (t_3 - t_1) f(t_1) dt_1 dt_3 = \int_{t_0}^t \int_{t_1}^t (t_3 - t_1) f(t_1) dt_3 dt_1 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (t - t_1)^2 f(t_1) dt_1$$

である。したがって、これを同じように n 回繰り返して得られる $f(t)$ の n 階積分 $f_{t_0}^{(-n)}(t)$ は、

$$f_{t_0}^{(-n)}(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-1} f(s) ds$$

となる。これが反復積分に関するコーシーの公式である。ここで、積分範囲の下限を $t_0 = -\infty$ としたものを $f^{(-n)}(t) = f_{-\infty}^{(-n)}(t)$ と表せば、任意の区間 $[a, b]$ に対する $f(t)$ の n 階積分は、

$$f_a^{(-n)}(b) = f^{(-n)}(b) - f^{(-n)}(a)$$

と表すことができる。この $f^{(-n)}(t)$ に関して、階乗をガンマ関数で置き換えて n を自然数から実数に拡張したものが非整数階積分である。つまり、関数 $f(t)$ の α 階積分 $f^{(-\alpha)}(t)$ は、

$$f^{(-\alpha)}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \quad (45)$$

である²⁰。この非整数階積分は反復積分の一般化として満たさるべき性質、すなわち、 α 階積分の β 階積分は $\alpha + \beta$ 階積分に等しいという性質を満たす。実際、

$$\begin{aligned} (f^{(-\alpha)})^{(-\beta)}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^t (t-s_2)^{\beta-1} f^{(-\alpha)}(s_2) ds_2 = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^t (t-s_2)^{\beta-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{s_2} (s_2-s_1)^{\alpha-1} f(s_1) ds_1 \right) ds_2 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t \int_{s_1}^t (t-s_2)^{\beta-1} (s_2-s_1)^{\alpha-1} f(s_1) ds_2 ds_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-s_1)^{\alpha+\beta-1} f(s_1) \int_0^1 s_0^{\alpha-1} (1-s_0)^{\beta-1} ds_0 ds_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-s_1)^{\alpha+\beta-1} f(s_1) B(\alpha, \beta) ds_1 = \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{-\infty}^t (t-s_1)^{\alpha+\beta-1} f(s_1) ds_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{-\infty}^t (t-s_1)^{\alpha+\beta-1} f(s_1) ds_1 = f^{(-\alpha-\beta)}(t) \end{aligned}$$

である。なお、4つ目の等号は $s_0 = (s_2 - s_1) / (t - s_1)$ の変数変換による。また、 $B(x, y)$ はベータ関数であり、

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

である。一方で、 α 階積分の微分は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f^{(-\alpha)}(t) &= (f^{(-\alpha)})^{(1)}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t \left(\frac{d}{dt} (t-s)^{\alpha-1} f(s) \right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t ((\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2} f(s)) ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_{-\infty}^t (t-s)^{\alpha-2} f(s) ds = f^{(1-\alpha)}(t) \end{aligned}$$

²⁰ 式(45)の積分はとくに Riemann-Liouville 積分とよばれる。非整数階積分という語は、積分の反復回数を実数に拡張した演算全般を指す場合があるが、本稿では一貫して Riemann-Liouville 積分を指すものとする。

であり、通常の微積分の性質から期待される通り、 $\alpha - 1$ 階積分となる。これらのことから、適当な α 階積分に加えて通常の微分を繰り返すことで、 n 階微分の一般化である非整数階微分が得られることがわかる。参考として、図 12 には矩形関数、すなわち $|t| \leq 1/2$ のとき 1 をとり、それ以外のとき 0 をとるような関数に対して非整数階微積分を行った結果を示した。

非整数ブラウン運動や非整数安定過程を非整数階積分によって表す際に重要になる性質は、フーリエ変換との関連性である。上に述べたような性質から $0 < \alpha < 1$ の場合だけを考えれば十分であるが、このとき関数 $f(t)$ の α 階積分 $f^{(-\alpha)}(t)$ をフーリエ変換するためには、畳み込み定理（定理 18）を用いるといい。しかし、そのためには $f^{(-\alpha)}(t)$ の積分区間を $(-\infty, \infty)$ に拡張しなければならない。実数 t, α に対して t_+^α を $t \leq 0$ ならば $t_+^\alpha = 0$ 、 $t > 0$ ならば $t_+^\alpha = t^\alpha$ と定義すると、式 (45) は

$$f^{(-\alpha)}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} (t-s)_+^{\alpha-1} f(s) ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (f(s) * s_+^{\alpha-1})(t)$$

と表すことができる。したがって、畳み込み定理（定理 18）より、

$$\mathcal{F}\{f^{(-\alpha)}(t)\}(\omega) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{F}\{f(s)\}(\omega) \mathcal{F}\{s_+^{\alpha-1}\}(\omega)$$

である。そして、 $s_+^{\alpha-1}$ のフーリエ変換は、

$$\mathcal{F}\{s_+^{\alpha-1}\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_+^{\alpha-1} \exp(-i\omega s) ds = \int_0^{\infty} s^{\alpha-1} \exp(-i\omega s) ds = (i\omega)^{-\alpha} \int_0^{\infty} u^{\alpha-1} \exp(-u) du = (i\omega)^{-\alpha} \Gamma(\alpha)$$

であるから、

$$\mathcal{F}\{f^{(-\alpha)}(t)\}(\omega) = (i\omega)^{-\alpha} \mathcal{F}\{f(s)\}(\omega)$$

であり、通常の微積分に関するフーリエ変換の性質を拡張したものになっている。また、 $f^{(-\alpha)}(t)$ のパワースペクトルは、

$$P_{f^{(-\alpha)}}(\omega) = |\mathcal{F}\{f^{(-\alpha)}(t)\}(\omega)|^2 = |(i\omega)^{-\alpha} \mathcal{F}\{f(s)\}(\omega)|^2 = |\omega|^{-2\alpha} P_f(\omega) \quad (46)$$

となる。このパワースペクトルに関する性質は、非整数ブラウン運動がホワイトノイズの非整数階積分によって表されることを示唆している。

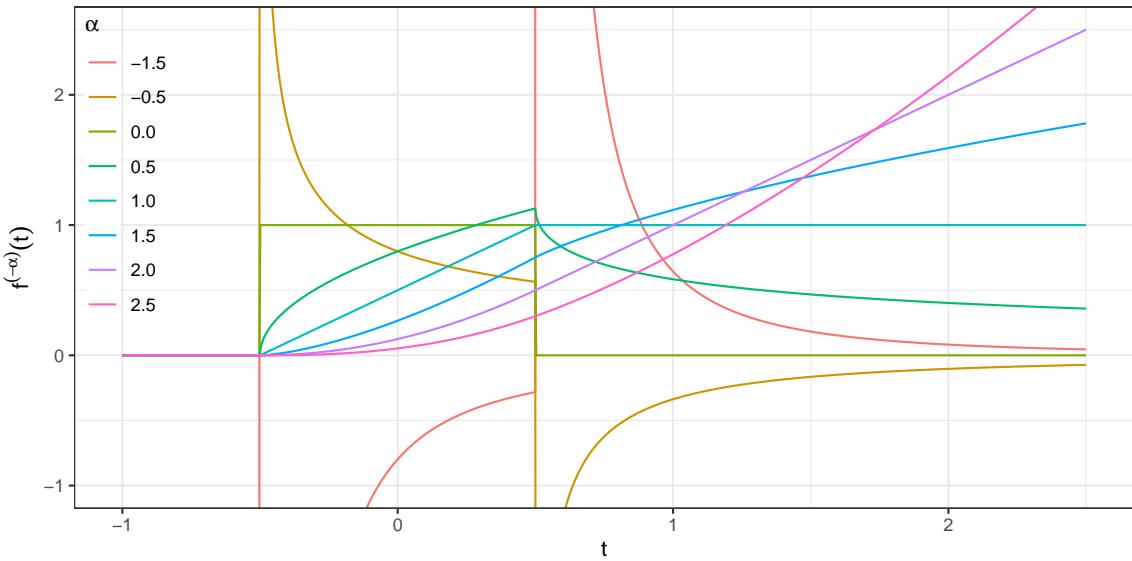


図 12 非整数階微積分の例

6.2 自己相似過程の積分表示

非整数ブラウン運動の増分のパワースペクトル密度 $S_{\Delta_h B_H}(\omega)$ は、式(26)で得られた。ここで $\Delta_h B_H(t)$ を h で割り、 $h \rightarrow 0$ とした過程を考えると、それは非整数ブラウン運動 $B_H(t)$ の微分にあたるものになる。一方で、 $\Delta_h B_H(t)$ を h で割った過程の自己共分散関数は $\Delta_h B_H(t)$ の自己共分散関数の h^{-2} 倍となるため、そのフーリエ変換であるパワースペクトル密度も h^{-2} 倍になる。したがって、式(26)から、非整数ブラウン運動の微分 $dB_H(t)/dt$ のパワースペクトル密度 $S_{dB_H/dt}(\omega)$ は、

$$S_{dB_H/dt}(\omega) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-2} 2(1 - \cos(\omega h)) \sin(\pi H) \Gamma(2H + 1) |\omega|^{-2H-1} = \sin(\pi H) \Gamma(2H + 1) |\omega|^{-2H+1} \quad (47)$$

であることがわかる。とくに、 $H = 1/2$ のとき $B_{1/2}(t)$ はブラウン運動 $B(t)$ に等しく、その微分のパワースペクトル密度は $S_{dB/dt}(\omega) = 1$ で一定である。一般にパワースペクトル密度が一定であるような過程をホワイトノイズというが、とくに正規分布に従うガウシアンホワイトノイズがこのようにブラウン運動の微分として与えられることは広く知られた事実である。このホワイトノイズのパワースペクトル密度が一定であるという性質と式(46)の結果を用いれば、ホワイトノイズの適当な非整数階積分によって式(47)を満たすような過程、すなわち非整数ブラウン運動の微分が得られることがわかる。具体的には、ハースト指数 H に対して $H - 1/2$ 階積分を行う必要があることになるが、非整数ブラウン運動そのものを得るためにもう一度積分しなければならないので、非整数ブラウン運動 $B_H(t)$ 自体を得るために $dB(t)/dt$ の $H + 1/2$ 階積分を行うことになる。ただし、本稿ではブラウン運動 $B(t)$ を $[0, \infty)$ で添字付けられた確率過程として定義してきたため、非整数階積分において積分区間を $(-\infty, t)$ とすることができる。しかし、ブラウン運動は定常増分かつ独立増分な確率過程であり、自然な形で添字集合を $(-\infty, \infty)$ に拡張できると考えられる。したがって、以下、 $B(t)$ に関する区間 $(-\infty, t)$ での積分が現れるが、問題なく定義できるものとする。また、この方法で生成される確率過程は、あくまで $B_H(t)$ と同じ自己共分散関数をもつガウス過程という性質をもつだけであり、厳密に $B_H(t)$ と一致させるためには、確率 1 で $B_H(0) = 0$ を満たすように修正しなければならない。つまり、

$$\begin{aligned} B_H(t) &= \sqrt{\sin(\pi H) \Gamma(2H + 1)} \left(\frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \int_{-\infty}^t (t-s)^{H-1/2} \frac{dB(s)}{ds} ds - \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \int_{-\infty}^t (0-s)^{H-1/2} \frac{dB(s)}{ds} ds \right) \\ &= \frac{\sqrt{\sin(\pi H) \Gamma(2H + 1)}}{\Gamma(H + 1/2)} \int_{-\infty}^{\infty} ((t-s)_+^{H-1/2} - (-s)_+^{H-1/2}) dB(s) \end{aligned} \quad (48)$$

である。ここで、係数 $\sqrt{\sin(\pi H) \Gamma(2H + 1)}$ はパワースペクトル密度の係数を式(47)に一致させ、 $\text{Var}[B_H(1)] = 1$ とするためであり、被積分関数の 2 つ目の項は確率 1 で $B_H(0) = 0$ とするためである。このような形式による非整数ブラウン運動の表現は Mandelbrot and van Ness (1968) によって導入された。さらに、被積分関数を $K_H(t, s)$ とおいて、すなわち、

$$K_H(t, s) = (t-s)_+^{H-1/2} - (-s)_+^{H-1/2}$$

とおいて、式(48)を

$$B_H(t) = \frac{\sqrt{\sin(\pi H) \Gamma(2H + 1)}}{\Gamma(H + 1/2)} \int_{-\infty}^{\infty} K_H(t, s) dB(s) \quad (49)$$

と表すことも多い。このときの関数 $K_H(t, s)$ はカーネル関数とよばれ、このように表される $B_H(t)$ の自己相似性を示す上で、 $K_H(t, s)$ がもつ次の性質は重要である。まず、任意の $h > 0$ に対して、 $(ht)_+^\alpha = h^\alpha t_+^\alpha$ であるから、

$$K_H(ht, hs) = (ht - hs)_+^{H-1/2} - (-hs)_+^{H-1/2} = h^{H-1/2} ((t-s)_+^{H-1/2} - (-s)_+^{H-1/2}) = h^{H-1/2} K_H(t, s)$$

である。また、任意の h に対して、

$$\begin{aligned} K_H(t+h, s+h) &= (t-s)_+^{H-1/2} - (-s-h)_+^{H-1/2} \\ &= (t-s)_+^{H-1/2} - (-s-h)_+^{H-1/2} + (-s)_+^{H-1/2} - (-s)_+^{H-1/2} \\ &= K_H(t, s) - K_H(-h, s) \end{aligned}$$

である。基本的には、この2つの性質に加えて $B(t)$ が H -sssi であることを用いて、式(49)で与えられる確率過程が H -sssi であることを示せるが、実は、これを非整数安定過程に拡張しても同様の方法で $(H + 1/\alpha - 1/2)$ -sssi であることが示せる。つまり、安定過程 $L_{\alpha,\beta}(t)$ の添字集合をブラウン運動と同様に $(-\infty, \infty)$ に拡張したとき、適切な α, β, H の組に対して、

$$L_{\alpha,\beta,H}(t) = C_{\alpha,\beta,H} \int_{-\infty}^{\infty} K_H(t, s) dL_{\alpha,\beta}(s) \quad (50)$$

は $(H + 1/\alpha - 1/2)$ -sssi であり、定義24の条件を満たす²¹。ただし、 $C_{\alpha,\beta,H} > 0$ は $L_{\alpha,\beta,H}(1)$ が従う安定分布のパラメータ γ が $\gamma = 1$ となるようにスケールを変換するための定数であり、 α, β, H によって定まる。 $\alpha = 2$ の場合には $L_{2,\beta}(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{2}B(t)$ 、 $L_{2,\beta,H}(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{2}B_H(t)$ であるから、式(49)と同様に、

$$C_{2,\beta,H} = \frac{\sqrt{\sin(\pi H)\Gamma(2H+1)}}{\Gamma(H+1/2)}$$

である。式(50)の $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ が $(H + 1/\alpha - 1/2)$ -sssi であることが示せれば、式(49)の $B_H(t)$ が H -sssi であることも同時に示される。

まず、 $L_{\alpha,\beta}(t)$ は自己相似過程であるから、任意の $h > 0$ に対して、 $dL_{\alpha,\beta}(ht) \stackrel{d}{=} h^{1/\alpha} dL_{\alpha,\beta}(t)$ である。したがって、任意の $t > 0$ に対して、

$$\begin{aligned} L_{\alpha,\beta,H}(t) &= C_{\alpha,\beta,H} \int_{-\infty}^{\infty} K_H(t, s) dL_{\alpha,\beta}(s) = C_{\alpha,\beta,H} \int_{-\infty}^{\infty} K_H(t, tu) dL_{\alpha,\beta}(tu) \\ &\stackrel{d}{=} C_{\alpha,\beta,H} \int_{-\infty}^{\infty} t^{H-1/2} K_H(1, u) t^{1/\alpha} dL_{\alpha,\beta}(u) = t^{H+1/\alpha-1/2} C_{\alpha,\beta,H} \int_{-\infty}^{\infty} K_H(1, u) dL_{\alpha,\beta}(u) \\ &= t^{H+1/\alpha-1/2} L_{\alpha,\beta,H}(1) \end{aligned}$$

である。確率1で $L_{\alpha,\beta,H}(0) = 0$ であることは定義から明らかであるから、 $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ はスケーリング指数 $H + 1/\alpha - 1/2$ の自己相似過程である。次に、 $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ が定常増分であることを示す。 $L_{\alpha,\beta}(t)$ は定常増分であるから、任意の h に対して、 $dL_{\alpha,\beta}(t+h) \stackrel{d}{=} dL_{\alpha,\beta}(t)$ である。ゆえに、任意の $t \geq 0$ と $h > 0$ に対して、

$$\begin{aligned} L_{\alpha,\beta,H}(t+h) - L_{\alpha,\beta,H}(t) &= \left(C_{\alpha,\beta,H} \int_{-\infty}^{\infty} K_H(t+h, s) dL_{\alpha,\beta}(s) \right) - \left(C_{\alpha,\beta,H} \int_{-\infty}^{\infty} K_H(t, s) dL_{\alpha,\beta}(s) \right) \\ &= C_{\alpha,\beta,H} \int_{-\infty}^{\infty} (K_H(t+h, s) - K_H(t, s)) dL_{\alpha,\beta}(s) \\ &= C_{\alpha,\beta,H} \int_{-\infty}^{\infty} (K_H(t+h, t+u) - K_H(t, t+u)) dL_{\alpha,\beta}(t+u) \\ &\stackrel{d}{=} C_{\alpha,\beta,H} \int_{-\infty}^{\infty} ((K_H(h, u) - K_H(-t, u)) - (K_H(0, u) - K_H(-t, u))) dL_{\alpha,\beta}(u) \\ &= C_{\alpha,\beta,H} \int_{-\infty}^{\infty} (K_H(h, u) - K_H(0, u)) dL_{\alpha,\beta}(u) \\ &= C_{\alpha,\beta,H} \int_{-\infty}^{\infty} K_H(h, u) dL_{\alpha,\beta}(u) = L_{\alpha,\beta,H}(h) \end{aligned}$$

であり、増分の分布は時点 t に依存しない。つまり、 $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ は定常増分であり、上の結果と合わせれば $(H + 1/\alpha - 1/2)$ -sssi である。同様に、式(49)から得られる $B_H(t)$ は H -sssi である。さらに、 $L_{\alpha,\beta}(t)$ が独立増分であり、任意の $t, s \geq 0$ と $h > 0$ に対して、 $dL_{\alpha,\beta}(t+h) dL_{\alpha,\beta}(s+h) \stackrel{d}{=} dL_{\alpha,\beta}(t) dL_{\alpha,\beta}(s)$ であることを用いれば、 $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ の増分の自己共分散が時点 t によらないことが、定常増分性と同じように示せる。最後に、 $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ が非整数安定過程であること、あるいは $B_H(t)$ が非整数ブラウン運動であることを示すために、それ

²¹ Burnecki and Weron (2010) や Pipiras and Taqqu (2017) のように非整数安定過程をスケーリング指数が H となるようにパラメータ H を選択して定義する場合、式(50)の被積分関数は $K_H(t, s)$ ではなく $K_{H+1/2-1/\alpha}(t, s)$ となる。さらに、その場合にはカーネル関数をそもそも $K_H(t, s) = (t-s)_+^{H-1/2} - (-s)_+^{H-1/2}$ ではなく $K_d(t, s) = (t-s)_+^d - (-s)_+^d$ と定義することが多く、そのように定義するならば被積分関数を $K_{H-1/\alpha}(t, s)$ とすることでスケーリング指数が H になる。

らが特定の安定分布、ないしは正規分布に従うことを示さなければならない。 $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ が $(H + 1/\alpha - 1/2)$ -sss であることは既に示されたため、 $L_{\alpha,\beta,H}(1)$ の特性関数を調べれば十分である。 $L_{\alpha,\beta,H}(1)$ は $L_{\alpha,\beta}(t)$ に関する積分によって表されているが、 $dL_{\alpha,\beta}(t)$ は独立であるから $L_{\alpha,\beta,H}(1)$ の特性関数は $C_{\alpha,\beta,H}K_H(1,s)dL_{\alpha,\beta}(s)$ の特性関数をすべて掛け合わせたものとなる。つまり、 $C_{\alpha,\beta,H}K_H(1,s)dL_{\alpha,\beta}(s)$ の特性関数の対数を積分したものが、 $L_{\alpha,\beta,H}(1)$ の特性関数の対数となる。また、 $dL_{\alpha,\beta}(t) \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, (dt)^{1/\alpha}, 0)$ であり、定義 22 で安定過程 $L_{\alpha,\beta}(t)$ は $\alpha = 1$ ならば $\beta = 0$ でなければならないという条件を与えていたので、

$$\phi_{dL_{\alpha,\beta}(t)}(u) = \exp\left(-\left((dt)^{1/\alpha}\right)^\alpha |u|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sgn}(u) \psi_\alpha(u))\right) = \exp\left(-dt |u|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sgn}(u) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)\right)$$

である。したがって、 $C_{\alpha,\beta,H} > 0$ であることに注意すれば、

$$\begin{aligned} \phi_{L_{\alpha,\beta,H}(1)}(u) &= \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} \ln(\phi_{C_{\alpha,\beta,H}K_H(1,s)dL_{\alpha,\beta}(s)}(u))\right) = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} \ln(\phi_{dL_{\alpha,\beta}(s)}(uC_{\alpha,\beta,H}K_H(1,s)))\right) \\ &= \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(-ds |uC_{\alpha,\beta,H}K_H(1,s)|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sgn}(uC_{\alpha,\beta,H}K_H(1,s)) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-C_{\alpha,\beta,H}^\alpha |u|^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} |K_H(1,s)|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sgn}(K_H(1,s)) \operatorname{sgn}(u) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) ds\right) \\ &= \exp\left(-C_{\alpha,\beta,H}^\alpha |u|^\alpha \left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} |K_H(1,s)|^\alpha ds\right) - i\beta \left(\int_{-\infty}^{\infty} |K_H(1,s)|^\alpha \operatorname{sgn}(K_H(1,s)) ds\right) \operatorname{sgn}(u) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-C_{\alpha,\beta,H}^\alpha \left(\int_{-\infty}^{\infty} |K_H(1,s)|^\alpha ds\right) |u|^\alpha \left(1 - i\beta \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |K_H(1,s)|^\alpha \operatorname{sgn}(K_H(1,s)) ds}{\int_{-\infty}^{\infty} |K_H(1,s)|^\alpha ds}\right) \operatorname{sgn}(u) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)\right) \end{aligned} \quad (51)$$

となる。これは安定分布の特性関数である。 $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ が非整数安定過程であるならば、さらに $L_{\alpha,\beta,H}(1) \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, 1, 0)$ でなければならないが、そのためには $\beta = 0$ または $\alpha = 2$ であるか、

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |K_H(1,s)|^\alpha \operatorname{sgn}(K_H(1,s)) ds}{\int_{-\infty}^{\infty} |K_H(1,s)|^\alpha ds} = 1$$

でなければならないことがわかる。つまり、 $\beta = 0$ でなくして、 $\alpha = 2$ でもないならば、 $K_H(1,s)$ は常に非負でなければならない。しかし、実際には、

$$K_H(1,s) = (1-s)_+^{H-1/2} - (-s)_+^{H-1/2} = \begin{cases} (1-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2} & (s < 0) \\ (1-s)^{H-1/2} & (0 \leq s < 1) \\ 0 & (1 \leq s) \end{cases}$$

であるから、 $s < 0$ かつ $H < 1/2$ のときに $K_H(1,s) < 0$ となる。したがって、式(50)の形式で表される非整数安定過程 $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ について、 $\beta \neq 0$ かつ $0 < \alpha < 2$ であるならば、 $H \geq 1/2$ でなければならない。この β と H に関する制限は、増分の相関関係に起因していると考えられる。上述の通り、一般に左右非対称な同一の分布に従う2つの確率変数が負の相関関係をもつのは難しいことであるが、 $H < 1/2$ という状況は、非整数ブラウン運動においては、増分に負の相関が生じる状況を示していた。非整数安定過程の増分の自己相関関数は、分散が有限でないことにより定義できなかったが、式(41)で与えた相関関係の指標 $R[X, Y]$ を用いることで、同一のハースト指数をもつ非整数ブラウン運動の増分と同様の自己相関関数が得られることが期待される。つまり、 $H < 1/2$ のときには負の自己相関が生じ、 $H > 1/2$ のときには正の自己相関が生じ、しかも長期記憶であるような特徴をもつことが期待される。これは、式(50)が式(49)と同様に、独立増分性をもつ確率過程の $H + 1/2$ 階積分の形式をとっているためである。Wiener-Khinchin の定理(定理 14)より、同一の自己相関関数をもつ確率過程のパワースペクトル密度は等しくなり、また、式(46)のように、同一のパワースペクトル密度をもつ確率過程に対する同じ次数の非整数階積分は同一のパワースペクトル密度をもつ。したがって、 $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ の自己相関関数もまた一致するはずである。そのように考えると、 $H < 1/2$ のとき、非整数安定過程の増分には負の自己相関が生じており、それによって β がとれる値が制限されると推察できる。

最後に, 定数 $C_{\alpha,\beta,H}$ は $L_{\alpha,\beta,H}(1)$ が従う安定分布のパラメータ γ が $\gamma = 1$ となるように適当に選べばよいだけのようにみえるが, それが可能であるためには,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_H(1, s)|^\alpha ds < \infty$$

でなければならないことが式 (51) の結果からわかる. 実際にこれを計算すると,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |K_H(1, s)|^\alpha ds &= \int_{-\infty}^{\infty} |(1-s)_+^{H-1/2} - (-s)_+^{H-1/2}|^\alpha ds \\ &= \left(\int_{-\infty}^0 |(1-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}|^\alpha ds \right) + \left(\int_0^1 (1-s)^{\alpha(H-1/2)} ds \right) \\ &= \left(\int_0^{\infty} |(s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2}|^\alpha ds \right) + \frac{1}{\alpha(H+1/\alpha-1/2)} \end{aligned} \quad (52)$$

となる. そして, この積分が収束するための条件は, 次のように与えられる. まず, $H = 1/2$ の場合は明らかに 0 であるから, $H \neq 1/2$ の場合を考える. $f(x) = x^{H-1/2}$ とおくと,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2}}{s^{H-3/2}} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left(\left(\frac{s+1}{s} \right)^{H-1/2} - 1 \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)^{H-1/2} - f(1)}{h} = f^{(1)}(1) = H - \frac{1}{2}$$

であるから, 被積分関数は指数 $\alpha(H-3/2)$ の幕乗則に従い,

$$|(s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2}|^\alpha \sim \left| H - \frac{1}{2} \right|^\alpha s^{\alpha(H-3/2)}$$

である. したがって, 積分が収束するためには, 少なくとも $\alpha(H-3/2) < -1$, すなわち $H < 3/2 - 1/\alpha$ でなければならない. これは α によらず満たさなければならない条件である. とくに $\alpha \leq 2/3$ のとき, 少なくともこの形式で表現される非整数安定過程が $H = 1/2$ の安定過程となるケースを除いて存在しないことを示す. これにより, そのスケーリング指数は独立増分である場合を除いて 1 未満であることになる. 次に, 幕乗則によって近似できない区間, すなわち s が小さな区間で積分可能であるか否かを確認しなければならない. $H > 1/2$ のとき被積分関数の値域は $(0, 1]$ であるから, 明らかに任意の有限区間で積分可能である. 一方で, $H < 1/2$ のとき被積分関数は $s = 0$ で発散する. しかし, 被積分関数は s について減少関数であり, その値が 1 よりも大きくなるような範囲では α に対して増加関数であるから, $\alpha = 2$ で積分可能ならば任意の $0 < \alpha \leq 2$ で積分可能である. また, ある $0 < \alpha \leq 2$ に対して $H < 3/2 - 1/\alpha$ が成り立つならば $\alpha = 2$ でも成り立つから, 最終的には, 式 (52) の最右辺の積分に $\alpha = 2$ を代入して H の関数とみなしたもの $V(H)$ とおいて,

$$V(H) = \int_0^{\infty} ((s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 ds$$

が有限であるか否かという問題に帰着する. 上に述べた通り, この被積分関数は指数 $2H-3$ の幕乗則に従い, 区間 $[1, \infty)$ 上で有限であるから, この区間上では定数 $C > 0$ を適当に選ぶことで $C s^{2H-3}$ によって押さえられる. より詳細に計算する必要があるが, 実際には $C = (H-1/2)^2$ としてよい. したがって,

$$V(H) < \left(\int_0^1 (s+1)^{2H-1} ds \right) + \left(\int_0^1 s^{2H-1} ds \right) + \left(\int_1^{\infty} C s^{2H-3} ds \right) = \frac{2^{2H-1}}{H} - \frac{C}{2H-2} < \infty$$

であり, $V(H)$ は常に有限であることがわかる. ところで, $\alpha = 2$ のケースは非整数ブラウン運動であったから,

$$C_{2,\beta,H}^2 \int_{-\infty}^{\infty} K_H(1, s)^2 ds = \left(\frac{\sqrt{\sin(\pi H)} \Gamma(2H+1)}{\Gamma(H+1/2)} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} K_H(1, s)^2 ds = \frac{\sin(\pi H)}{B(H+1/2, H+1/2)} \int_{-\infty}^{\infty} K_H(1, s)^2 ds = 1$$

とならなければならず, $V(H)$ の具体的な値は,

$$V(H) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} K_H(1, s)^2 ds \right) - \frac{1}{2H} = \frac{B(H+1/2, H+1/2)}{\sin(\pi H)} - \frac{1}{2H} \quad (53)$$

となるはずである. $V(H)$ がこのような値になることは, 本を正せば式(47)によって間接的に正当化されるものであるが, $V(H)$ の積分を実際に計算すると次のようになる. まず, $V(H)$ の被積分関数の括弧内の冪乗の底に絶対値をとっても結果は変わらないから,

$$V(H) = \int_0^\infty (|s+1|^{H-1/2} - |s|^{H-1/2})^2 ds$$

であり, これにより被積分関数は $s = -1/2$ を軸に対称になる. したがって,

$$\begin{aligned} V_1(H) &= \int_{-\infty}^\infty (|s+1|^{H-1/2} - |s|^{H-1/2})^2 ds \\ V_2(H) &= \int_{-1}^0 (|s+1|^{H-1/2} - |s|^{H-1/2})^2 ds \end{aligned}$$

とおけば,

$$V(H) = \frac{1}{2} (V_1(H) - V_2(H))$$

である. $V_2(H)$ から先に計算すると,

$$\begin{aligned} V_2(H) &= \int_{-1}^0 (|s+1|^{H-1/2} - |s|^{H-1/2})^2 ds = \int_0^1 ((1-u)^{H-1/2} - u^{H-1/2})^2 du \\ &= \left(\int_0^1 (1-u)^{2H-1} du \right) + \left(\int_0^1 u^{2H-1} du \right) - 2 \left(\int_0^1 (1-u)^{H-1/2} u^{H-1/2} du \right) = \frac{1}{H} - 2B\left(H + \frac{1}{2}, H + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

となる. 次に $V_1(H)$ を計算する.

$$\begin{aligned} V_1(H) &= \int_{-\infty}^\infty (|s+1|^{H-1/2} - |s|^{H-1/2})^2 ds \\ &= \left(\int_{-\infty}^\infty |s+1|^{H-1/2} |s+1|^{H-1/2} ds \right) + \left(\int_{-\infty}^\infty |s|^{H-1/2} |s|^{H-1/2} ds \right) - 2 \left(\int_{-\infty}^\infty |s+1|^{H-1/2} |s|^{H-1/2} ds \right) \\ &= (|s+1|^{H-1/2} \star |s+1|^{H-1/2})(0) + (|s|^{H-1/2} \star |s|^{H-1/2})(0) - 2(|s|^{H-1/2} \star |s|^{H-1/2})(1) \end{aligned}$$

であるが, 関数 $f_T(s)$ を $-T \leq s \leq T$ のとき $f_T(s) = |s|^{H-1/2}$, それ以外のとき $f_T(s) = 0$ と定めれば,

$$\begin{aligned} V_1(H) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\left(\int_{-T}^T |s+1|^{H-1/2} |s+1|^{H-1/2} ds \right) + \left(\int_{-T}^T |s|^{H-1/2} |s|^{H-1/2} ds \right) - 2 \left(\int_{-T}^T |s+1|^{H-1/2} |s|^{H-1/2} ds \right) \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\left(\int_{-\infty}^\infty f_T(s) f_T(s) ds \right) + \left(\int_T^{T+1} |s|^{H-1/2} |s|^{H-1/2} ds \right) - \left(\int_{-T}^{-T+1} |s|^{H-1/2} |s|^{H-1/2} ds \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{-\infty}^\infty f_T(s) f_T(s) ds \right) - 2 \left(\int_{-\infty}^\infty f_T(s+1) f_T(s) ds \right) - 2 \left(\int_{T-1}^T |s+1|^{H-1/2} |s|^{H-1/2} ds \right) \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(2(f_T(s) \star f_T(s))(0) - 2(f_T(s) \star f_T(s))(1) + \left(\int_{T-1}^T (s+1)^{H-1/2} (s+1)^{H-1/2} ds \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\int_{T-1}^T s^{H-1/2} s^{H-1/2} ds \right) - 2 \left(\int_{T-1}^T (s+1)^{H-1/2} s^{H-1/2} ds \right) \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(2(f_T(s) \star f_T(s))(0) - 2(f_T(s) \star f_T(s))(1) - 2 \left(\int_{T-1}^T s^{2H-1} ds \right) + \left(\int_{T-1}^T ((s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 ds \right) \right) \\ &= 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \left((f_T(s) \star f_T(s))(0) - (f_T(s) \star f_T(s))(1) - \frac{1}{2H} (T^{2H} - (T-1)^{2H}) \right) \\ &= 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\mathcal{F}^{-1} \{|\mathcal{F}\{f_T(s)\}(\omega)|^2\}(0) - \mathcal{F}^{-1} \{|\mathcal{F}\{f_T(s)\}(\omega)|^2\}(1) - T^{2H-1} \right) \end{aligned}$$

である. ここで, 最後の等号は相互相関定理(定理13)による. 関数 $|s|^{H-1/2}$ は $H > 1/2$ のときフーリエ変換可能でないが, $f_T(s)$ は絶対可積分であるためフーリエ変換可能である. T が十分大きいものと考えて式(27)の不完全ガンマ関数の評価を第2項まで使用して近似すれば²²,

²² ここでは不完全ガンマ関数 $\gamma(z, x)$ について $z = H + 1/2$ のケースを評価することになるが, $0 < H < 1$ であるから $-1/2 < \operatorname{Re}(z-1) < 1/2$ であり, 式(27)の第2項までを評価すれば十分である.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f_T(s)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_T(s) \exp(-i|\omega|s) ds = 2\operatorname{Re}\left(\int_0^T s^{H-1/2} \exp(-i|\omega|s) ds\right) \\
&= 2|\omega|^{-H-1/2} \operatorname{Re}\left(i^{-H-1/2} \int_0^{i|\omega|T} t^{H-1/2} \exp(-t) dt\right) \\
&\approx 2|\omega|^{-H-1/2} \operatorname{Re}\left(i^{-H-1/2} \left(\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right) - (i|\omega|T)^{H-1/2} \exp(-i|\omega|T)\right)\right) \\
&= 2\left(\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right) \operatorname{Re}(i^{-H-1/2}) |\omega|^{-H-1/2} - T^{H-1/2} \operatorname{Re}(i^{-1} \exp(-i|\omega|T)) |\omega|^{-1}\right) \\
&= 2\left(\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi\left(H + \frac{1}{2}\right)\right) |\omega|^{-H-1/2} + T^{H-1/2} \sin(|\omega|T) |\omega|^{-1}\right)
\end{aligned}$$

となる。 $C = \Gamma(H + 1/2) \cos(\pi(H + 1/2)/2)$ とおけば、

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}^{-1}\left\{|\mathcal{F}\{f_T(s)\}(\omega)|^2\right\}(0) - \mathcal{F}^{-1}\left\{|\mathcal{F}\{f_T(s)\}(\omega)|^2\right\}(1) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\{f_T(s)\}(\omega)|^2 (1 - \exp(i\omega)) d\omega \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} (C^2 \omega^{-2H-1} + T^{2H-1} \sin^2(\omega T) \omega^{-2} + 2CT^{H-1/2} \sin(\omega T) \omega^{-H-3/2})(1 - \cos(\omega)) d\omega
\end{aligned}$$

である。この被積分関数の最初の括弧内は 3 つの項からなるが、1 つ目の項に関する積分は非整数ブラウン運動の増分のパワースペクトル密度 $S_{\Delta B_H}(\omega)$ を用いて、

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} C^2 \omega^{-2H-1} (1 - \cos(\omega)) d\omega \\
&= C^2 \frac{\pi}{\sin(\pi H) \Gamma(2H+1)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2(1 - \cos(\omega)) \sin(\pi H) \Gamma(2H+1) \omega^{-2H-1} d\omega \right) \\
&= C^2 \frac{\pi}{2 \sin(\pi H) \Gamma(2H+1)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\Delta B_H}(\omega) \exp(i\omega 0) d\omega \right) \\
&= C^2 \frac{\pi}{2 \sin(\pi H) \Gamma(2H+1)} \mathcal{F}^{-1}\{S_{\Delta B_H}(\omega)\}(0) = C^2 \frac{\pi}{2 \sin(\pi H) \Gamma(2H+1)} \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\gamma_{\Delta B_H}(\tau)\}(\omega)\}(0) \\
&= \Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)^2 \cos^2\left(\frac{1}{2}\pi\left(H + \frac{1}{2}\right)\right) \frac{\pi}{2 \sin(\pi H) \Gamma(2H+1)} \gamma_{\Delta B_H}(0) = \frac{\pi}{4} B\left(H + \frac{1}{2}, H + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{\sin(\pi H)} - 1\right)
\end{aligned}$$

と得られる。なお、ここでは $S_{\Delta B_H}(\omega)$ と $\gamma_{\Delta B_H}(\tau)$ があくまで单なる関数として $\mathcal{F}\{\gamma_{\Delta B_H}(\tau)\}(\omega) = S_{\Delta B_H}(\omega)$ という関係にあるという上で導出した結果だけを用いており、非整数ブラウン運動の性質や確率過程とパワースペクトル密度との関係などは用いていない。そして、2 つ目の項に関する積分も同様に、

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} T^{2H-1} \sin^2(\omega T) \omega^{-2} (1 - \cos(\omega)) d\omega \\
&= T^{2H-1} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (1 - \cos(\omega 2T)) \omega^{-2} (1 - \cos(\omega)) d\omega = \frac{\pi}{4} T^{2H-1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\Delta B_{1/2}}(\omega) (\exp(i\omega 0) - \exp(i\omega 2T)) d\omega \right) \\
&= \frac{\pi}{4} T^{2H-1} (\mathcal{F}^{-1}\{S_{\Delta B_{1/2}}(\omega)\}(0) - \mathcal{F}^{-1}\{S_{\Delta B_{1/2}}(\omega)\}(2T)) = \frac{\pi}{4} T^{2H-1}
\end{aligned}$$

となる。3 つ目の項に関する積分は、同じように $S_{\Delta B_H}(\omega)$ のフーリエ逆変換を用いて計算することが難しいが、

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty 2CT^{H-1/2} \sin(\omega T) \omega^{-H-3/2} (1 - \cos(\omega)) d\omega \\
&= CT^{H-1/2} \int_0^\infty \omega^{-H-3/2} (\sin(-\omega(T+1)) - 2\sin(-\omega T) + \sin(-\omega(T-1))) d\omega \\
&= CT^{H-1/2} \operatorname{Im} \left(\left(\int_0^\infty \omega^{-H-3/2} \exp(-i\omega(T+1)) d\omega \right) - 2 \left(\int_0^\infty \omega^{-H-3/2} \exp(-i\omega T) d\omega \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^\infty \omega^{-H-3/2} \exp(-i\omega(T-1)) d\omega \right) \right) \\
&= CT^{H-1/2} \operatorname{Im} \left(i^{H+1/2} \int_0^{\infty i} v^{-H-3/2} \exp(-v) dv \right) ((T+1)^{H+1/2} - 2T^{H+1/2} + (T-1)^{H+1/2}) \\
&= \Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi\left(H + \frac{1}{2}\right)\right) T^{H-1/2} \sin\left(\frac{1}{2}\pi\left(H + \frac{1}{2}\right)\right) \Gamma\left(-H - \frac{1}{2}\right) ((T+1)^{H+1/2} - 2T^{H+1/2} + (T-1)^{H+1/2}) \\
&= \frac{\pi}{2} T^{H-1/2} \frac{\Gamma(H+1/2) \sin(\pi(H+1/2))}{\sin(\pi(H+3/2)) \Gamma(H+3/2)} ((T+1)^{H+1/2} - 2T^{H+1/2} + (T-1)^{H+1/2}) \\
&= -\frac{\pi}{2H+1} T^{H-1/2} ((T+1)^{H+1/2} - 2T^{H+1/2} + (T-1)^{H+1/2}) = -\frac{2\pi}{2H+1} T^{H-1/2} \rho_{\Delta B_{(H+1/2)/2}}(T)
\end{aligned}$$

である。ここで、 $\operatorname{Im}(z)$ は複素数 z の虚部を示す。式(15)より、 $\rho_{\Delta B_{(H+1/2)/2}}(T)$ は指数 $H - 3/2$ の幕乗則に従うため、この3つ目の項に関する積分は指数 $2H - 2$ の幕乗則に従い、 $T \rightarrow \infty$ で 0 に収束する。これらの結果をまとめれば、

$$V_1(H) = 2B\left(H + \frac{1}{2}, H + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{\sin(\pi H)} - 1 \right)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
V(H) &= \frac{1}{2} (V_1(H) - V_2(H)) = \frac{1}{2} \left(2B\left(H + \frac{1}{2}, H + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{\sin(\pi H)} - 1 \right) - \left(\frac{1}{H} - 2B\left(H + \frac{1}{2}, H + \frac{1}{2}\right) \right) \right) \\
&= \frac{B(H+1/2, H+1/2)}{\sin(\pi H)} - \frac{1}{2H}
\end{aligned}$$

となり、式(53)の結果に一致する²³。もちろん、この値は $0 < H < 1$ に対して有限である。これにより、 $\gamma = 1$ となるような $C_{\alpha\beta,H}$ が選べるか否かは、 $H < 3/2 - 1/\alpha$ を満たすか否かによることがわかった。

これらの結果をまとめると、式(50)で表すことができる非整数安定過程 $L_{\alpha\beta,H}(t)$ は、 $\alpha = 2$ の非整数ブラウン運動の場合と $H = 1/2$ の安定過程の場合と、 $0 < H < 3/2 - 1/\alpha$ を満たし、なおかつ $H < 1/2$ ならば $\beta = 0$ を満たす場合であるということになる。図 13 には、これらの条件を満たすように生成した非整数安定過程の見本関数を示した。 $H < 1/2$ であるとき負の自己相関が生じており、不連続な点が生じた直後には元の水準に戻す方向への力が強く働いていることがわかる。

²³ ここでは $\alpha = 2$ のケースを計算したが、一般に $\alpha > 0$ と $-1/\alpha < d < 1 - 1/\alpha$ に対して、

$$\int_0^\infty |(s+1)^d - s^d|^\alpha ds = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} B(-ad - 1, kd + 1) & (d > 0) \\ 0 & (d = 0) \\ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} B(-ad - 1, \alpha d - kd + 1) & (d < 0) \end{cases}$$

となる。 $\alpha \in \mathbb{N}$ ならば $k = \alpha$ まで計算すればよい。 $d = H - 1/2$ とすれば式(52)の最右辺の積分に一致し、このとき $H < 3/2 - 1/\alpha$ という H の上限から導かれる d の上限はここで指定したものに等しい。なお、 d が指定の範囲内でなくとも右辺は収束し得るが、左辺は収束しない。

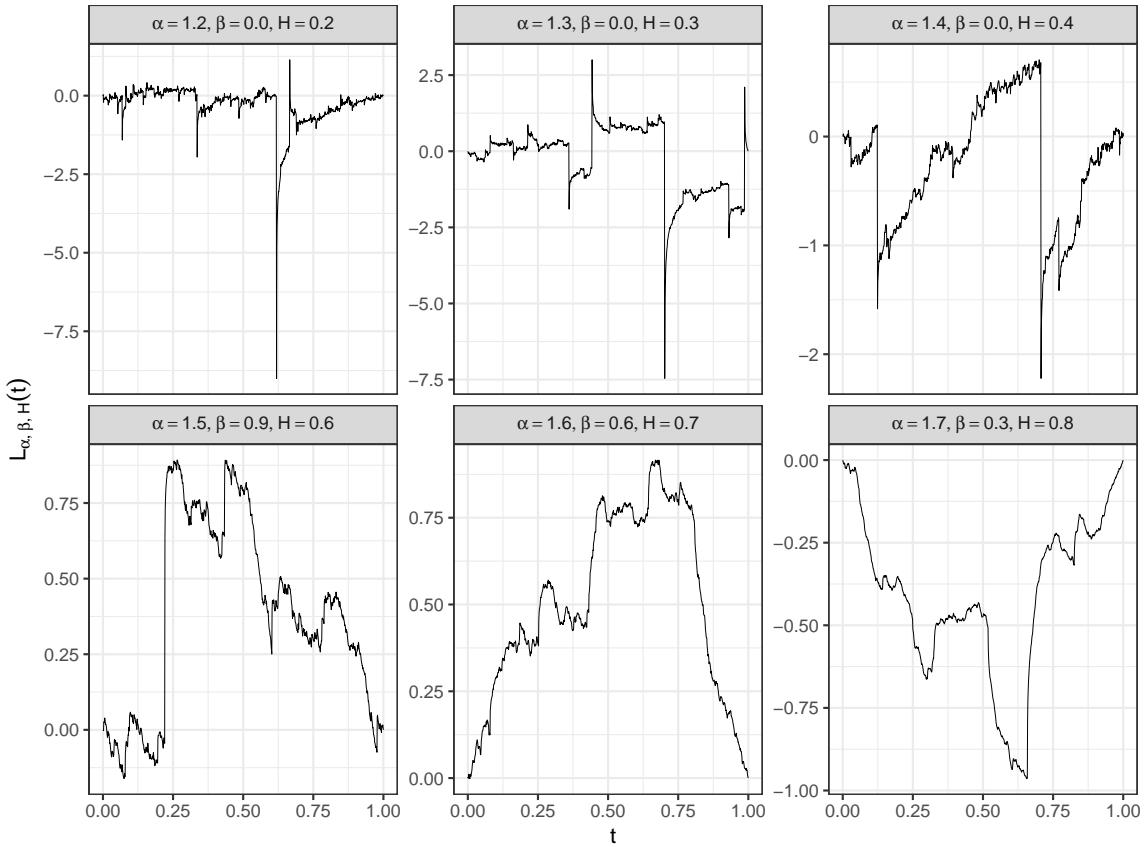


図 13 非整数安定過程の見本関数²⁴

7 フラクタル次元

7.1 ボックス次元とハウスドルフ次元

これまで自己相似過程のスケーリング指数を定めるパラメータとして、ハースト指数 H と安定分布のパラメータ α を考えてきたが、これらのパラメータはスケーリング指数を定めると同時に、非整数安定過程の見本関数のグラフのフラクタル次元を定める。したがって、グラフの次元もそれらと同様に自己相関関数やパワースペクトル密度、あるいは分布の形状に関する重要な情報を与えるものとなる。フラクタル次元は主に \mathbb{R}^n 上の有界な部分集合に対して定義される量であり、その定義には様々なものが存在するが、ここでは広く用いられるハウスドルフ次元と実際の近似的なデータからの推定が容易なボックス次元を扱い、非整数安定過程のグラフの次元について整理する。以下に述べるフラクタル次元の定義等は主に Falconer (2014) を参考している。

まず、ハウスドルフ次元やボックス次元を定義するためには、集合の δ -被覆を定義する必要がある。

定義 26 (δ -被覆). 集合 $F \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して、集合族 $\{U_k\}$ がある $\delta > 0$ について以下の条件をすべて満たすとき、 $\{U_k\}$ は F の δ -被覆 (δ -cover) であるという。

- (1) $\{U_k\}$ は F を被覆する。すなわち、 $F \subseteq \bigcup_k U_k$ である。
- (2) $\{U_k\}$ の直径は δ 以下である。すなわち、任意の k に対して、 $|U_k| = \sup \{|x - y| \mid x, y \in U_k\} \leq \delta$ である。

²⁴ 安定分布に従う乱数の生成は stabledist パッケージ (ver. 0.7-1) の rstable 関数による。また、非整数安定過程に従う乱数の生成は arfima パッケージ (ver. 1.7-0) の arfima.sim 関数による。arfima.sim 関数において引数 rand.gen に rstable 関数を与えることで生成したものである。

(3) $\{U_k\}$ は高々可算個の集合の集まりである。すなわち, $\text{card}(\{U_k\}) \leq \aleph_0$ である。

ハウスドルフ次元の定義は、この δ -被覆を用いて次のように定義されるハウスドルフ測度に基づいて与えられる。

定義 27 (ハウスドルフ測度). 非負実数 $s \geq 0$ と集合 $F \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\mathcal{H}^s(F) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_k |U_k|^s \middle| \{U_k\} \text{ is a } \delta\text{-cover of } F \right\}$$

と定義される \mathbb{R}^n 上の測度 \mathcal{H}^s を s 次元ハウスドルフ測度 (s -dimensional Hausdorff measure) という。

集合 F について、そのハウスドルフ測度 $\mathcal{H}^s(F)$ は高々 1 つの s を除いて 0 または ∞ である。実際、任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{s+\epsilon}(F) &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_k |U_k|^{s+\epsilon} \middle| \{U_k\} \text{ is a } \delta\text{-cover of } F \right\} \\ &\leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \delta^\epsilon \sum_k |U_k|^s \middle| \{U_k\} \text{ is a } \delta\text{-cover of } F \right\} = \mathcal{H}^s(F) \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^\epsilon \end{aligned}$$

であるから、 $0 \leq \mathcal{H}^s(F) < \infty$ ならば $\mathcal{H}^{s+\epsilon}(F) = 0$ であり、 ϵ の符号を反対にすれば逆の不等式が成り立つため、任意の $\epsilon < 0$ に対して、 $0 < \mathcal{H}^s(F) \leq \infty$ ならば $\mathcal{H}^{s+\epsilon}(F) = \infty$ である。とくに、もし F のハウスドルフ測度 $\mathcal{H}^s(F)$ が有限な値をとるような次元 s が存在するならば、それは一意的であり、任意の $s_- < s$ に対しては $\mathcal{H}^{s_-}(F) = \infty$ 、任意の $s_+ > s$ に対しては $\mathcal{H}^{s_+}(F) = 0$ となる。ハウスドルフ次元はこの境界となっている次元 s として定義されるものである。

定義 28 (ハウスドルフ次元). 有界な集合 $F \subset \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\dim_H(F) = \inf \{s \geq 0 | \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s \geq 0 | \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

と定義される量 $\dim_H(F)$ を F のハウスドルフ次元 (Hausdorff dimension) という。

$s = \dim_H(F)$ としたとき、 $s_- < s$ に対して $\mathcal{H}^{s_-}(F) = \infty$ であり、 $s_+ > s$ に対して $\mathcal{H}^{s_+}(F) = 0$ であることは明らかであるが、 $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ は一般には成り立たない。しかし、上述の通り、ハウスドルフ測度 $\mathcal{H}^s(F)$ が ∞ から 0 へジャンプする点は一意的であり、ハウスドルフ次元は唯一つの値に定まる。

そして、ハウスドルフ次元と同様に、ボックス次元も δ -被覆を用いて次のように定義される。

定義 29 (ボックス次元). 有界な集合 $F \subset \mathbb{R}^n$ に対して、 $N_\delta(F)$ を

$$N_\delta(F) = \min \{\text{card}(\{U_k\}) | \{U_k\} \text{ is a } \delta\text{-cover of } F\}$$

と定義する。このとき,

$$\overline{\dim}_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta)}$$

$$\underline{\dim}_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta)}$$

と定義される量 $\overline{\dim}_B(F), \underline{\dim}_B(F)$ をそれぞれ F の上ボックス次元 (upper box dimension) と下ボックス次元 (lower box dimension) という。これらの値が等しいとき,

$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta)} = \overline{\dim}_B(F) = \underline{\dim}_B(F)$$

と定義される量 $\dim_B(F)$ を F のボックス次元 (box dimension) という。

ハウスドルフ測度 $\mathcal{H}^s(F)$ が集合 F の δ -被覆に対して、その各集合の直径の s 乗和で評価していたのに対して、 $N_\delta(F)$ は集合の個数、すなわち直径の 0 乗和で評価している。したがって、任意の $s \geq 0$ と $0 < \delta < 1$ に対して、

$$\inf \left\{ \sum_k |U_k|^s \mid \{U_k\} \text{ is a } \delta\text{-cover of } F \right\} \leq N_\delta(F) \delta^s$$

である。この左辺は $\delta \rightarrow 0$ で $\mathcal{H}^s(F)$ に収束するが、ハウスドルフ次元の定義より $0 \leq s < \dim_H(F)$ であるならば $\mathcal{H}^s(F) = \infty > 1$ であるから、このとき十分小さな δ に対しては、

$$0 = \ln(1) < \ln(N_\delta(F) \delta^s) = \ln(N_\delta(F)) + s \ln(\delta)$$

が成り立つ。したがって、

$$s < \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta)} = \underline{\dim}_B(F)$$

である。 s はいくらでも $\dim_H(F)$ に近づけることができるため、 $\dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B(F)$ である。さらに、上ボックス次元と下ボックス次元の定義から明らかに $\dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F)$ である。

定義 29 では、 $N_\delta(F)$ を「 F を被覆するために必要な直径 δ 以下の集合の最小数」として定義したが、これを「整数 m_1, \dots, m_n に対して $\prod_{k=1}^n [\delta m_k, \delta(m_k + 1)]$ の形で表される一辺 δ の超立方体のうち F と交叉するものの数」と定義しても、得られる次元の値が変わらないことが知られている。実際、そのような超立方体の数を $\tilde{N}_\delta(F)$ と表すと、つまり、

$$\tilde{N}_\delta(F) = \text{card} \left\{ (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n \mid F \cap \prod_{k=1}^n [\delta m_k, \delta(m_k + 1)] \neq \emptyset \right\}$$

とすると、 F は一辺 δ の超立方体 $\tilde{N}_\delta(F)$ 個で被覆でき、その超立方体の直径は $\sqrt{n}\delta$ であるから $\tilde{N}_\delta(F) \geq N_{\sqrt{n}\delta}(F)$ であり、一方で F は直径 $\sqrt{n}\delta$ 以下の集合 $N_{\sqrt{n}\delta}(F)$ 個で被覆でき、直径 $\sqrt{n}\delta$ の集合は $\prod_{k=1}^n [\delta m_k, \delta(m_k + 1)]$ の形で表される超立方体高々 3^n 個と交叉するため、 $3^n N_{\sqrt{n}\delta}(F) \geq \tilde{N}_\delta(F)$ である。したがって、 $\sqrt{n}\delta < 1$ に対して、

$$\frac{\ln(N_{\sqrt{n}\delta}(F))}{-\ln(\sqrt{n}\delta)} \leq \frac{\ln(\tilde{N}_\delta(F))}{-\ln(\sqrt{n}\delta)} = \frac{\ln(\tilde{N}_\delta(F))}{-\ln(\delta) - \ln(\sqrt{n})} \leq \frac{\ln(3^n N_{\sqrt{n}\delta}(F))}{-\ln(\sqrt{n}\delta)} = \frac{\ln(N_{\sqrt{n}\delta}(F))}{-\ln(\sqrt{n}\delta)} + \frac{\ln(3^n)}{-\ln(\delta) - \ln(\sqrt{n})}$$

である。 $-\ln(\sqrt{n})$ は定数であり、 $\delta \rightarrow 0$ で $-\ln(\delta) \rightarrow \infty$ であるから、上極限をとれば、

$$\overline{\dim}_B(F) \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(\tilde{N}_\delta(F))}{-\ln(\delta)} \leq \overline{\dim}_B(F)$$

である。下極限も同様であり、 $N_\delta(F)$ の代わりに $\tilde{N}_\delta(F)$ を用いても同じ結果が得られることがわかる。さらに、関数 $f(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ について、 $f(t)$ の区間 $[t_0, t_1]$ における値域の幅を

$$R_f[t_0, t_1] = \sup \{ |f(s_1) - f(s_0)| \mid s_0, s_1 \in [t_0, t_1] \}$$

と表すと、任意の $0 < \delta < 1$ に対して、

$$\tilde{N}_\delta(\text{graph}(f)) \leq 2 \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil + \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{\lceil 1/\delta \rceil - 1} R_f[\delta k, \delta(k+1)] \quad (54)$$

が成り立つことがわかる。ここで、 $\text{graph}(f)$ は $f(t)$ のグラフであり、この場合 $\text{graph}(f) = \{(t, f(t)) \mid t \in [0, 1]\}$ である。なお、 $2 \lceil 1/\delta \rceil$ の項は、各区間 $[\delta k, \delta(k+1)]$ における $f(t)$ の値域の両端が、ちょうど δ の整数倍になるとは限らないことによる。式 (54) は非整数ブラウン運動や非整数安定過程のグラフの次元を上から評価する際に重要になる。

定理 30. 非整数ブラウン運動 $B_H(t)$ の見本関数を $[0, 1]$ に制限したとき, そのグラフのハウスドルフ次元およびボックス次元は確率 1 で高々 $2 - H$ である.

証明. 表記を簡単にするため, $B_H(t)$ の見本関数の $[0, 1]$ への制限を $\tilde{B}_H(t)$ と表す. Kolmogorov の連続性定理(定理 6)と式(9)より, $\tilde{B}_H(t)$ は確率 1 で任意の $0 < \gamma < H$ に対して指数 γ で局所 Hölder 連続であったから, ある定数 C と $0 < h < 1$ が存在して, $|t_1 - t_0| < h$ を満たす任意の t_0, t_1 に対して,

$$R_{\tilde{B}_H}[t_0, t_1] \leq C |t_1 - t_0|^\gamma$$

が確率 1 で成り立つ. 式(54)を用いれば, 任意の $0 < \delta < h < 1$ に対して,

$$\tilde{N}_\delta(\text{graph}(\tilde{B}_H)) \leq 2 \left[\frac{1}{\delta} \right] + \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{\lceil 1/\delta \rceil - 1} C |\delta(k+1) - \delta k|^\gamma = \left[\frac{1}{\delta} \right] (2 + C \delta^{\gamma-1})$$

となる. ここで, $\lceil 1/\delta \rceil < 1 + 1/\delta$ かつ $0 < \delta < 1$ であるから,

$$\tilde{N}_\delta(\text{graph}(\tilde{B}_H)) < (1 + \delta^{-1})(2 + C \delta^{\gamma-1}) = 2 + 2\delta^{-1} + C \delta^{\gamma-1} + C \delta^{\gamma-2} \leq C_0 \delta^{\gamma-2}$$

となるように定数 C_0 を選ぶことができる. したがって,

$$\ln(\tilde{N}_\delta(\text{graph}(\tilde{B}_H))) < -(2 - \gamma) \ln(\delta) + \ln(C_0)$$

であり, 両辺を $-\ln(\delta)$ で割り, $\delta \rightarrow 0$ の上極限をとれば,

$$\overline{\dim}_B(\text{graph}(\tilde{B}_H)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(\tilde{N}_\delta(\text{graph}(\tilde{B}_H)))}{-\ln(\delta)} < 2 - \gamma$$

である. これは $0 < \gamma < H$ を満たす任意の γ に対して確率 1 で成り立つため, 確率 1 で

$$\dim_H(\text{graph}(\tilde{B}_H)) \leq \underline{\dim}_B(\text{graph}(\tilde{B}_H)) \leq \overline{\dim}_B(\text{graph}(\tilde{B}_H)) \leq 2 - H$$

である. □

非整数ブラウン運動のグラフの次元に関するこの評価は, 非整数ブラウン運動が確率 1 で局所 Hölder 連続であることを利用しており, この方法を安定過程や非整数安定過程の場合に応用することはできない. なお, 非整数安定過程は $H > 1/2$ のときに限り $0 < \gamma < H - 1/2$ に対して確率 1 で指数 γ で局所 Hölder 連続であったが, これをを利用してグラフの次元を同様に評価すると, それが高々 $2 - H + 1/2$ であることになる. しかし, 後述するように実際の次元はそれよりも小さい. また, 非整数ブラウン運動のグラフの次元は実際には確率 1 で $2 - H$ に等しいが, これを示すためには下からの評価を与える必要がある. 定理 30 と異なり, グラフの次元の下からの評価は非整数安定過程に対しても非整数ブラウン運動と同様の方法で行うことができるが, その証明には次の定理を用いることになる.

定理 31. 集合 $F \subset \mathbb{R}^n$ に対して, F 上のある測度 μ が存在して, $0 < \mu(F) < \infty$ かつ, ある $s \geq 0$ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-s} d\mu(x) d\mu(y) < \infty \tag{55}$$

を満たすならば, $\dim_H(F) \geq s$ である.

証明. 詳細な証明は Falconer (2014) を参照. まず, $\tilde{F} = \{x \in F \mid \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mu(B_r(x)) r^{-s} = 0\}$ としたとき $\mu(\tilde{F}) = \mu(F)$ であることを示す. ただし, $B_r(x)$ は中心 x 半径 r の開球である. もし $x \in F \setminus \tilde{F}$ が存在するならば, ある定数 $c_x > 0$ が存在して, 任意の $\delta > 0$ に対して $\mu(B_r(x)) r^{-s} \geq c_x$ となるような $0 < r < \delta$ が選べる. したがって, 0 に収束する狭義単調減少列 $\{r_k\}$ が存在して, すべての k に対して $\mu(B_{r_k}(x)) \geq c_x r_k^{-s}$ となる. さらに, 式(55)を満たすためにはすべての $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mu(\{x\}) = 0$ でなければならないから, ある定数

$0 < C < 1$ に対して, $\{r_k\}$ の部分列 $\{\tilde{r}_k\}$ が存在して, すべての k に対して $\mu(B_{\tilde{r}_k}(x) \setminus B_{q_k}(x)) \geq C c_x \tilde{r}_k^s$ となるような $\tilde{r}_{k+1} < q_k < \tilde{r}_k$ を選べる. このとき, $\{B_{\tilde{r}_k}(x) \setminus B_{q_k}(x)\}$ は互いに素であり, すべての $y \in B_{\tilde{r}_k}(x) \setminus B_{q_k}(x)$ に対して $|x - y| \leq \tilde{r}_k$ であるから,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-s} d\mu(y) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{\tilde{r}_k}(x) \setminus B_{q_k}(x)} |x - y|^{-s} d\mu(y) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{\tilde{r}_k}(x) \setminus B_{q_k}(x)} \tilde{r}_k^{-s} d\mu(y) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{r}_k^{-s} \mu(B_{\tilde{r}_k}(x) \setminus B_{q_k}(x)) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{r}_k^{-s} C c_x \tilde{r}_k^s = \infty \end{aligned}$$

である. 任意の $x \in F \setminus \tilde{F}$ に対してこれが成り立つため, 式(55)より,

$$\infty > \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-s} d\mu(x) d\mu(y) \geq \int_{F \setminus \tilde{F}} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-s} d\mu(x) d\mu(y) \geq \int_{F \setminus \tilde{F}} \infty d\mu(y) = \infty \mu(F \setminus \tilde{F})$$

となる. したがって, $\mu(F \setminus \tilde{F}) = 0$ でなければならず, $\mu(\tilde{F}) = \mu(F)$ である. 一方で, \tilde{F} の定め方により, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\tilde{F}_\delta = \{x \in \tilde{F} \mid \forall r \leq \delta, \mu(B_r(x)) r^{-s} < \epsilon\}$ として定める δ に対して単調な集合 \tilde{F}_δ は $\delta \rightarrow 0$ で \tilde{F} に収束する. また, 集合族 $\{U_k\}$ が \tilde{F} の δ -被覆ならば \tilde{F}_δ の δ -被覆でもあり, このとき $|U_k| \leq \delta$ かつ任意の $x \in U_k$ に対して $U_k \subseteq B_{|U_k|}(x)$ であるから, $x \in U_k \cap \tilde{F}_\delta$ が存在するならば, \tilde{F}_δ の定め方により, $\mu(U_k \cap \tilde{F}_\delta) \leq \mu(U_k) \leq \mu(B_{|U_k|}(x)) < \epsilon |U_k|^s$ となる. したがって,

$$\mu(\tilde{F}_\delta) \leq \sum_k \mu(U_k \cap \tilde{F}_\delta) < \epsilon \sum_k |U_k|^s$$

である. \tilde{F} の任意の δ -被覆 $\{U_k\}$ に対してこれが成り立つため, $\delta \rightarrow 0$ の極限をとれば,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(\tilde{F}_\delta) = \mu(\tilde{F}) = \mu(F) < \epsilon \mathcal{H}^s(\tilde{F})$$

である. $0 < \mu(F) < \infty$ であり, $\epsilon > 0$ は任意に選べるため, $\mathcal{H}^s(\tilde{F}) = \infty$ である. $\mathcal{H}^s(F) \geq \mathcal{H}^s(\tilde{F})$ は明らかであるから, $\dim_H(F) \geq s$ である. \square

これを用いることで, 非整数安定過程のグラフの次元が次のように与えられる.

定理 32. $1 < \alpha \leq 2$ の非整数安定過程 $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ の見本関数を $[0, 1]$ に制限したとき, そのグラフのハウスドルフ次元およびボックス次元は確率 1 で $2 - H - 1/\alpha + 1/2$ である.

証明. $\alpha = 2$ の非整数ブラウン運動に対する証明と $H = 1/2, \beta = 0$ の対称安定過程に対する部分的な証明は Falconer (2014) を参照. 以下はその証明を応用したものである. 表記を簡単にするため, $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ の見本関数の $[0, 1]$ への制限を $\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(t)$ と表す. まず, 上からの評価を与える. $1 < \alpha \leq 2$ のとき, 安定分布には期待値が存在したから, $\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(t)$ の値域の幅 $R_{\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}}[0, 1]$ の期待値は有限である. また, $\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(t)$ は $(H + 1/\alpha - 1/2)$ -sssi であるから, 任意の自然数 $m \in \mathbb{N}$ と $0 \leq k \leq 2^m - 1$ に対して,

$$E[R_{\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}}[2^{-m}k, 2^{-m}(k+1)]] = E[R_{\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}}[0, 2^{-m}]] = (2^{-m})^{H+1/\alpha-1/2} E[R_{\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}}[0, 1]] < \infty$$

であり, 式(54)より,

$$E[\tilde{N}_{2^{-m}}(\text{graph}(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}))] \leq E\left[2^{m+1} + 2^m \sum_{k=0}^{2^m-1} R_{\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}}[2^{-m}k, 2^{-m}(k+1)]\right] = 2^{m+1} + (2^{-m})^{H+1/\alpha-1/2-2} E[R_{\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}}[0, 1]]$$

である. $R_{\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}}[0, 1] < \infty$ であるから, ある定数 C_0 が存在して,

$$E[\tilde{N}_{2^{-m}}(\text{graph}(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}))] < C_0 (2^{-m})^{H+1/\alpha-1/2-2}$$

であり, 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$E[\tilde{N}_{2^{-m}}(\text{graph}(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H})) (2^{-m})^{2-H-1/\alpha+1/2+\epsilon}] < C_0 (2^{-m})^\epsilon$$

となる. したがって,

$$E \left[\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{N}_{2^{-m}} \left(\text{graph} \left(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H} \right) \right) (2^{-m})^{2-H-1/\alpha+1/2+\epsilon} \right] \leq C_0 \sum_{m=1}^{\infty} (2^{-m})^{\epsilon} = \frac{C_0}{2^{\epsilon}-1} < \infty$$

である. 和の期待値が収束しているため, 確率 1 で $m \rightarrow \infty$ のとき $\tilde{N}_{2^{-m}} \left(\text{graph} \left(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H} \right) \right) (2^{-m})^{2-H-1/\alpha+1/2+\epsilon} \rightarrow 0$ となる. とくに, 確率 1 である自然数 M が存在して, 任意の $m \geq M$ に対して,

$$\tilde{N}_{2^{-m}} \left(\text{graph} \left(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H} \right) \right) (2^{-m})^{2-H-1/\alpha+1/2+\epsilon} < 1$$

となるから,

$$\frac{\ln \left(\tilde{N}_{2^{-m}} \left(\text{graph} \left(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H} \right) \right) \right)}{-\ln (2^{-m})} < 2 - H - 1/\alpha + 1/2 + \epsilon$$

である. 一方で, 十分小さな $\delta > 0$ に対して, $2^{-m-1} \leq \delta < 2^{-m}$ となるように自然数 m を選べるが, そのとき,

$$\tilde{N}_{\delta} \left(\text{graph} \left(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H} \right) \right) \leq \tilde{N}_{2^{-m-1}} \left(\text{graph} \left(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H} \right) \right)$$

であるから,

$$\frac{\ln \left(\tilde{N}_{\delta} \left(\text{graph} \left(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H} \right) \right) \right)}{-\ln (\delta)} \leq \frac{\ln \left(\tilde{N}_{2^{-m-1}} \left(\text{graph} \left(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H} \right) \right) \right)}{-\ln (2^{-m})} = \frac{\ln \left(\tilde{N}_{2^{-m-1}} \left(\text{graph} \left(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H} \right) \right) \right)}{-\ln (2^{-m-1}) - \ln (2)}$$

であり, $\delta \rightarrow 0$ の上極限をとれば,

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B \left(\text{graph} \left(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H} \right) \right) &= \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\tilde{N}_{\delta} \left(\text{graph} \left(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H} \right) \right) \right)}{-\ln (\delta)} \\ &\leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\tilde{N}_{2^{-m-1}} \left(\text{graph} \left(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H} \right) \right) \right)}{-\ln (2^{-m-1}) - \ln (2)} \\ &= \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\tilde{N}_{2^{-m}} \left(\text{graph} \left(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H} \right) \right) \right)}{-\ln (2^{-m})} < 2 - H - 1/\alpha + 1/2 + \epsilon \end{aligned} \tag{56}$$

を得る. $\epsilon > 0$ は任意に選べるため, 確率 1 で

$$\dim_H \left(\text{graph} \left(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H} \right) \right) \leq \underline{\dim}_B \left(\text{graph} \left(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H} \right) \right) \leq \overline{\dim}_B \left(\text{graph} \left(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H} \right) \right) \leq 2 - H - 1/\alpha + 1/2$$

である. $\alpha = 2$ のとき, この結果は定理 30 に等しい. 次に, 定理 31 を用いて下からの評価を与える. $\text{graph} \left(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H} \right)$ 上の測度 μ を $\mu(A) = \mathcal{H}^1 \left(\{t \in [0, 1] \mid (t, \tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(t)) \in A\} \right)$ と定める. \mathbb{R} の部分集合に対する 1 次元ハウスドルフ測度 \mathcal{H}^1 が 1 次元ルベーグ測度 \mathcal{L} に等しいことに注意すれば, μ は $\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(t)$ が集合 A を通過する時間であることがわかる. したがって,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |x - y|^{-s} d\mu(x) d\mu(y) &= \int_0^1 \int_0^1 \left| (t_x, \tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(t_x)) - (t_y, \tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(t_y)) \right|^{-s} dt_x dt_y \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left((t_x - t_y)^2 + (\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(t_x) - \tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(t_y))^2 \right)^{-s/2} dt_x dt_y \end{aligned} \tag{57}$$

である. $0 < \mu \left(\text{graph} \left(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H} \right) \right) = 1 < \infty$ であるから, 式 (57) が有限ならば定理 31 から $\dim_H(F) \geq s$ が得られる. そして, 式 (57) の期待値が有限ならば, 式 (57) 自体は確率 1 で有限である. そのことを確認するために, まず被積分関数の期待値を評価する. $\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(t)$ は定常増分であるから, $h = |t_x - t_y|$ とおけば, $(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(t_x) - \tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(t_y))^2 \stackrel{d}{=} \tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(h)^2$ であり, 非整数安定過程の定義より, $\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(h) \sim S(\alpha, \beta, h^{H+1/\alpha-1/2}, 0)$ であるから, その確率密度関数 $f_{\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(h)}(x)$ は特性関数のフーリエ変換として, 次のように評価できる.

$$\begin{aligned}
f_{\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(h)}(x) &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{\phi_{\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(h)}(u)\}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iux) \phi_{\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(h)}(u) du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iux) \exp\left(-\left(h^{H+1/\alpha-1/2}\right)^{\alpha} |u|^{\alpha} \left(1 - i\beta \operatorname{sgn}(u) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)\right) du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\left(ux - \left(h^{H+1/\alpha-1/2}\right)^{\alpha} |u|^{\alpha} \beta \operatorname{sgn}(u) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)\right) \exp\left(-\left(h^{H+1/\alpha-1/2}\right)^{\alpha} |u|^{\alpha}\right) du \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\left(h^{H+1/\alpha-1/2}\right)^{\alpha} u^{\alpha}\right) du \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-z) \frac{1}{\alpha} h^{-H-1/\alpha+1/2} z^{1/\alpha-1} dz = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) h^{-H-1/\alpha+1/2} = \frac{1}{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) h^{-H-1/\alpha+1/2}
\end{aligned}$$

ここで、不等号を除いて 5 つ目の等号は $z = (h^{H+1/\alpha-1/2})^{\alpha} u^{\alpha}$ の変数変換による。また、不等号は、被積分関数の最初の指數関数の実部が常に 1 以下であることから、非常に大雑把な評価を行っている。なお、被積分関数がエルミート関数であるから、つまり、実部が偶関数であり虚部が奇関数であるから、虚部は無視できる。結果的に、確率密度関数 $f_{\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(h)}(x)$ は右辺の定数関数によって上から押さえられている。これを用いれば、式 (57) の右辺の被積分関数の期待値は、 $s > 1$ のとき、

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\left(t_x - t_y\right)^2 + \left(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(t_x) - \tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(t_y)\right)^2\right)^{-s/2}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(h^2 + \tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(h)^2\right)^{-s/2}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(h^2 + x^2\right)^{-s/2} f_{\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(h)}(x) dx \\
&\leq \frac{2}{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) h^{-H-1/\alpha+1/2} \int_0^{\infty} \left(h^2 + x^2\right)^{-s/2} dx = \frac{2}{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) h^{-H-1/\alpha+1/2} \int_1^0 \left(\frac{h^2}{z}\right)^{-s/2} \left(-\frac{h}{2} \left(\frac{1}{z} - 1\right)^{-1/2} z^{-2}\right) dz \\
&= \frac{1}{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) h^{1-H-1/\alpha+1/2-s} \int_0^1 z^{s/2-2} \left(\frac{1}{z} - 1\right)^{-1/2} dz = \frac{1}{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) h^{1-H-1/\alpha+1/2-s} \int_0^1 z^{(s-1)/2-1} (1-z)^{1/2-1} dz \\
&= \frac{1}{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) h^{1-H-1/\alpha+1/2-s} B\left(\frac{s-1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\Gamma((s-1)/2)}{\Gamma(s/2)} h^{1-H-1/\alpha+1/2-s}
\end{aligned}$$

と評価できる。ここで、不等号を除いて 3 つ目の等号は $z = h^2/(x^2 + h^2)$ の変数変換による。したがって、 $1 < s < 2 - H - 1/\alpha + 1/2$ のとき、

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |x - y|^{-s} d\mu(x) d\mu(y)\right] \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{E}\left[\left(\left(t_x - t_y\right)^2 + \left(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(t_x) - \tilde{L}_{\alpha,\beta,H}(t_y)\right)^2\right)^{-s/2}\right] dt_x dt_y \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\Gamma((s-1)/2)}{\Gamma(s/2)} \int_0^1 \int_0^1 |t_x - t_y|^{1-H-1/\alpha+1/2-s} dt_x dt_y \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\Gamma((s-1)/2)}{\Gamma(s/2)} \int_0^1 \int_{-t_y}^{1-t_y} |r|^{1-H-1/\alpha+1/2-s} dr dt_y \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\Gamma((s-1)/2)}{\Gamma(s/2)} \frac{1}{2 - H - 1/\alpha + 1/2 - s} \int_0^1 \left(t_y^{2-H-1/\alpha+1/2-s} + (1-t_y)^{2-H-1/\alpha+1/2-s}\right) dt_y \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\Gamma((s-1)/2)}{\Gamma(s/2)} \frac{1}{2 - H - 1/\alpha + 1/2 - s} \frac{1}{3 - H - 1/\alpha + 1/2 - s} < \infty
\end{aligned}$$

である。期待値が有限であるから、このとき式 (57) は確率 1 で有限であり、 s はいくらでも $2 - H - 1/\alpha + 1/2$ に近づけることができるため、定理 31 より、確率 1 で $\dim_H(F) \geq 2 - H - 1/\alpha + 1/2$ である。上からの評価と合わせれば、確率 1 で

$$\dim_H(\operatorname{graph}(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H})) = \dim_B(\operatorname{graph}(\tilde{L}_{\alpha,\beta,H})) = 2 - H - 1/\alpha + 1/2$$

となる。□

本稿で後に実際のデータを使って推定する次元はボックス次元であるが、定理 32 の結果は、推定対象の時系列が $1 < \alpha \leq 2$ の非整数安定過程の観測値であったときに、推定しようとしているボックス次元が確かに存在すること、そして、それがハウスドルフ次元に等しいことを保証している。また、 $L_{\alpha,\beta,H}(t)$ のスケーリング指数を s とすると $s = H + 1/\alpha - 1/2$ であったが、これに対してグラフの次元は $2 - s$ となっている。定理 32 では $0 < \alpha \leq 1$ のケースについて触れていないが、このことから、それらのケースにおいてもグラフの次元は $2 - s$ であるように思われる。しかし、必ずしもそうではない。とくに、関数のグラフの次元は一般に 1 を下回ることがない。実際、任意の関数 $f(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ について、そのグラフの任意の δ -被覆はその直径の総和が必ず 1 以上になるため、 $\mathcal{H}^1(\text{graph}(f)) > 0$ であり、 $\dim_H(\text{graph}(f)) \geq 1$ である。したがって、 $s \geq 1$ のとき、すなわち $H = 1/2$ かつ $0 < \alpha \leq 1$ の安定過程であるとき、グラフの次元が $2 - s$ となることはなく、Falconer (2014) によれば、このグラフのハウスドルフ次元とボックス次元は確率 1 で 1 であるという。

8 パラメータの推定

非整数安定過程は自己相似過程の非常に大きなグループであると考えられる。とくに、 H -sssi の定義からその確率過程が従う分布は厳密に安定であることが要求されるため、安定分布以外の厳密に安定な分布が存在しない限り、非整数安定過程とそのスケールを変えた確率過程以外の H -sssi な自己相似過程は考え難い。本稿の主旨は、株価の変動を自己相似過程によってモデル化し、そのパラメータを推定することであったが、ここまで議論から、推定すべきパラメータはハースト指数 H 、安定分布のパラメータ α, β 、そして、非整数安定過程を仮定することでそれらの値から定まるグラフの次元やスケーリング指数であることになる。

式 (1) の再掲になるが、本稿では時点 t における株価を $S(t)$ としたとき、ある定数 μ と $\sigma > 0$ を用いて、

$$\ln(S(t)) - \ln(S(0)) = \mu t + \sigma X(t)$$

として得られる過程 $X(t)$ が自己相似過程、とくに非整数安定過程に従うと考えて推定を行う。ここで、 $X(t)$ が非整数安定過程に従い、なおかつ期待値が存在するならば $E[X(t)] = 0$ であるから、 μ は単位時間あたりの $S(t)$ の対数増分の期待値である。また、 $X(t)$ にどのような自己相関構造があったとしても、期待値の線形性から実際に観測された株価の対数増分の平均は μ の推定量として不偏性を失わない。したがって、実際には株価の対数増分から平均を引いた系列の累積和として $\sigma X(t)$ の時系列データを得ることになる。さらに、非整数安定過程とスケールの等しい過程を得るために σ を推定する必要があるが、以下に述べる推定方法はいずれも推定に用いる時系列の定数倍に対して不变であるから、非整数安定過程にスケールを一致させる必要はない。つまり、 $\{S_t\}_{0 \leq t \leq N}$ を等間隔な $N + 1$ 個の時点で観測された株価の時系列としたとき、パラメータ推定の対象となる時系列データ $\{X_t\}_{0 \leq t \leq N}$ は、

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{i=1}^t \left((\ln(S_i) - \ln(S_{i-1})) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\ln(S_j) - \ln(S_{j-1})) \right) \\ &= (\ln(S_t) - \ln(S_0)) - \frac{t}{N} (\ln(S_N) - \ln(S_0)) = \ln \left(\frac{S_t}{S_0} \left(\frac{S_0}{S_N} \right)^{t/N} \right) \end{aligned}$$

として得られる。なお、 $t = 0$ のとき空和をとることになるが、 $X_0 = 0$ である。また、ここであえて標本数を $N + 1$ と表したのは、以下の推定方法の多くが自己相似過程が仮定される時系列の増分に対して様々な処理を行うことになるためである。以下では、 $\{X_t\}$ を一貫してそのように得られる標本数 $N + 1$ の時系列データとして扱い、その増分を $\{Y_t\}_{1 \leq t \leq N}$ と表すこととする。つまり、 $Y_t = X_t - X_{t-1}$ であり、 $\{Y_t\}$ の標本数は N である。

8.1 安定分布のパラメータの推定

一般に、安定分布に従う確率変数の標本からそのパラメータを推定することは、その推定精度と計算時間の両方の面において非常に難しい問題であったが、近年、比較的高速かつ高精度に推定する方法が開発

された。それが Royuela-del-Val, Simmross-Wattenberg and Alberola-López (2017) による推定方法である。この方法に従って与えられた時系列データから推定値を計算する関数が `libstableR` パッケージ (ver. 1.0.2) に `stable_fit_mle2d` 関数として実装されており、本稿ではこの関数を用いて安定分布のパラメータを推定することにする。つまり、 $\{X_t\}$ の増分 $\{Y_t\}$ に対してこの関数を用いることで推定値を得る。なお、この推定方法については詳述しないが、基本的には最尤法に基づいて推定するものである。

しかし、これはあくまで安定分布に従う確率変数の標本、すなわち独立に同一の安定分布に従う確率変数列の観測値からパラメータを推定するものであり、 $\{Y_t\}$ は $H = 1/2$ であることが認められない限り独立性が保証されない。そこで、 $\{Y_t\}$ が独立でないことが推定値にどのような影響を及ぼすのかを乱数を用いて観察しておこう。非整数安定過程に従う乱数を生成することもまた容易ではないが、ここでは `arfima` パッケージ (ver. 1.7-0) の `arfima.sim` 関数を用いて生成する。`arfima.sim` 関数は特定のハースト指数 H をもつ確率過程の増分や後述する ARFIMA モデルに従う乱数を生成する関数であり、その引数 `rand.gen` には系列を生成するために使う元の乱数を生成する関数を指定できる。この `rand.gen` に安定分布に従う乱数を生成する関数である `stabledist` パッケージ (ver. 0.7-1) の `rstable` 関数を与えることで、非整数安定過程に従う乱数が生成できる。なお、図 13 はそのようにして生成した非整数安定過程のグラフであった。

パラメータ α, β, H の各組に対して標本数 5040 の乱数を 1000 系列ずつ生成した。 α は 1.0 から 2.0 までを 0.2 刻みで、 β は 0.0 から 0.8 までを 0.4 刻みで、 H は 0.1 から 0.9 までを 0.1 刻みで選び、これらの組み合わせのうち有効なもの、すなわち、 $\alpha = 1$ または $0 < \alpha < 2$ かつ $H < 1/2$ ならば $\beta = 0$ であって、さらに $H < 3/2 - 1/\alpha$ を満たす組み合わせに制限した。さらに、 $\alpha = 2$ のとき β を変えても分布が変わらないため、 $\alpha = 2$ ならば $\beta = 0$ に制限した。その結果、パラメータの組の数は 72 となる。なお、生成される乱数は非整数安定過程の増分であり、この標本数 5040 は非整数安定過程に従う乱数の個数ではなく、利用できる増分の個数を示す。また、5040 という標本数を選んだ理由は、後述する他の推定方法に対しても同じ乱数を用いて推定結果の分布を観察するためであり、それらの推定方法の多くは時系列データを短い期間で分割する必要があるためである。5040 という数は 19 番目の高度合成数であり²⁵、多くの約数をもつため、データを分割しやすい。以下、この標本数 5040 の非整数安定過程に従う乱数を 72 通りのパラメータに対して 1000 系列ずつ生成したデータセットを、単に非整数安定過程の乱数セットとよぶことにする。

この非整数安定過程の乱数セットに対して、`stable_fit_mle2d` 関数を用いて安定分布のパラメータ α, β を計算した。 α, β, H ごとに 1000 個の推定値が得られるが、それを箱ひげ図によって示したものが図 14 と図 15 である。 α の推定結果である図 14 をみると、推定値は H や β によらず、真の値に非常に近い値をとっていることがわかる。とくに $H < 1/2$ の場合、その推定精度は $H = 1/2$ の場合と同等であるようである。一方で、 $H > 1/2$ の場合にはわずかに過大評価される傾向にあるようであり、推定値のばらつきも大きくなっている。 β の推定結果である図 15 では、 H が大きいときのばらつきが非常に大きくなっているが、これは α が大きいほど β が分布の形状に与える影響が小さくなるためであると考えられる。また、分布の中心は、 α と同様に $H > 1/2$ のとき過大評価されながらも、おおむね真の値の付近にある。これらの結果から、 $\{X_t\}$ が $H \neq 1/2$ の非整数安定過程に従っていたとしても、 $H < 1/2$ ならば十分な精度でパラメータ α, β を推定でき、 $H > 1/2$ であっても、ある程度の標本数があれば、少なくとも α に関しては意味のある結果が得られることがわかる。

なお、安定分布のパラメータ α は $\alpha > 1$ であることが明らかならば、グラフの次元とハースト指数との関係を用いてそれらの推定値から計算することもできる。以下に述べるような方法でグラフの次元やハースト指数を実際に推定した後には、そこから計算される α についても調べていくことにする。

²⁵ 高度合成数 (highly composite number) とは、自身よりも小さないずれの自然数よりも約数の数が多い自然数のことであり、5040 は 60 個の約数をもつ。さらに、5040 は 8 番目の優高度合成数 (superior highly composite number) でもあり、ある実数 ϵ が存在して、 $\sigma_0(n)$ を自然数 n の約数の数としたとき、任意の自然数 n に対して $\sigma_0(5040)/5040^\epsilon = 60/5040^\epsilon \geq \sigma_0(n)/n^\epsilon$ となる。実際、任意の $0.2891 < \epsilon < 0.3219$ に対して、この関係が満たされる。

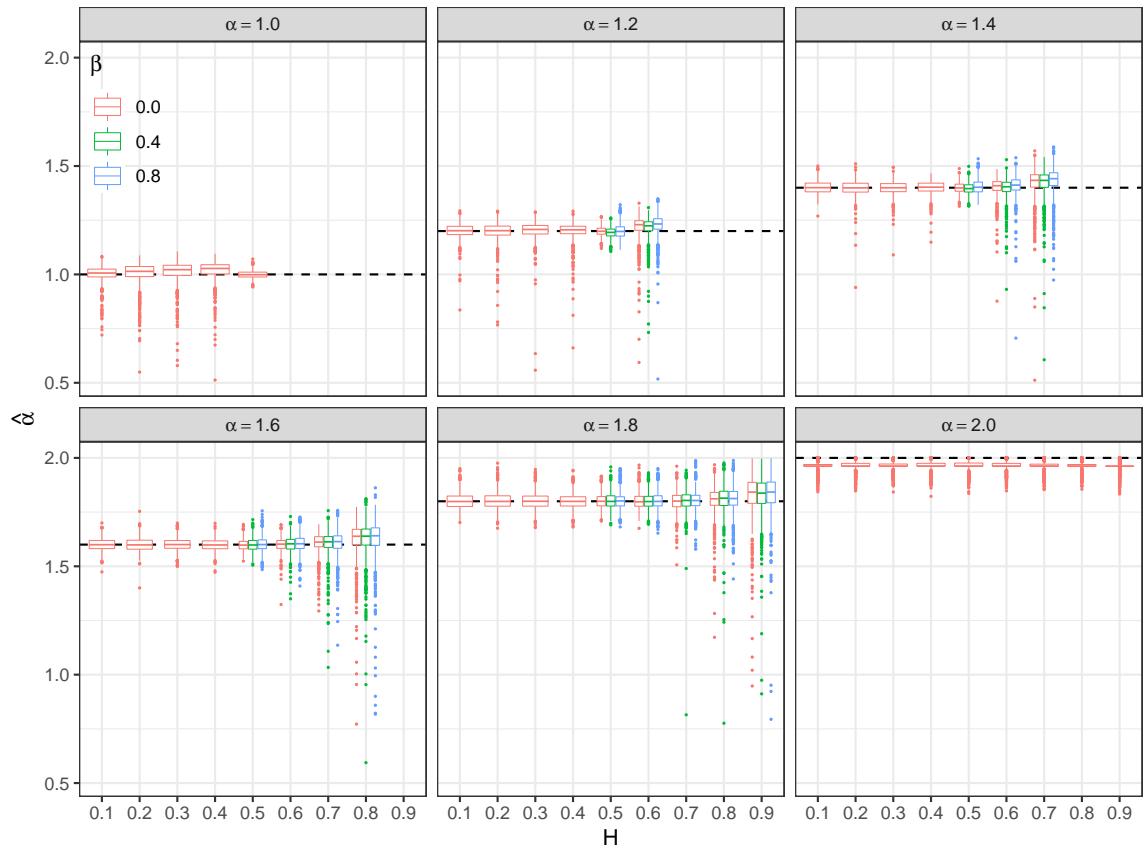


図 14 非整数安定過程の乱数セットのパラメータ α の推定値

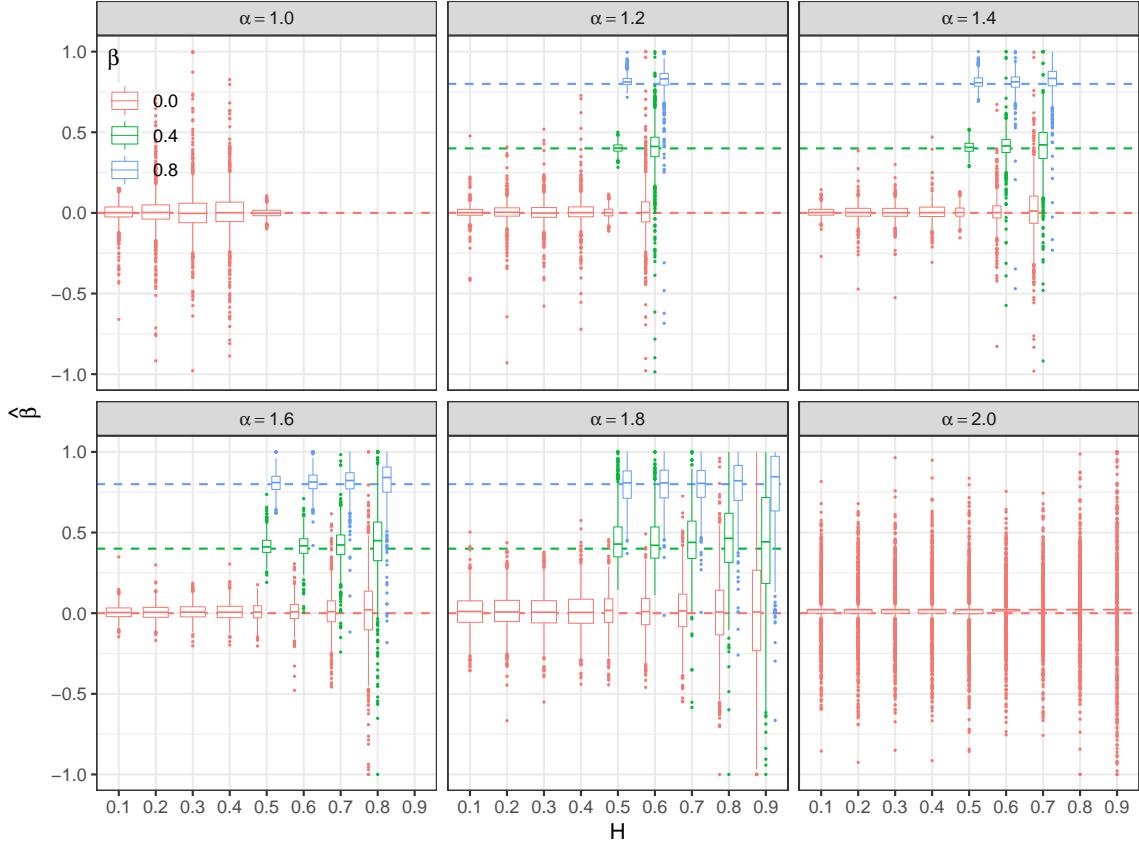


図 15 非整数安定過程の乱数セットのパラメータ β の推定値

8.2 ハースト指数の推定

次に、ハースト指数の推定方法について述べる。ハースト指数は確率過程の自己相関関数やパワースペクトル密度に基づいて定まるパラメータであり、それらが幂乗則に従うことを利用した様々な推定方法が知られている。

8.2.1 分散を用いる方法

非整数ブラウン運動についていえば、ハースト指数はスケーリング指数に等しく、ハースト指数 H に対して分散が時間の $2H$ 乗に比例していた。したがって、単純に時間間隔を変えながら増分の分散を推定し、その時間間隔の対数に対する分散の推定値の対数の線形回帰係数を計算すれば、その $1/2$ 倍がハースト指数の推定値となると思われる。つまり、 $\{X_t\}_{0 \leq t \leq N}$ の増分 $\{Y_t\}_{1 \leq t \leq N}$ に対して、次のような計算を行う。

まず、時間間隔 n を $N/2$ 以下の N の約数の中から選び、 $\{X_t\}$ の時間間隔 n の増分、すなわち $\{Y_t\}$ を n 個ずつ足し合わせた値を計算し、その系列を $\{Z_{n,t}\}_{1 \leq t \leq N/n}$ とおく。つまり、

$$Z_{n,t} = \sum_{k=1}^n Y_{k+n(t-1)}$$

である。このとき、 N の約数でない n を選ぶと、 $\{Y_t\}$ の一部が $\{Z_{n,t}\}$ に含まれないことになり、とくに剩余が大きい場合に都合が悪い。そして、この $\{Z_{n,t}\}$ の分散 $\hat{\sigma}_n^2$ を計算する。 $\hat{\mu}_n$ を $\{Z_{n,t}\}$ の平均とすれば、

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{N/n - 1} \sum_{t=1}^{N/n} (Z_{n,t} - \hat{\mu}_n)^2 = \frac{1}{N/n - 1} \left(\left(\sum_{t=1}^{N/n} Z_{n,t}^2 \right) - \frac{N}{n} \hat{\mu}_n^2 \right)$$

と計算できるが、 $\{Y_t\}$ の定義よりその平均が 0 であることに注意すれば、

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{N/n} \sum_{t=1}^{N/n} Z_{n,t} = \frac{n}{N} \sum_{t=1}^{N/n} \sum_{k=1}^n Y_{k+n(t-1)} = \frac{n}{N} \sum_{t=1}^N Y_t = 0$$

であるから、

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{N/n - 1} \sum_{t=1}^{N/n} Z_{n,t}^2 = \frac{n}{N - n} \sum_{t=1}^{N/n} Z_{n,t}^2$$

である。この $\hat{\sigma}_n^2$ を様々な n に対して計算し、 $\ln(n)$ に対する $\ln(\hat{\sigma}_n^2)$ の線形回帰係数を最小二乗法で求めればよい。 $\hat{\sigma}_n^2$ は n の $2H$ 乗に比例するため、回帰係数を $1/2$ 倍したものがハースト指数の推定値となる。そのように推定されたハースト指数を図表等において \hat{H}_{σ^2} と表すことにする。

しかし、この方法には問題が残る。まず、増分が正規分布に従わない非整数安定過程のときにも使用できるのかという点である。このとき、増分の分散は無限大に発散してしまい、計算される分散が非常に不安定なものになるおそれがある。また、非整数安定過程においてはハースト指数とスケーリング指数が異なるが、この方法はいずれの指数を求めるこになるのかという点である。確かに、 α が小さいとき分散の推定値は極めて不安定であるが、それはある特定の n に対して、 $\{Z_{n,t}\}$ を独立な試行として複数回観測できるとしたときに、それぞれの分散 $\hat{\sigma}_n^2$ の平均が観測を繰り返しても安定しないという意味であり、このハースト指数の推定方法において重要な点は $\hat{\sigma}_n^2$ の大きさそのものではなく、異なる n に対して計算された値との関係である。この関係性は比較的安定していることが期待される。たとえば、時間間隔を 2 倍にしたときの分散 $\hat{\sigma}_{2n}^2$ は、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{2n}^2 &= \frac{1}{N/(2n) - 1} \sum_{t=1}^{N/(2n)} Z_{2n,t}^2 = \frac{2}{N/n - 2} \sum_{t=1}^{N/(2n)} \left(\sum_{k=1}^{2n} Y_{k+2n(t-1)} \right)^2 \\ &= \frac{2}{N/n - 2} \sum_{t=1}^{N/(2n)} \left(\left(\sum_{k=1}^n Y_{k+n(2t-2)} \right) + \left(\sum_{k=1}^n Y_{k+n(2t-1)} \right) \right)^2 = \frac{2}{N/n - 2} \sum_{t=1}^{N/(2n)} (Z_{n,2t-1} + Z_{n,2t})^2 \\ &= \frac{2}{N/n - 2} \left(\left(\sum_{t=1}^{N/n} Z_{n,t}^2 \right) + 2 \left(\sum_{t=1}^{N/(2n)} Z_{n,2t-1} Z_{n,2t} \right) \right) = \frac{2n}{N - 2n} \left(\hat{\sigma}_n^2 \frac{N - n}{n} + 2 \left(\sum_{t=1}^{N/(2n)} Z_{n,2t-1} Z_{n,2t} \right) \right) \\ &= 2 \frac{N - n}{N - 2n} \left(\hat{\sigma}_n^2 + 2 \frac{n}{N - n} \left(\sum_{t=1}^{N/(2n)} Z_{n,2t-1} Z_{n,2t} \right) \right) \end{aligned}$$

一方で、 $\hat{\rho}_n$ を $\{Z_{n,t}\}$ のラグ 1 の自己相関係数の推定値として、

$$\hat{\rho}_n = 2 \frac{\sum_{t=1}^{N/(2n)} (Z_{n,2t-1} - \hat{\mu}_n)(Z_{n,2t} - \hat{\mu}_n)}{\sum_{t=1}^{N/n} (Z_{n,t} - \hat{\mu}_n)^2} = \frac{2}{\hat{\sigma}_n^2} \frac{N - n}{n} \sum_{t=1}^{N/(2n)} Z_{n,2t-1} Z_{n,2t}$$

と定義すれば、

$$\hat{\sigma}_{2n}^2 = 2 \frac{N - n}{N - 2n} \hat{\sigma}_n^2 (1 + \hat{\rho}_n)$$

となる。ただし、 $\hat{\rho}_n$ は通常の自己相関係数の定義と異なることに注意。通常は $\{Z_{n,t}\}$ を重複させて $1 \leq t \leq N/n - 1$ に対して $Z_{n,t}Z_{n,t+1}$ の和を求めるが、ここでは重複のないように計算しており、そのため全体に 2 を掛けている。これは $\{Z_{n,t}\}$ を $\{Y_t\}$ から計算するときに、重複のないように選んだためである。したがって、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\hat{\sigma}_{2n}^2}{\hat{\sigma}_n^2} = 2(1 + \hat{\rho}_n)$$

であり、標本数 N が十分大きいとき、時間間隔を 2 倍にすると $\hat{\sigma}_n^2$ の値は $2(1 + \hat{\rho}_n)$ 倍になる。 $\hat{\sigma}_n^2$ の水準は観測された $\{Y_t\}$ の分散に応じて大きく異なり得るが、時間間隔 n を変えたときの変化率はその水準によらず、ハースト指数の推定精度は自己相関係数 $\hat{\rho}_n$ の不安定さに依存する。そして、上で議論したように、非整数安

定過程のように分散が無限大の場合であっても相関係数の期待値は存在することが期待でき、標本数 N が十分大きければ、ある程度の精度でもって推定可能であると考えられる。また、この推定値は明らかに自己相関関数によって定まるため、推定される値はスケーリング指数ではなくハースト指数である。たとえば、 $\{X_t\}$ が独立増分であり $\{Z_{n,t}\}$ が独立であるならば、推定値の期待値は明らかに $1/2$ になるが、独立増分である安定過程のスケーリング指数は $1/\alpha$ であり、一般に $1/2$ ではない。

もう一つの問題は、増分が独立でないことによって推定量の不偏性が失われることである。しかし、これは時間間隔 n を大きくしそぎなければよいだけである。ここでは $\hat{\sigma}_n^2$ を通常の分散の不偏推定量によって計算したが、非整数ブラウン運動の増分に対して、この推定量は分散の不偏推定量にならない。実際、式(1)における $X(t)$ が非整数ブラウン運動に従うならば、 $X(t)$ の増分 $\Delta_h X(k)$ はある N 次元多変量正規分布に従い、その観測値を σ 倍して平均を引いたものが $\{Y_t\}$ であることになる。そして、 $\Delta_h X(k)$ が従う多変量正規分布の共分散行列 Σ は、

$$\Sigma_{i,j} = h^{2H} \rho_{\Delta B_H}(i-j) = \frac{h^{2H}}{2} (|i-j+1|^{2H} - 2|i-j|^{2H} + |i-j-1|^{2H})$$

として得られる。もちろん期待値ベクトルは 0 である。したがって、 $\{Y_t\}$ から平均を引く前の系列を $\{\tilde{Y}_t\}$ とし、その平均を $\hat{\mu}$ とおけば、

$$\begin{aligned} E[Y_i Y_j] &= E[(\tilde{Y}_i - \hat{\mu})(\tilde{Y}_j - \hat{\mu})] = E[\tilde{Y}_i \tilde{Y}_j] + E[\hat{\mu}^2] - E[\tilde{Y}_i \hat{\mu}] - E[\tilde{Y}_j \hat{\mu}] \\ &= \sigma^2 \Sigma_{i,j} + \sigma^2 \frac{1}{N^2} \left(\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \Sigma_{k,l} \right) - \frac{1}{N} \left(\sum_{l=1}^N \Sigma_{i,l} \right) - \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^N \Sigma_{k,j} \right) \\ &= \frac{\sigma^2 h^{2H}}{2} (|i-j+1|^{2H} - 2|i-j|^{2H} + |i-j-1|^{2H} + 2N^{2H-2} \\ &\quad - N^{-1} (i^{2H} + j^{2H} - (i-1)^{2H} - (j-1)^{2H} + (N-i+1)^{2H} + (N-j+1)^{2H} - (N-i)^{2H} - (N-j)^{2H})) \end{aligned} \quad (58)$$

である。これを用いれば、 $\hat{\sigma}_n^2$ の期待値は、

$$\begin{aligned} E[\hat{\sigma}_n^2] &= E\left[\frac{1}{N/n-1} \sum_{t=1}^{N/n} Z_{n,t}^2\right] = \frac{1}{N/n-1} \sum_{t=1}^{N/n} E\left[\left(\sum_{k=1}^n Y_{k+n(t-1)}\right)^2\right] = \frac{1}{N/n-1} \sum_{t=1}^{N/n} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n E[Y_{k+n(t-1)} Y_{l+n(t-1)}] \\ &= \frac{1}{N/n-1} \frac{\sigma^2 h^{2H}}{2} \sum_{t=1}^{N/n} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (|k-l+1|^{2H} - 2|k-l|^{2H} + |k-l-1|^{2H} + 2N^{2H-2} \\ &\quad - N^{-1} ((k+n(t-1))^{2H} + (l+n(t-1))^{2H} - (k+n(t-1)-1)^{2H} - (l+n(t-1)-1)^{2H} \\ &\quad + (N-k-n(t-1)+1)^{2H} + (N-l-n(t-1)+1)^{2H} - (N-k-n(t-1))^{2H} - (N-l-n(t-1))^{2H})) \\ &= \frac{\sigma^2 h^{2H}}{N/n-1} \sum_{t=1}^{N/n} (n^{2H} + n^2 N^{2H-2} - nN^{-1} (n^{2H} (t^{2H} - (t-1)^{2H}) + ((N-n(t-1))^{2H} - (N-nt)^{2H}))) \\ &= \frac{\sigma^2 h^{2H}}{N/n-1} (n^{2H-1} N + nN^{2H-1} - nN^{-1} (N^{2H} + N^{2H})) = \sigma^2 h^{2H} \frac{n^{2H} N^2 - n^2 N^{2H}}{N(N-n)} \end{aligned} \quad (59)$$

と得られる。 $H = 1/2$ ならば $E[\hat{\sigma}_n^2] = \sigma^2 hn$ であるが、 $H \neq 1/2$ の場合には不偏推定量にならない。反対にこの関係を用いることで不偏推定量が得られるが、そのためにはハースト指数が既知でなければならないため、ハースト指数の推定には使えない。しかし、 $N \rightarrow \infty$ のとき $E[\hat{\sigma}_n^2] \rightarrow \sigma^2 h^{2H} n^{2H}$ であるから、標本数 N を十分大きくとり、 n を N に対して十分小さい範囲に制限すればよいことがわかる。具体的な目安は定かでないが、本稿では標本数 N に対して n を $N/50$ 以下の約数として選ぶこととする。なお、 $\hat{\sigma}_1^2$ は $\{Y_t\}$ の分散ということになるが、このとき

$$E[\hat{\sigma}_1^2] = \sigma^2 h^{2H} (1 - N^{2H-2}) \frac{N}{N-1}$$

であり、 $1/2 < H < 1$ ならば $0 < E[\hat{\sigma}_1^2] < \sigma^2 h^{2H}$ 、 $0 < H < 1/2$ ならば $\sigma^2 h^{2H} < E[\hat{\sigma}_1^2] < (3/2) \sigma^2 h^{2H}$ である。また、同じ理由により非整数ブラウン運動の増分の標本平均の分散は必ずしも標本数に反比例しない。具体的

には簡単な計算により標本平均が従う分布の分散が $\sigma^2 h^{2H} N^{2H-2}$ であることがわかる。したがって、分散や信頼区間を評価する際にはこの関係に注意する必要があるが、反対にハースト指数が既にわかっているならば、この関係を用いることでより正確に評価することができる²⁶。

図 16 には、非整数安定過程の乱数セットと同様に生成した 4 系列の乱数に対してこの分散に基づく方法でハースト指数を推定する際の線形回帰分析の様子を示した。青色の領域は回帰分析の対象となる n の範囲、すなわち $n \leq N/50 = 5040/50$ の範囲を示す。これ以降、他の推定方法に対しても同様の図を示すが、そのいずれにおいても青色の領域は回帰分析の対象範囲を示すものとする。推定値はいずれも真の値に近い値が推定されているが、 $H = 0.2$ のケースでは $\hat{\sigma}_n^2$ のばらつきが大きく、あまり当てはまりがよくない。これはハースト指数が小さいとき、時間間隔を短くしても分散ないしは分布のスケールがなかなか小さくならぬためであると考えられる。

図 17 には、非整数安定過程の乱数セットに対して、この方法でハースト指数を推定した結果を示した。破線は本来とるべき値を示す。ただし、 $\beta = 0.4$ や $\beta = 0.8$ の系列があり、同一の H に対して 3 つの箱ひげ図が並ぶケースにおいて、それらのうちの左右の 2 系列は本来中央の系列と同一の位置に配置されるべきものであるが、作図の都合上横方向にずらされていることに注意。この推定方法では、全体的に推定値のばらつきがそれほど大きくなく真の値との乖離も小さいようである。しかし、 α と H がともに小さいときには、ばらつきがやや大きくなり、推定値が過小評価される傾向にある。また、 $H = 0.9$ のケースでも過小評価されている点が目立つが、後述する推定方法と比較すれば十分な精度をもった方法であるといえる。

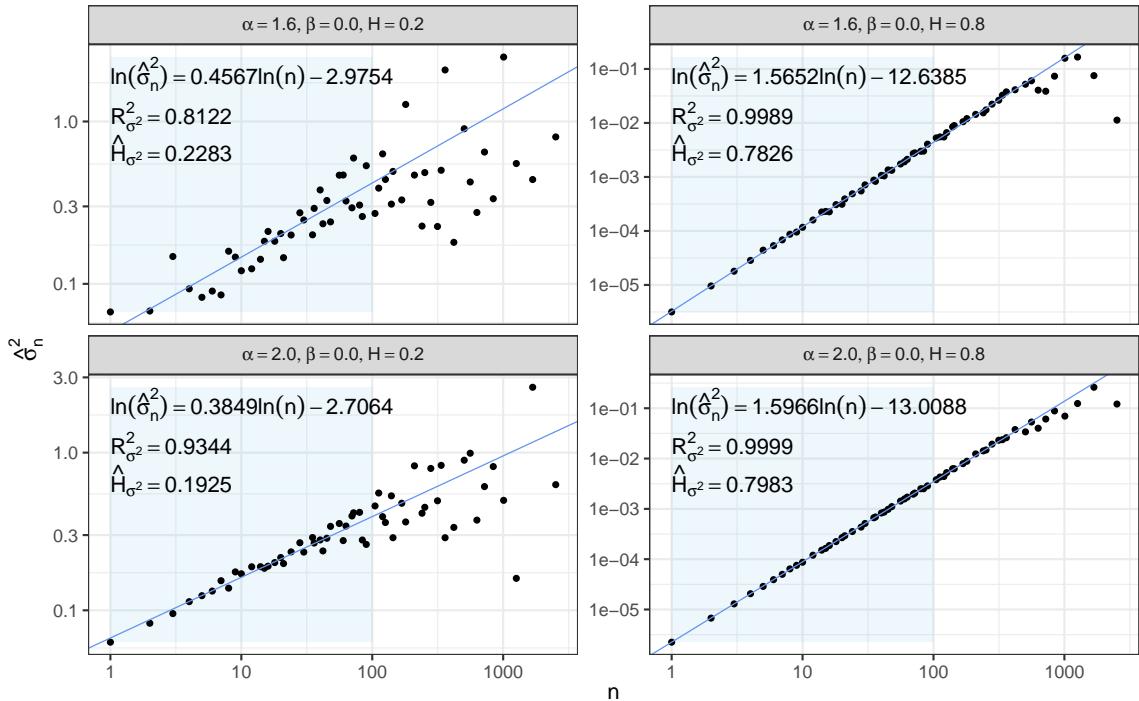


図 16 分散に基づくハースト指数の推定の例

²⁶ あまり実用的ではないが、Isserlis の定理を用いれば $\hat{\sigma}_1^2$ の分散は次のように与えられる。

$$\text{Var}[\hat{\sigma}_1^2] = \frac{2\sigma^4 h^{4H}}{(N-1)^2} \left(N^{4H-2} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{\Delta B_H} (i-j)^2 - \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \rho_{\Delta B_H} (i-k) \rho_{\Delta B_H} (j-k) \right)$$

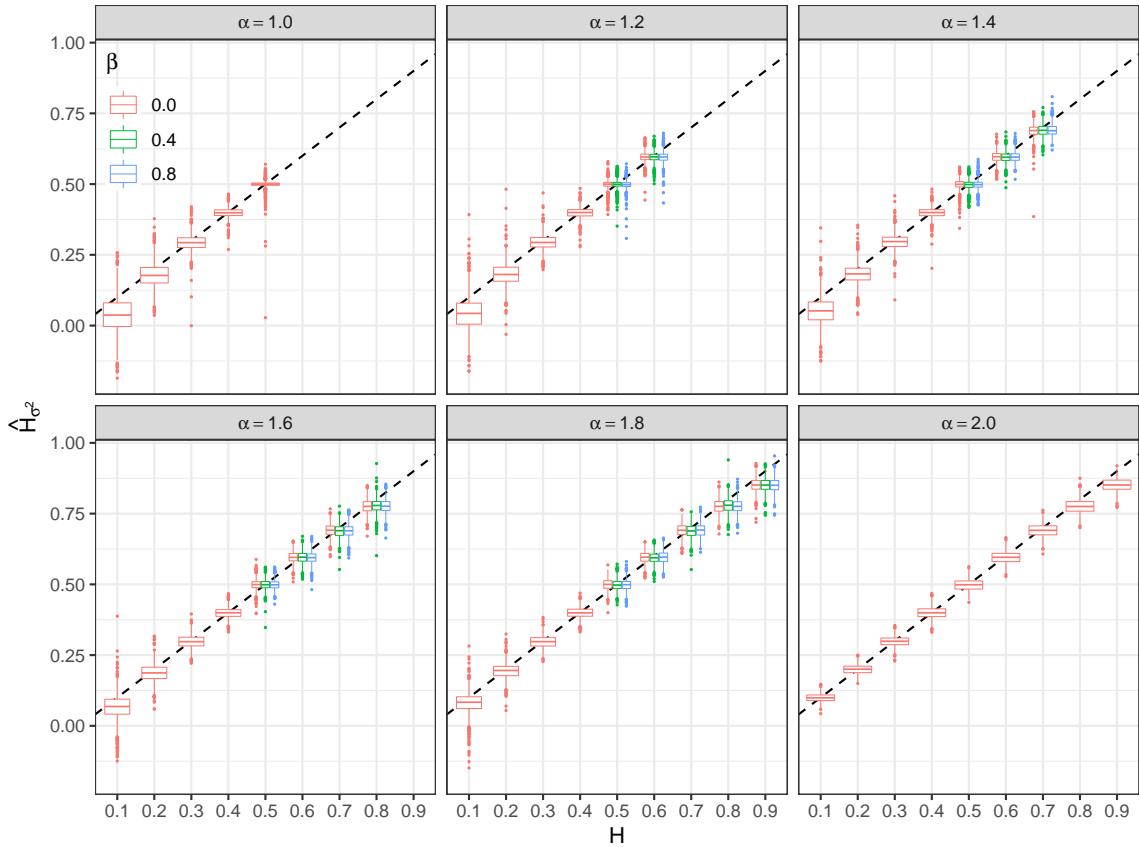


図 17 非整数安定過程の乱数セットの分散に基づくハースト指数の推定値

8.2.2 パワースペクトル密度を用いる方法

非整数ブラウン運動の増分のパワースペクトル密度は、上に述べたように、指數 $-2H + 1$ の幕乗則に従っていた。また、非整数安定過程の場合でも独立な定常過程の $H + 1/2$ 階積分の形で表されるため、その増分のパワースペクトル密度はやはり指數 $-2H + 1$ の幕乗則に従うと考えられる。したがって、観測された時系列の増分 $\{Y_t\}_{1 \leq t \leq N}$ からパワースペクトル密度の推定値を得ることで、分散による方法と同じように線形回帰分析によってハースト指数が推定できる。

パワースペクトル密度の推定には離散フーリエ変換を用いる。

定義 33 (離散フーリエ変換)。複素数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq N-1}$ に対して、

$$\mathcal{F}_T \{x_k\} (n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp \left(-2\pi i \frac{n}{N} k \right) \quad (60)$$

としたとき、複素数列 $\{\mathcal{F}_T \{x_k\} (n)\}_{0 \leq n \leq N-1}$ を $\{x_k\}$ の離散フーリエ変換 (DFT, Discrete Fourier Transform) という。

定義から明らかのように、 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq N-1}$ が $\{0, 1, 2, \dots\}$ で添字付けられた定常過程 $X(k)$ に対して $x_k = X(k)$ として与えられるならば、 N が十分大きいとき $E[N^{-1} |\mathcal{F}_T \{x_k\} (n)|^2]$ は $X(k)$ のパワースペクトル密度 $S_X(2\pi n/N)$ に近似する。したがって、パワースペクトル密度の推定値は

$$\hat{S}_n = \frac{1}{N} |\mathcal{F}_T \{Y_t\} (n)|^2$$

として得られる。ただし、 $\{Y_t\}$ の添字は 1 から始まっているため、定義通りに計算するならば $\tilde{Y}_k = Y_{t-1}$ となるような系列 $\{\tilde{Y}_k\}_{0 \leq k \leq N-1}$ を用意する必要がある。そのようにしてパワースペクトル密度の推定値の系列

$\{\hat{S}_n\}_{0 \leq n \leq N-1}$ が得られたとき、この S_n に対応する周波数 ω_n は $\omega_n = 2\pi n/N$ である。ハースト指数を推定するには、この $\ln(\omega_n)$ に対する $\ln(S_n)$ の回帰係数を求めればよいが、 $n = 0$ のとき $\ln(\omega_n) = -\infty$ であるから、回帰分析には使えない。なお、一般に $\mathcal{F}_T\{x_k\}(0)$ は $\{x_k\}$ の合計であり、 $1 \leq n \leq N-1$ に対して $\mathcal{F}_T\{x_k\}(n)$ は $\{x_k\}$ の平均に依存しない。したがって、ここでは $\{Y_t\}$ の平均が 0 となるように計算したが、そのことは推定結果に影響しない。また、 ω が大きいところではパワースペクトル密度の乗算則が観察が観察できないため、 ω_n を十分小さくとる必要がある。つまり、 n を十分小さく選ぶ必要がある。とくに、

$$\exp\left(-2\pi i \frac{N-n}{N} k\right) = \overline{\exp\left(-2\pi i \frac{n}{N} k\right)}$$

であり、 $\{Y_t\}$ は実数であるから $S_n = S_{N-n}$ となる。したがって、少なくとも $1 \leq n \leq (N-1)/2$ 、つまり $\omega_n < \pi$ でなければならない。 ω_n を大きくとることによる推定精度の低下はハースト指数が小さいときに顕著であるが、一方で、あまり ω_n を制限しすぎると標本数が極端に減ってしまう。そこで、本稿では図 5 等の結果を考慮して、 $0 < \omega_n \leq \pi/4$ となるように n を選ぶことにする。そのようにして得られた $\ln(\omega_n)$ と $\ln(S_n)$ に対して線形回帰分析を行い、得られた回帰係数から 1 を引いて $-1/2$ 倍したものがハースト指数の推定値となる。そうして推定されたハースト指数を図表等において \hat{H}_S と表すことにする。なお、対数をとったうえで線形回帰分析を行うため、 \hat{S}_n や ω_n を計算する際の係数 $1/N$ や $2\pi/N$ は無視しても結果に影響しない。

図 18 には図 16 と同じ乱数に対してこのパワースペクトル密度を用いる方法でハースト指数を推定したときの線形回帰分析の様子を示した。 \hat{S}_n はばらつきが大きく決定係数が小さいが、 $H = 0.8$ の場合には真の値に近い値が推定されている。一方で、 $H = 0.2$ の場合にはやや過小に評価されている。また、 \hat{S}_n の振る舞いから、いずれの場合であっても回帰分析の対象とする範囲をこれ以上広げると、さらに過小ないしは過大に評価されてしまうおそれがあることがわかる。

図 19 には、非整数安定過程の乱数セットに対して、この方法でハースト指数を推定した結果を示した。推定値のばらつきは比較的小さく、とくに H が十分大きければ推定精度が高いようであるが、 H が小さい場合には過小評価されてしまっている。このように H が小さいときにパワースペクトル密度の振る舞いからハースト指数を推定することが難しくなることは、図 5 の結果からも確認できた。上述の通り、これは回帰分析の対象範囲をさらに狭めることで回避できることが期待されるが、あまりに狭い範囲では対象となる標本数が不足し、推定精度が悪化してしまう。

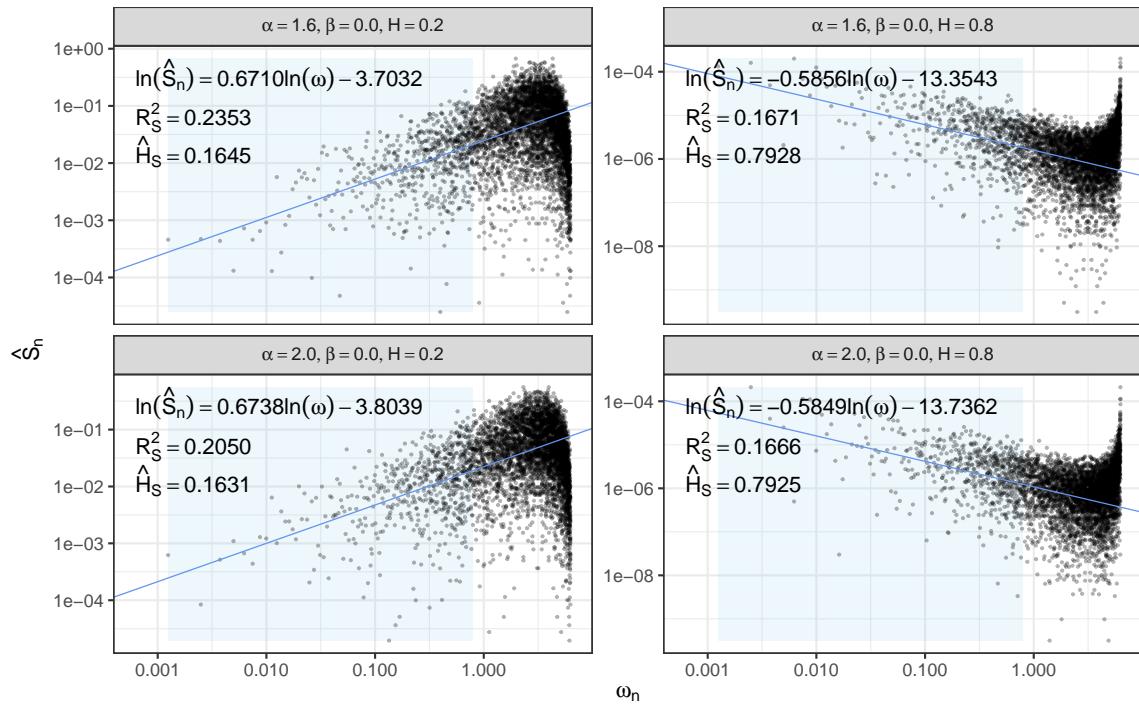


図 18 パワースペクトル密度に基づくハースト指数の推定の例

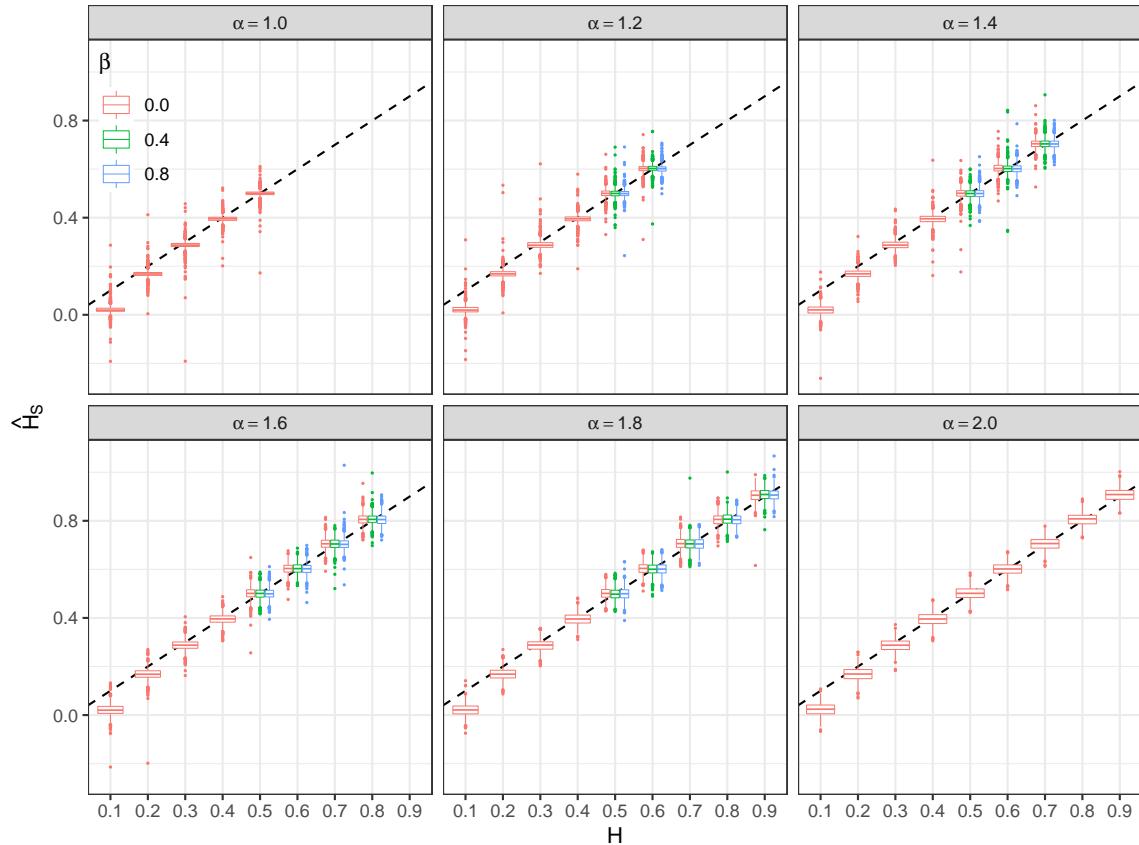


図 19 非整数安定過程の乱数セットのパワースペクトル密度に基づくハースト指数の推定値

8.2.3 R/S 分析

Hurst (1951) による R/S 分析はおそらく最も広く知られたハースト指数の推定方法であり、ハースト指数という名称自体、この R/S 分析を提案したイギリスの水文学者 H. E. Hurst に由来する。彼はナイル川の水位に対してこの R/S 分析を適用し、そのハースト指数が $1/2$ よりも大きいことを示した。そして、その結果はダムの貯水量の決定に活かされている。R/S 分析も幕乗則を利用してハースト指数を推定するものであるが、そのためにある統計量 $(R/S)_n$ を用いる。この R/S という語は幅 (Range) を標準偏差 (Standard deviation) で割った値であることを意味し、分散に基づく推定の場合と同様に、この統計量 $(R/S)_n$ を様々な時間間隔 n で計算し、両対数グラフ上で線形回帰分析を行うことで推定値を得る。

統計量 $(R/S)_n$ は、具体的には、観測された時系列の増分 $\{Y_t\}_{1 \leq t \leq N}$ に対して、次のような処理で計算される。まず、 2 以上 N 以下の N の約数の中から時間間隔 n を選び、 1 から N/n までの整数 k に対して、 $\{\tilde{Y}_{t,k}\}_{1 \leq t \leq n}$ を次のように定める。

$$\tilde{Y}_{t,k} = Y_{t+n(k-1)} - M_k$$

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_{t+n(k-1)}$$

つまり、 $\{\tilde{Y}_{t,k}\}$ は $\{Y_t\}_{1+n(k-1) \leq t \leq nk}$ から平均を引いた系列であり、この操作により $\{Y_t\}$ の平均は結果に影響しなくなる。次に、この $\{\tilde{Y}_{t,k}\}$ の累積和の幅 R_k と $\{\tilde{Y}_{t,k}\}$ の標準偏差 S_k を求める。すなわち、

$$R_k = \max_{1 \leq T \leq n} \left\{ \sum_{t=1}^T \tilde{Y}_{t,k} \right\} - \min_{1 \leq T \leq n} \left\{ \sum_{t=1}^T \tilde{Y}_{t,k} \right\}$$

$$S_k = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{Y}_{t,k}^2}$$

である。図 20 には $N = 5040, n = 1260$ のときの R_k のイメージを示した。図中の点線のように元の時系列 $\{X_t\}_{0 \leq t \leq N}$ を n で区切り、 k 番目の区間の開始時点における位置と終了時点における位置とを結ぶ線分を上下に動かして図中の青色の領域のように元の時系列を覆う平行四辺形を描いたとき、その辺の長さ、すなわちピンクの矢印の長さがこの R_k にあたる。この R_k, S_k は 1 から N/n までの整数 k に対して計算できるが、これらの比率の平均が $(R/S)_n$ である。つまり、

$$(R/S)_n = \frac{n}{N} \sum_{k=1}^{N/n} \frac{R_k}{S_k}$$

である。標準偏差で割っているため、 $(R/S)_n$ は $\{Y_t\}$ の分散にも影響されない。この $(R/S)_n$ を様々な n に対して計算し、 $\ln(n)$ に対する $\ln((R/S)_n)$ の線形回帰係数を求めたとき、その値が R/S 分析におけるハースト指数の推定値である。したがって、R/S 分析では $(R/S)_n$ が指數 H の幕乗則に従うことを前提しているが、後述する乱数を用いた結果からもわかるように、 $H < 1/2$ かつ $0 < \alpha < 2$ の非整数安定過程に対してこの幕乗則は観察できない。また、 $\alpha = 2$ の非整数ブラウン運動の場合であっても、 H が小さい場合、幕乗則を捉えるためには非常に大きな n が要求される。とくに、Anis and Lloyd (1976) によれば、 $X(t)$ がブラウン運動の定数倍であって元の時系列 $\{X_t\}$ が独立増分であるとき、 $(R/S)_n$ の期待値は、

$$E[(R/S)_n] = \frac{\Gamma((n-1)/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(n/2)} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-k}{k}}$$

であるという。ガンマ関数の性質を用いれば、

$$E[(R/S)_n] = \exp \left(- \sum_{k=2}^{n-2} (-1)^{k+n} \ln(k) \right) \left(\frac{2}{\pi} \right)^{n \bmod 2} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-k}{k}}$$

と表すこともできる。ただし、空和は 0 とする。たとえば、 $N = 5040$ のとき、2 以上 N 以下のすべての N の約数 n を用いて $E[(R/S)_n]$ との両対数グラフ上で線形回帰分析を行うと、その回帰係数は 0.5611 となり過大評価される。一方で、スターリングの近似を用いれば²⁷,

$$\begin{aligned} E[(R/S)_n] &\approx \exp(1/2) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(n-1)^{n/2-1}}{n^{n/2-1/2}} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-k}{k}} = \exp(1/2) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n/2} \frac{\sqrt{n}}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-k}{k}} \\ &\approx \exp(1/2) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-1/2) \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-k}{k}} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-k}{k}} \end{aligned}$$

であり、 $f(x) = \sqrt{1/x - 1}$ とおけば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[(R/S)_n]}{n^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 f(x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

であるから、 $(R/S)_n$ は確かに指数 $1/2$ の幕乗則に従っている。この H が小さいときに推定値が過大評価されてしまうという欠点に対する修正が Lo (1991) によって提案されているが、その方法では推定のために新たなパラメータを選択する必要があり、それによって結果が左右されることになるという問題が残る。本稿ではそのような修正はせず、実際の標本数 N の大きさを考慮して n を 50 以上に制限して回帰分析を行うことにする。そのようにして推定されたハースト指数を図表等においては $\hat{H}_{R/S}$ と表すことにする。なお、 $N = 5040$ のとき n を 50 以上に制限して $E[(R/S)_n]$ を用いて回帰分析を行うと、回帰係数は 0.5256 となる。

図 21 には図 16 と同じ乱数を用いて R/S 分析によってハースト指数を推定する際の線形回帰分析の様子を示した。 $\alpha = 2, H = 0.2$ のケースでは、 n が小さいところで $(R/S)_n$ が指数 0.2 の幕乗則よりも速く増大していることが確認できる。 $n \geq 50$ の範囲では概ね両対数グラフ上で線形に並んでいるようにみえるが、これよりも小さな n を回帰分析の対象に含めると回帰係数がより大きく推定されてしまうことがわかる。また、R/S 分析では高い決定係数が期待されるが、幕乗則によって近似できない範囲を含めて回帰分析を行うと、決定係数が大きく低下する。したがって、推定値が小さい場合には決定係数の大きさに注意する必要がある。 $\alpha = 1.6, H = 0.2$ のケースでは推定値が真の値から著しく外れており、R/S 分析では正規分布に従わない自己相似過程のハースト指数を正しく測定することができないようである。しかし、 $\alpha = 1.6, H = 0.8$ のケースでは真の値に近い値が推定されている。

図 22 には、非整数安定過程の乱数セットのハースト指数を R/S 分析によって推定した結果を示した。図 21 からも推測できるように、 $\alpha < 2$ かつ $H < 1/2$ のケースにおいて正しく推定されていない。これらのケースではいずれも独立増分を示す $1/2$ に近いハースト指数が推定されてしまっている。一方で、 $H > 1/2$ のケースでは α によらず正しい値が推定できているようである。したがって、 $\alpha < 2$ であって R/S 分析による推定値が $1/2$ に近い場合、本来 $H < 1/2$ であるものを誤って推定している可能性があり、他の方法による推定結果と比較する必要がある。また、 H が大きいケースでは、 α によらず真の値付近に推定値が分布するが、分散やパワースペクトル密度を用いた推定結果と比較してばらつきが大きく推定精度はあまり高くない。ここでは $n \geq 50$ の範囲に制限しているが、それでも推定値の偏りは残り、 H が小さいケースでは過大評価されている。さらに、 $H = 0.9$ の場合にはわずかに過小評価されており、R/S 分析は全体的に優れた推定方法ではないようと思われる。

²⁷ スターリングの近似とは、 $|\arg(z)|$ が π よりも十分小さく $|z|$ が十分大きな $z \in \mathbb{C}$ に対して成り立つガンマ関数に関する次の近似をいう。

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{2\pi} \exp(-z) z^{-1/2}$$

ここで、 $\arg(z)$ は複素数 z の偏角である。

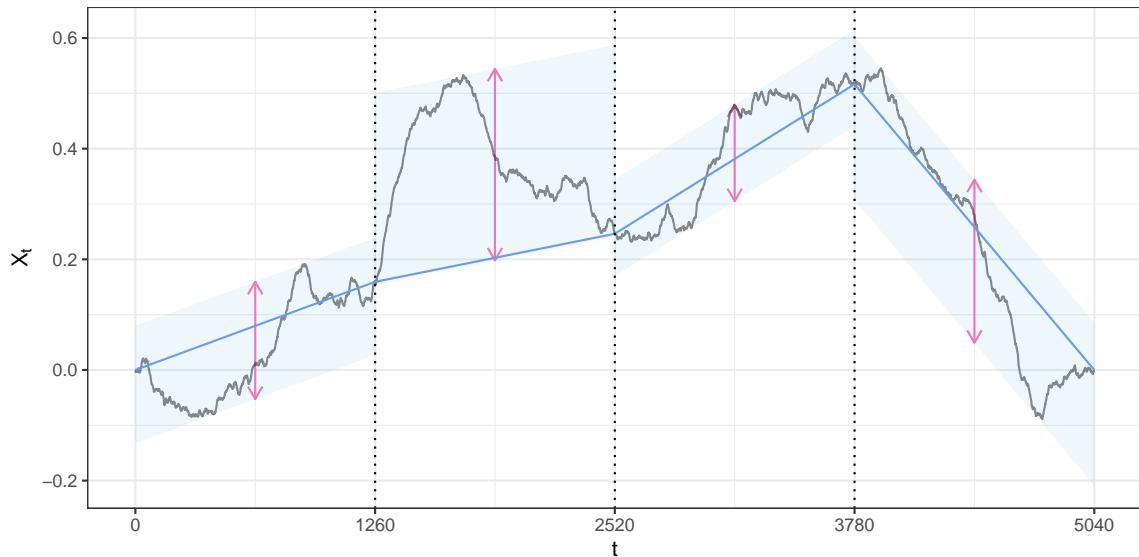


図 20 R/S 分析のイメージ

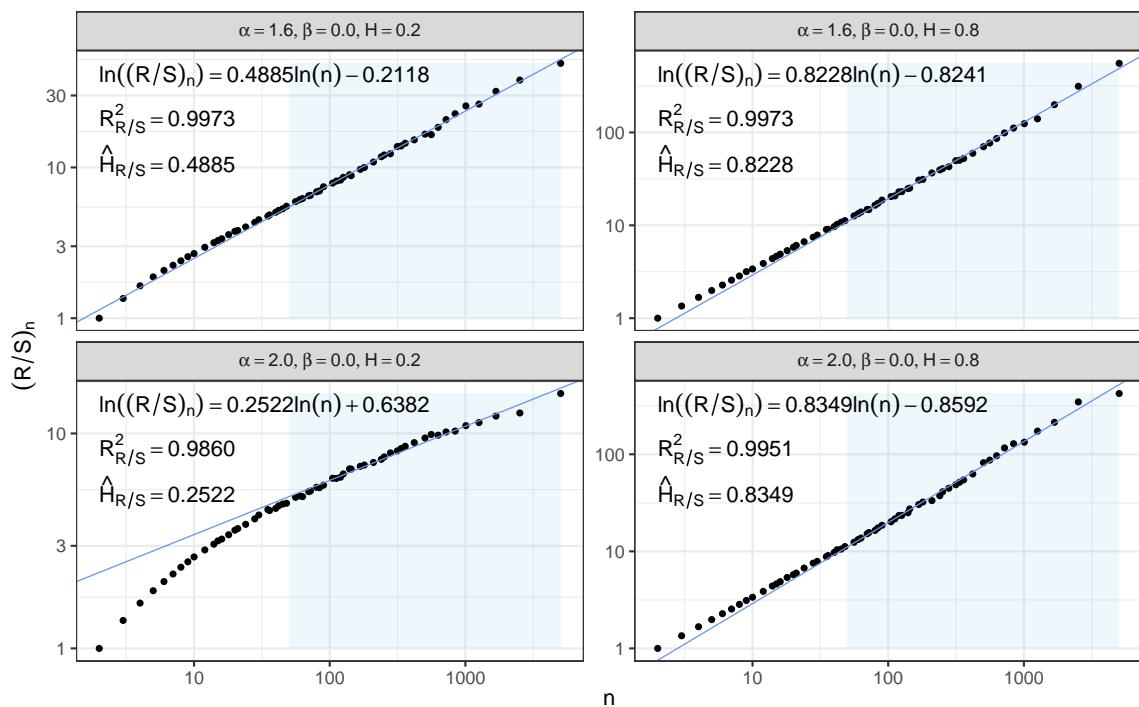


図 21 R/S 分析によるハースト指数の推定の例

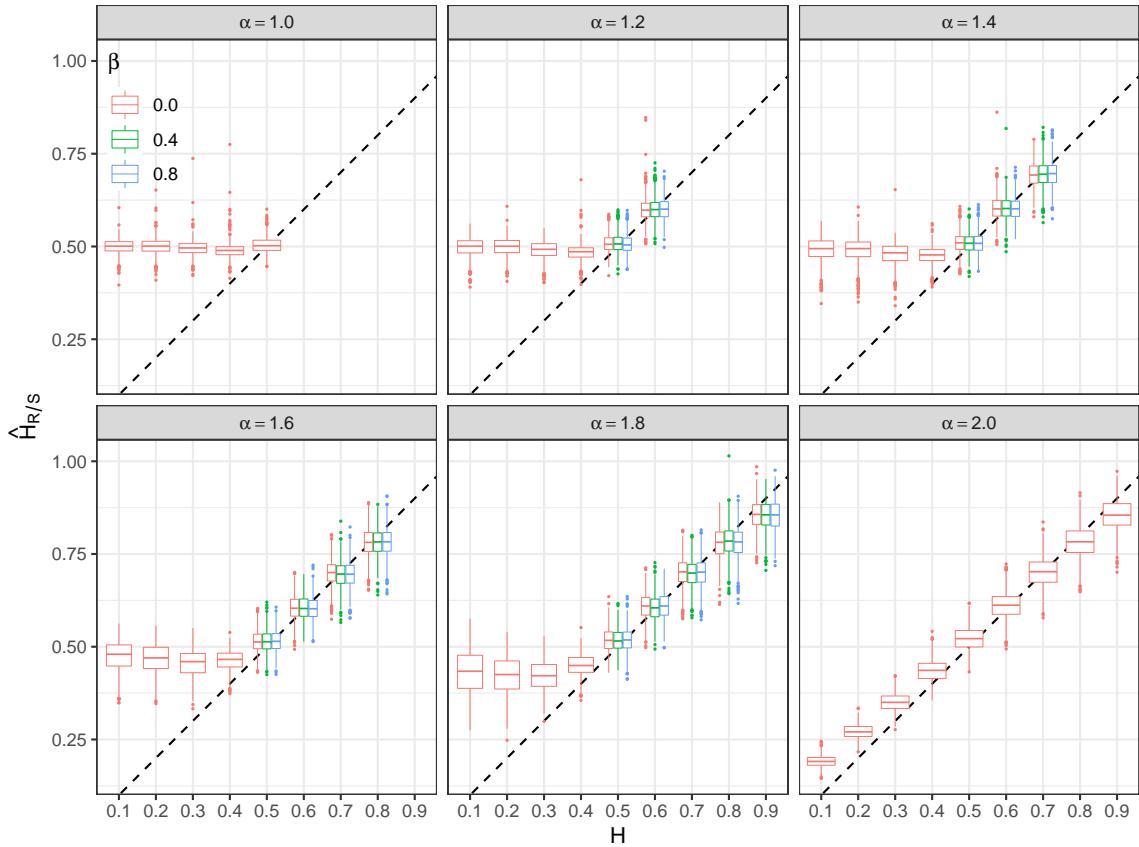


図 22 R/S 分析による非整数安定過程の乱数セットのハースト指数の推定値

8.2.4 DFA

R/S 分析では図 20 のように時系列 $\{X_t\}_{0 \leq t \leq N}$ を短い区間で区切り、そこに適当な直線を引き、その直線からの乖離を評価することで推定のための統計量 $(R/S)_n$ を得ていた。この意味で DFA (Detrended Fluctuation Analysis) は R/S 分析に似たハースト指数の推定方法であり、しばしば比較される。Peng, Buldyrev, Havlin, Simons, Stanley and Goldberger (1994) によるこの DFA という手法は、図 23 のように、短い区間ごとに回帰直線を引き、その残差の標準偏差を評価することでハースト指数を推定するものである。

DFA で用いる統計量 F_n は観測された時系列 $\{X_t\}_{0 \leq t \leq N}$ に対して、次のような処理で計算される。まず、3 以上 N 以下の N の約数の中から時間間隔 n を選ぶ。これは R/S 分析と同様であるが、残差の標準偏差が 0 よりも大きくなければならないため、 $n = 2$ は認められない。そして、1 から N/n までの整数 k に対して、回帰直線の切片 $\hat{\alpha}_k$ と傾き $\hat{\beta}_k$ を最小二乗法で求める。このとき、被説明変数は $\{X_t\}_{1+n(k-1) \leq t \leq nk}$ であり、説明変数は対応する時間である。なお、残差の標準偏差だけが重要であり、 $\{X_t\}$ は等間隔な時点で観測しているため、説明変数は等間隔な n 個の実数であればどのように選んでも結果が変わらないが、ここでは 1 から n の自然数を考える。したがって、

$$\hat{\alpha}_k = M_k - \hat{\beta}_k \frac{n+1}{2}$$

$$\hat{\beta}_k = \frac{\sum_{t=1}^n (t - (n+1)/2)(X_{t+n(k-1)} - M_k)}{\sum_{t=1}^n (t - (n+1)/2)^2}$$

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t+n(k-1)}$$

である。 $\sum_{t=1}^n t^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ であることに注意して $\hat{\beta}_k$ をさらに詳しく計算すると、

$$\hat{\beta}_k = \frac{6}{n-1} \left(\frac{2}{n(n+1)} \left(\sum_{t=1}^n t X_{t+n(k-1)} \right) - M_k \right)$$

となる。これらを用いてこの線形回帰分析による $X_{t+n(k-1)}$ の予測値 $\hat{X}_{t+n(k-1)}$ を求めるとき、

$$\hat{X}_{t+n(k-1)} = \hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_k t = M_k + \hat{\beta}_k \left(t - \frac{n+1}{2} \right) = \frac{2}{(n-1)n} \sum_{s=1}^n X_{s+n(k-1)} \left(2n+1 - 3(t+s) + 6 \frac{ts}{n+1} \right)$$

となり、 $X_t = \sum_{s=1}^t Y_s$ であるから、

$$\begin{aligned} \hat{X}_{t+n(k-1)} &= \frac{2}{(n-1)n} \sum_{s=1}^n \sum_{u=1}^{s+n(k-1)} Y_u \left(2n+1 - 3(t+s) + 6 \frac{ts}{n+1} \right) \\ &= \left(\sum_{s=1}^{n(k-1)} Y_s \right) + \left(\sum_{s=1}^n Y_{s+n(k-1)} \left(1 - \frac{s-1}{n} \right) \left(1 - \frac{s-1}{n-1} \left(1 - \frac{2t}{n+1} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

が得られる。したがって、この k 番目の区間における残差の二乗平均は、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(X_{t+n(k-1)} - \hat{X}_{t+n(k-1)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\sum_{s=1}^n Y_{s+n(k-1)} \left(1 - \left(1 - \frac{s-1}{n} \right) \left(1 - \frac{s-1}{n-1} \left(1 - \frac{2t}{n+1} \right) \right) \right) \right)^2 \\ &= \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n Y_{t+n(k-1)} Y_{s+n(k-1)} \left(\left(1 - \frac{\max\{t,s\}-1}{n} \right) - \left(1 - \frac{t-1}{n} \right) \left(1 - \frac{s-1}{n} \right) \left(1 + 3 \frac{t-1}{n-1} \frac{s-1}{n+1} \right) \right) \end{aligned}$$

である。そして、1 から N/n までの k に対するこの値の平均の平方根が F_n となる。つまり、

$$F_n = \sqrt{\frac{n}{N} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n \left(\left(1 - \frac{\max\{t,s\}-1}{n} \right) - \left(1 - \frac{t-1}{n} \right) \left(1 - \frac{s-1}{n} \right) \left(1 + 3 \frac{t-1}{n-1} \frac{s-1}{n+1} \right) \right) \sum_{k=1}^{N/n} Y_{t+n(k-1)} Y_{s+n(k-1)}}$$

である。 F_n は平方根をとっているため、非整数ブラウン運動を仮定してもこの正確な期待値を求めることは難しいが、 F_n^2 の期待値 $E[F_n^2]$ は式 (58) を用いて導出できる。そのとき $E[F_n^2]$ は N に依存せず、 $N = n$ としても $E[F_n^2]$ は変わらない。 $n \rightarrow \infty$ で消える次数の低い項に注意すれば、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[F_n^2]}{n^{2H}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2H}} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n \left(\left(1 - \frac{\max\{t,s\}-1}{n} \right) - \left(1 - \frac{t-1}{n} \right) \left(1 - \frac{s-1}{n} \right) \left(1 + 3 \frac{t-1}{n-1} \frac{s-1}{n+1} \right) \right) E[Y_t Y_s] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2 h^{2H}}{2n^{2H}} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n \left(\left(1 - \frac{\max\{t,s\}-1}{n} \right) - \left(1 - \frac{t-1}{n} \right) \left(1 - \frac{s-1}{n} \right) \left(1 + 3 \frac{t-1}{n-1} \frac{s-1}{n+1} \right) \right) \\ &\quad \left(|t-s+1|^{2H} - 2|t-s|^{2H} + |t-s-1|^{2H} \right) \\ &= \sigma^2 h^{2H} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2H} \left(\left(\sum_{t=1}^n \left(1 - \frac{t-1}{n} \right) \left(1 - \left(1 - \frac{t-1}{n} \right) \left(1 + 3 \frac{t-1}{n-1} \frac{t-1}{n+1} \right) \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{n-k} \left(1 - \frac{t+k-1}{n} \right) \left(1 - \left(1 - \frac{t-1}{n} \right) \left(1 + 3 \frac{t+k-1}{n-1} \frac{t-1}{n+1} \right) \right) \left((k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H} \right) \right) \right) \\ &= \sigma^2 h^{2H} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-2H+1}}{30} \left(2 - \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n} \right)^2 \left(3 \frac{k}{n} \left(3 + \frac{k}{n} \right) - 2 \right) \left((k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H} \right) \right) \\ &= \sigma^2 h^{2H} \frac{1-H}{(H+1)(H+2)(2H+1)} \end{aligned}$$

であり、 F_n^2 は指数 $2H$ の幕乗則に従うことがわかる。ゆえに、 F_n は指数 H の幕乗則に従い、

$$F_n \sim \sigma h^H \sqrt{\frac{1-H}{(H+1)(H+2)(2H+1)}} n^H$$

である。なお、R/S 分析と異なり、標準偏差で割っていないため、統計量 F_n の期待値は元の確率過程の標準偏差に依存している。この F_n を様々な n に対して計算し、 $\ln(n)$ に対する $\ln(F_n)$ の線形回帰係数を求ることで、ハースト指数の推定値が得られる。しかし、R/S 分析の場合と同様に、この幂乗則を観測するためには n が十分大きくなければならない。たとえば、図 24 は $\{Y_t\}$ が時間間隔 1 の非整数ブラウン運動の増分から平均を引いたものであると仮定したときの $\sqrt{E[F_n^2]}$ のグラフである。青色の直線は幂乗則による近似であり、十分大きな n に対して $\sqrt{E[F_n^2]}$ はこの直線で近似できているが、 n が小さく、さらに H も小さい場合には、R/S 分析の場合ほどではないものの直線からの乖離が激しいことが観察できる。したがって、 n をある程度大きな値に制限する必要がある。このグラフの結果を考慮して本稿では n を 30 以上に制限して回帰分析を行うこととする。そのようにして推定されたハースト指数を図表等においては \hat{H}_{DFA} と表す。

非整数安定過程を仮定すると F_n の期待値は一般に存在しないが、 F_n はラグ 0 からラグ $n - 1$ までの $\{Y_t\}$ の自己共分散によって構成されているため、分散を用いたハースト指数の推定の場合と同様に、 F_n の推移自体は自己相関関数によって定まるものと考えられる。実際、そのことは図 25 から観察できる。図 25 は図 16 と同じ乱数を用いて DFA によってハースト指数を推定する際の線形回帰分析の様子である。 $\alpha = 2$ のケースはもちろん、 $\alpha = 1.6$ のケースでも F_n は指数 H の幂乗則に従っており、ハースト指数は正しく推定されていることがわかる。R/S 分析では推定できなかった $\alpha = 1.6, H = 0.2$ のケースも例外でない。また、分散やパワースペクトル密度を用いた推定と異なり、DFA では H によらず高い決定係数が期待される。したがって、R/S 分析と同様に、決定係数の大きさを確認することでハースト指数が正常に推定できているか否かを判断することができる。

図 26 には、非整数安定過程の乱数セットのハースト指数を DFA によって推定した結果を示した。 H が小さいときにも正しく推定できていることがわかる。さらに、推定値はとくに H が大きいとき R/S 分析と同程度に激しくばらつくが、推定値の偏りは他の推定方法と比較して最も小さいようである。また、他の推定方法では H が小さいほど偏りやばらつきが生じ、推定が難しくなる傾向にあったが、DFA の結果はそれと対照的である。

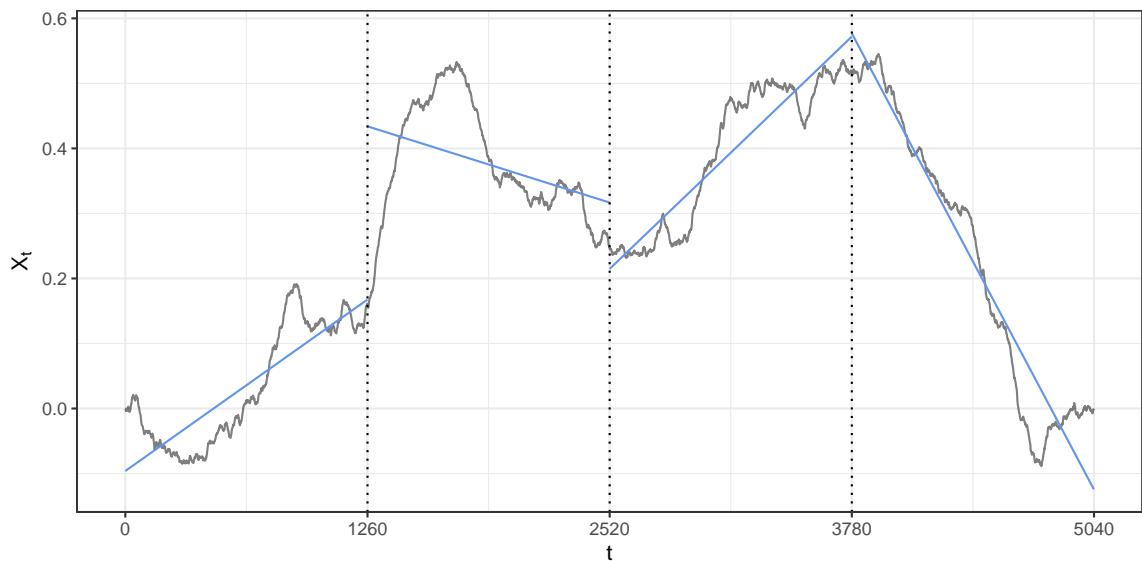


図 23 DFA のイメージ

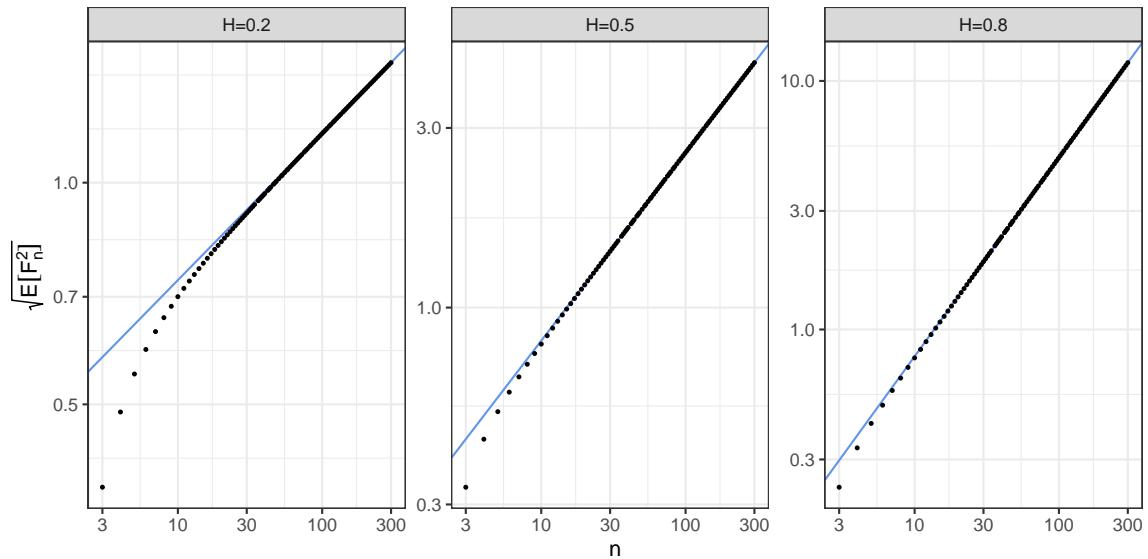


図 24 DFA における F_n の期待値

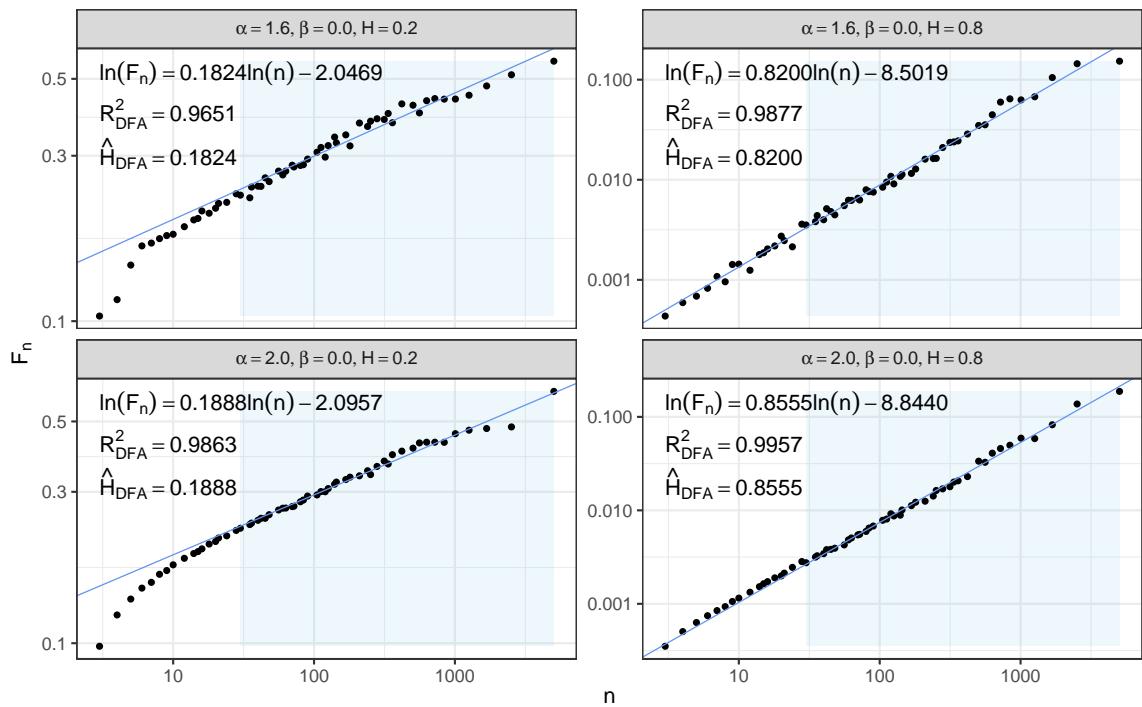


図 25 DFA によるハースト指数の推定の例

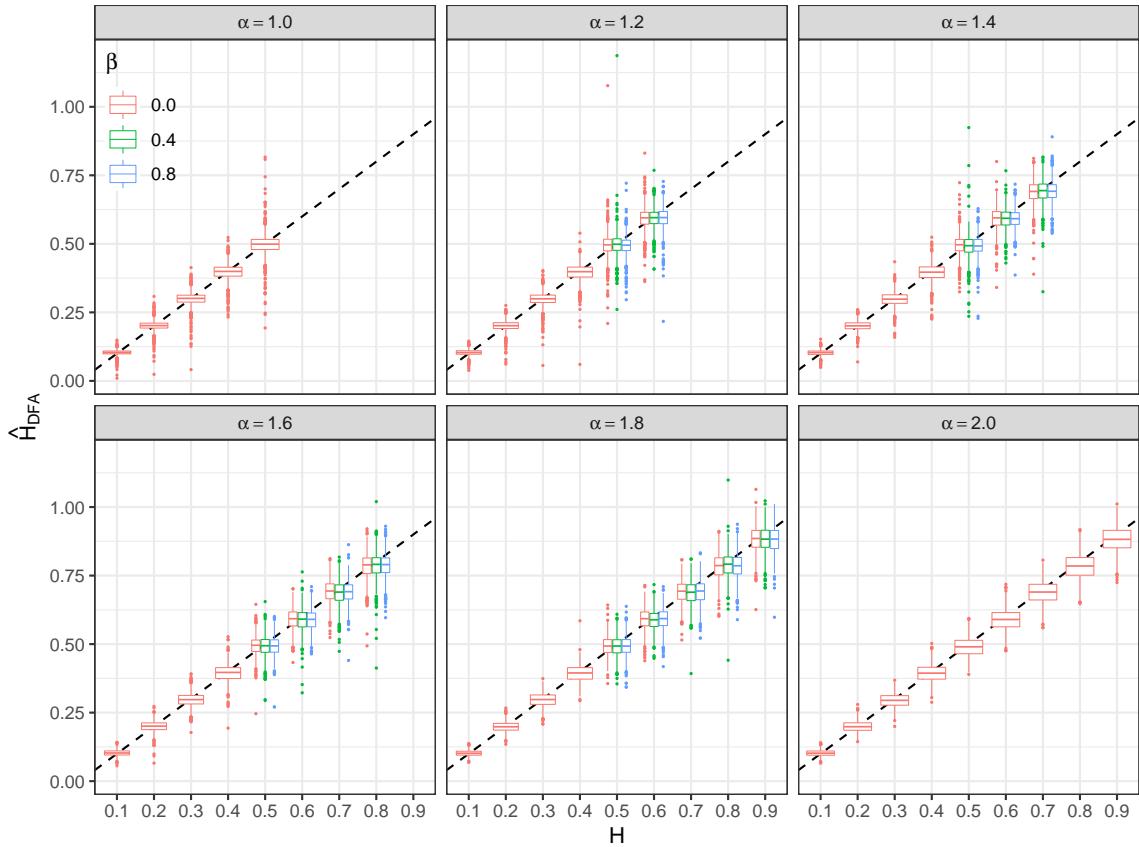


図 26 DFA による非整数安定過程の乱数セットのハースト指数の推定値

8.2.5 スクランブルテスト

ここまで述べてきたように、ハースト指数の推定には DFA や R/S 分析のほか、分散やパワースペクトル密度を用いる方法などがあるが、最も重要なことはそれらの推定結果が $H \neq 1/2$ であることを示すか否かである。つまり、得られた推定値が $H = 1/2$ という仮定のもとではどれだけ稀な値であるのかを調べたい。この仮説検定を厳密に行うためには $H = 1/2$ のときに推定値が従う分布を特定しなければならないが、とくに正規分布が仮定されないならばそれは容易でない。あまり厳密な方法ではないが、Peters (1996) では直感的で簡単な方法としてスクランブルテストというものを行っている。これは元の時系列の増分 $\{Y_t\}_{1 \leq t \leq N}$ をランダムに並べ替えた系列を作成し、それに対して同じ方法でハースト指数を推定し、その推定値が並べ替える前の元の推定値よりも $1/2$ に近づくか否かによって、 $H = 1/2$ であるか否かを判断するというものである。系列を並べ替えることによって自己相関構造が破壊され、そのハースト指数の推定値は $H = 1/2$ 付近に分布することになるが、元々の系列が独立であるならば、それを並べ替えても推定値はほとんど変わらないはずである。

この方法は基本的にどの推定方法に対しても適用できるが、Peters (1996) ではそもそも R/S 分析以外の方法でハースト指数を推定していないため、このスクランブルテストも R/S 分析に対して適用している。しかし、図 22 等の結果から、R/S 分析はあまり優れた推定方法ではないことがわかるため、本稿ではスクランブルテストを DFA に対して適用することにする。また、Peters (1996) では並べ替えを 1 回だけ行い、ハースト指数の推定値を比較していたが、それではどの並びが選ばれるかによって結果が大きく左右されてしまうため、本稿では並べ替えを 10000 回行い、それらに対するハースト指数の推定値のうちのいくつが元の推定値よりも $1/2$ から離れていたかによって評価することにする。そして、その割合を図表等においては p_{DFA} と表す。もちろん、この p_{DFA} が $H = 1/2$ という帰無仮説のもとでの p 値というわけではないが、 $p_{DFA} < 0.05$ 程度であれば $H = 1/2$ であると考えることが疑わしいといえるだろう。ただし、この判断を行うには DFA の決定係数が十

分大きいことを確認しておかなければならない。たとえば、元の系列が AR モデルに従い自己相関関数が冪乗則に従わないとても、DFA の統計量 F_n はその自己相関構造に影響を受ける。それでも F_n は指数 $1/2$ の冪乗則に従うが、その冪乗則を捉えるためには完全に独立である場合よりも大きな n が要求されるようになる。その結果、ハースト指数は過大ないしは過小に評価され、決定係数は小さくなる。そして、その系列を並べ替えれば冪乗則に従わない自己相関構造も破壊されるため、過大評価ないしは過小評価が解消されてしまい、自ずと p_{DFA} が小さくなる。しかし、それは明らかに $H \neq 1/2$ であることによるものではない。

図 27 はスクランブルテストのイメージであり、図 25 と同じ乱数を並べ替えることで得られた 10000 個のハースト指数の推定値のヒストグラムを示している。ピンクの垂線は元の推定値 \hat{H}_{DFA} と $1 - \hat{H}_{\text{DFA}}$ を示しており、 p_{DFA} はこれらの外側にある割合である。今回の場合、真のハースト指数が $H = 0.8$ であるため推定値 \hat{H}_{DFA} は $H \neq 1/2$ を示すのに十分な大きさであり、 $p_{\text{DFA}} = 0$ となっている。

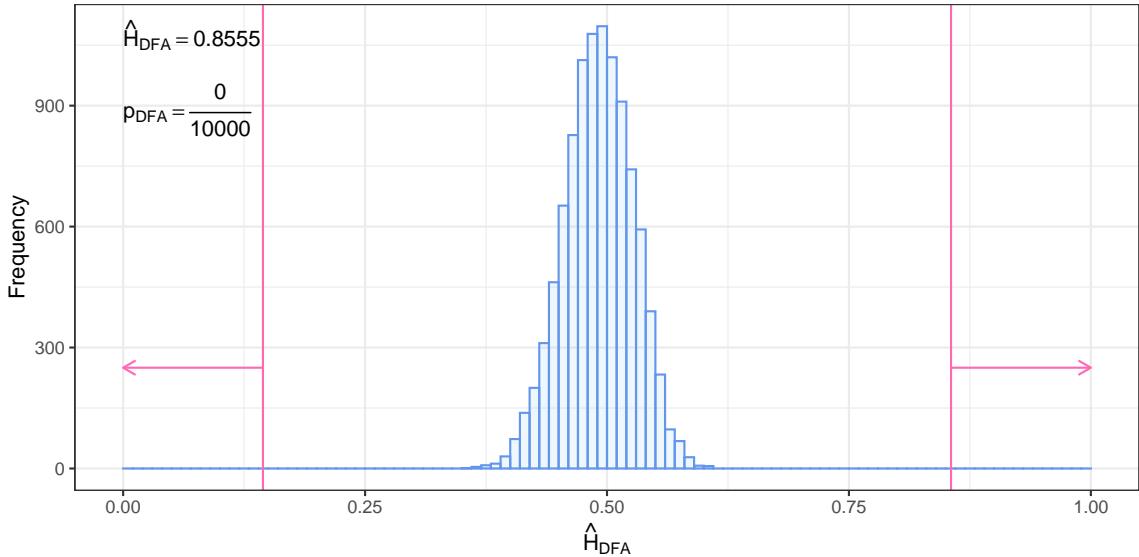


図 27 スクランブルテストのイメージ

8.3 フラクタル次元の推定

自己相似過程のグラフの次元は、ハースト指数や安定分布のパラメータ α によって定まるものであり、 $\alpha > 1$ の非整数安定過程に限れば、グラフの次元とハースト指数とパラメータ α は、それらのうちの 2 つが分かればそこから残りの 1 つを知ることができた。したがって、上に述べたような方法でハースト指数と α が推定されたならば、それを用いてグラフの次元を推定することができるが、以下では元の系列 $\{X_t\}_{0 \leq t \leq N}$ から直接グラフの次元を推定する方法について述べる。それらによる推定値と比較するため、図表等においては DFA によるハースト指数の推定値 \hat{H}_{DFA} と α の推定値 $\hat{\alpha}$ から求められるグラフの次元 $2 - \hat{H}_{\text{DFA}} - 1/\hat{\alpha} + 1/2$ を \dim_{DFA} と表すこととする。

8.3.1 ボックスカウント法

ボックスカウント法は、ボックス次元の定義通り、集合を近似したデータと交叉する超立方体の数を数え上げて、その振る舞いを観察することでボックス次元を推定する方法である。集合 $F \subset \mathbb{R}^n$ に対して、 $\tilde{N}_\delta(F)$ は $\prod_{k=1}^n [\delta m_k, \delta(m_k + 1)]$ の形の超立方体のうち、 F と交叉するものの数であったが、ボックス次元の定義より、 F にボックス次元が存在するならば $\tilde{N}_\delta(F)$ は $\delta \rightarrow 0$ で指數 $-\dim_B(F)$ の冪乗則に従うことになる。したがって、様々な δ に対して $\tilde{N}_\delta(F)$ を推定し、両対数グラフ上で線形回帰分析を行えばよい。しかし、ここで問題になるのは F の近似の仕方と δ の選び方である。

$\tilde{N}_\delta(F)$ の代わりに, F を被覆するために必要な直径 δ 以下の集合の最小数である $N_\delta(F)$ を用いても得られる次元は変わらないが, この $N_\delta(F)$ を用いる定義では明らかに $\dim_B(F)$ が F の平行移動に対して不変である. したがって, $\tilde{N}_\delta(F)$ を用いる場合でも F を平行移動して構わない. さらに, 関数 $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が単射であり $f(x)$ と $f^{-1}(y)$ がともに指數 1 で一様 Hölder 連続であるならば, すなわち, ある定数 C_1, C_2 が存在して, 任意の $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C_2 |x_1 - x_2|$$

かつ任意の $y_1, y_2 \in f(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)| \leq C_1^{-1} |y_1 - y_2|$$

であるならば, $\dim_B(f(F)) = \dim_B(F)$ となる. 実際, F が $N_\delta(F)$ 個の直径 δ 以下の集合 $\{U_k\}_{1 \leq k \leq N_\delta(F)}$ で被覆されるならば, $f(F)$ は $\{f(U_k)\}_{1 \leq k \leq N_\delta(F)}$ で被覆され, $f(U_k)$ の直径は $C_2\delta$ 以下であるから, $N_{C_2\delta}(f(F)) \leq N_\delta(F)$ である. 反対に, $f(F)$ が $N_{C_2\delta}(f(F))$ 個の直径 $C_2\delta$ 以下の集合 $\{U_k\}_{1 \leq k \leq N_{C_2\delta}(f(F))}$ で被覆されるならば, $f^{-1}(f(F)) = F$ は $\{f^{-1}(U_k \cap f(\mathbb{R}^n))\}_{1 \leq k \leq N_{C_2\delta}(f(F))}$ で被覆され, $f^{-1}(U_k \cap f(\mathbb{R}^n))$ の直径は $C_1^{-1}C_2\delta$ 以下であるから, $N_{C_1^{-1}C_2\delta}(F) \leq N_{C_2\delta}(f(F))$ である. したがって, $C_1^{-1}C_2\delta < 1$ に対して,

$$\frac{\ln(N_{C_1^{-1}C_2\delta}(F))}{-\ln(C_1^{-1}C_2\delta)} \leq \frac{\ln(N_{C_2\delta}(f(F)))}{-\ln(C_2\delta) - \ln(C_1^{-1})} \leq \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta) - \ln(C_1^{-1}C_2)}$$

である. $\dim_B(F)$ が存在するならば, $\delta \rightarrow 0$ の極限をとることで,

$$\dim_B(f(F)) \leq \dim_B(F) \leq \dim_B(f(F))$$

となり, $\dim_B(f(F)) = \dim_B(F)$ であることがわかる. ハウスドルフ次元についても同様に $\dim_H(f(F)) = \dim_H(F)$ であることが示せる. なお, 関数 $f(x)$ が上のようないくつかの条件を満たすことを一般に双 Lipschitz 連続であるというが, $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ とおけば,

$$|f^{-1}(f(x_1)) - f^{-1}(f(x_2))| = |x_1 - x_2| \leq C_1^{-1} |f(x_1) - f(x_2)|$$

であるから, この条件は, ある定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して, 任意の $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$C_1 \leq \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq C_2$$

であるという条件に等しい. つまり, ボックス次元やハウスドルフ次元は双 Lipschitz 連続な関数 $f(x)$ に対して不変である. たとえば, アフィン変換は双 Lipschitz 連続であるから²⁸, それによってボックス次元やハウスドルフ次元が変わることはない.

とくに今回のように関数のグラフの次元を推定する場合, 定義域ないしは値域のスケールを自由に変換してよい. その変換によって次元が変わることはないが, ボックスカウント法による推定精度が変わる. たとえば, 関数 $f(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ のグラフの次元を推定したいとする. 推定に使用できるデータは有限個であるから, 具体的に $t_k = k/N$, $x_k = (t_k, f(t_k))$ として N 個の点 $\{x_k\}_{1 \leq k \leq N}$ からなるデータを用いるものとする. さらに, 簡単のため $f(t)$ は最小値が 0 となるように平行移動されているものとする. このとき, $k \neq l$ に対する x_k, x_l の距離 $\sqrt{(t_k - t_l)^2 + (f(t_k) - f(t_l))^2}$ の最小値を $\delta_N \geq N^{-1} > 0$ とおけば, $0 < \delta < \max\{N^{-1}, \delta_N/\sqrt{2}\}$ に対して $\tilde{N}_\delta(\{x_k\}) = N$ であるから, この範囲でボックス次元を推定しようとすると推定値は 0 になってしまう. したがって, 少なくとも $\max\{N^{-1}, \delta_N/\sqrt{2}\} \leq \delta$ の範囲で推定を行わなければならない. 一方で, $\delta \geq R_f[0, 1]$ に対しては $\tilde{N}_\delta(\text{graph}(f)) = \lceil 1/\delta \rceil$ であるから, この範囲でボックス次元を推定すると 1 以下になってしまう. ただし, $R_f[0, 1]$ は $f(t)$ の値域の幅である. したがって, 少なくとも $\delta < R_f[0, 1]$ でな

²⁸ アフィン変換を $(m \times n)$ 行列 A と m 次元ベクトル b によって $f(x) = Ax + b$ と表せば, 任意の $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\min\{\sigma_k(A)\} \leq |f(x_1) - f(x_2)| / |x_1 - x_2| \leq \max\{\sigma_k(A)\}$ であり, $f(x)$ は双 Lipschitz 連続である. ただし, $\sigma_k(A)$ は A の特異値である.

ければならない。すなわち、最低限の条件として $\max\{N^{-1}, \delta_N/\sqrt{2}\} \leq \delta < R_f[0, 1]$ となるような δ を選べることが要求されるが、 $\delta_N/\sqrt{2} \geq N^{-1}/\sqrt{2}$ であるから、 $R_f[0, 1]$ が極端に小さい場合、 N を非常に大きくしなければならない。また、 $f(t)$ が連続ならば、 $\delta \geq 1$ に対して $\tilde{N}_\delta(\text{graph}(f)) = \lceil R_f[0, 1]/\delta \rceil$ であるから $\max\{N^{-1}, \delta_N/\sqrt{2}\} \leq \delta < \min\{1, R_f[0, 1]\}$ でなければならぬが、必ずしもそうではないものの、典型的には $R_f[0, 1]$ が極端に大きい場合 δ_N も同時に大きい値をとるため、やはり N を大きくしなければならなくなる。とくに $f(t)$ を単純に定数倍して $R_f[0, 1]$ を大きくすれば、明らかに δ_N も同じだけ大きくなる。このように、 $f(t)$ や N に応じて適当にスケールを変換すべきではあるものの、その程度は明確ではない。

さらに、実際には、多くの場合、 $\max\{N^{-1}, \delta_N/\sqrt{2}\}$ よりもある程度大きな δ に対しても $\tilde{N}_\delta(\{x_k\})$ はほとんど一定の値をとり、回帰分析の対象にすべき範囲を定めることでさえ容易でない。たとえば、極端な例として、 $f(t_1) = f(t_2)$ であるならば $\delta_N = N^{-1}$ となり $\max\{N^{-1}, \delta_N/\sqrt{2}\} = N^{-1}$ であるが、すべての $k \geq 2$ に対して $|f(t_{k+1}) - f(t_k)| > 2N^{-1}$ であるならば、明らかに $N^{-1} < \delta < 2N^{-1}$ に対して $\tilde{N}_\delta(\{x_k\}) = N - 1$ となる。同様に、すべての $k \geq 2$ に対して $|f(t_{k+1}) - f(t_k)| > 3N^{-1}$ かつ $|f(t_{k+2}) - f(t_k)| > 3N^{-1}$ であるならば、 $N^{-1} < \delta < 3N^{-1}$ に対して $\tilde{N}_\delta(\{x_k\}) = N - 1$ である。このような状況は $f(t)$ を定数倍して $R_f[0, 1]$ を大きくすることでいくらでも生じ得るし、1未満の係数を掛けて $R_f[0, 1]$ を小さくすることで解消することもできるが、 $R_f[0, 1]$ を小さくすると上述の通り δ の上限が $R_f[0, 1]$ で制限されてしまう。しかし、 $f(t)$ が連続であると仮定すれば、 $\{x_k\}$ の補間を考えることで、この問題をある程度解決できる。つまり、定義域を幅 δ の区間に分割したとき、 $f(t)$ が連続であるならば、各区間にに対する値域もまた適当な一つの区間になっているはずであるから、その各区間に属する t_k に対する $f(t_k)$ の最小値と最大値の差によって $\tilde{N}_\delta(\{x_k\})$ を評価することができる。形式的に述べれば、 $\tilde{N}_\delta(\text{graph}(f))$ は次のように近似できる。

$$\tilde{N}_\delta(\text{graph}(f)) \approx \sum_{n=1}^{\lceil 1/\delta \rceil} \left(\left\lceil \frac{1}{\delta} \max_{t_k \in ((n-1)\delta, n\delta]} \{f(t_k)\} \right\rceil - \left\lfloor \frac{1}{\delta} \min_{t_k \in ((n-1)\delta, n\delta]} \{f(t_k)\} \right\rfloor \right)$$

この値は $\tilde{N}_\delta(\{x_k\})$ 以上かつ $\tilde{N}_\delta(\text{graph}(f))$ 以下になるため、少なくとも $\tilde{N}_\delta(\{x_k\})$ よりは $\tilde{N}_\delta(\text{graph}(f))$ のよい近似であるといえる。また、 $\{x_k\}$ を補間して評価しているため、この値が N で一定になるのは $\delta < N^{-1}$ のときであり、 δ_N とは関係しなくなる。したがって、推定しやすいように $f(t)$ を定数倍して $R_f[0, 1]$ を大きくすることができる。さらに、 δ に対して $R_f[0, 1]$ を十分大きくとれば、天井関数や床関数を外しても値がほとんど変わらなくなる。しかも、天井関数や床関数を外して考えれば、 $f(t)$ に定数 C を掛けて $R_f[0, 1]$ を大きくしたとしても、この値は同じように C 倍されるだけである。そして、いま重要なことはこの値が δ を小さくしたときにどのように振る舞うかであり、値の大きさそのものには興味がない。したがって、そもそも $R_f[0, 1]$ の大きさに注意する必要はなく、次のように $\tilde{N}_\delta(\text{graph}(f))$ の推定値 \hat{N}_δ を得ればよいだけである。

$$\hat{N}_\delta = \frac{1}{\delta} \sum_{n=1}^{\lceil 1/\delta \rceil} \left(\max_{t_k \in ((n-1)\delta, n\delta]} \{f(t_k)\} - \min_{t_k \in ((n-1)\delta, n\delta]} \{f(t_k)\} \right) = \frac{1}{\delta} \sum_{n=1}^{\lceil 1/\delta \rceil} \max_{t_k, t_l \in ((n-1)\delta, n\delta]} \{|f(t_k) - f(t_l)|\}$$

なお、このように推定すれば \hat{N}_δ は $f(t)$ の平行移動に対して不变であるから、 $f(t)$ の最小値が 0 となるか否かは結果に一切関係しない。

図 28 の右図は、パラメータ $a = 1/2, b = 3$ の Weierstrass 関数 $w(t)$ に対して $f(t) = w(t) + 2$ とし、 $N = 1000$ としたときの、 $\tilde{N}_\delta(\{x_k\})$ と \hat{N}_δ である。なお、Weierstrass 関数 $w(t)$ とは、パラメータ $1 < 1/a < b$ に対して、

$$w(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi t)$$

と定義される連続かつ微分不可能な周期関数であり、Falconer (2014) によれば、このグラフのボックス次元は $2 + \ln(a)/\ln(b)$ であるというが、ハウスドルフ次元もこの値に一致するのか否かは未解決である。また、 b が奇数のとき $w(t)$ の値域は $[-(1-a)^{-1}, (1-a)^{-1}]$ であり、 $f(t)$ は最小値が 0 となるように平行移動している。右図の垂線は左から $\delta_N/\sqrt{2}, N^{-1}, 1, R_f[0, 1]$ であり、実線は $\lceil R_f[0, 1]/\delta \rceil$ であるが、 $R_f[0, 1] = 4$ であるから

$\delta \geq 1$ に対して $\tilde{N}_\delta(\{x_k\})$ はすべてこの実線上にプロットされている。また、 $\delta_N/\sqrt{2} < N^{-1}$ であり、 $\delta < N^{-1}$ に対して $\tilde{N}_\delta(\{x_k\}) = N$ となっているが、 $\tilde{N}_\delta(\{x_k\})$ は N^{-1} よりも大きな δ に対してもほとんど一定である。一方で、 \hat{N}_δ はより広い範囲において一定の傾きで推移していることが確認できる。そして、 $\delta = 0.1$ 付近では $\tilde{N}_\delta(\{x_k\})$ と \hat{N}_δ がほとんど同じように推移している。

自己相似過程の観測値である時系列 $\{X_t\}_{0 \leq t \leq N}$ に話題を戻すと、そのグラフのボックス次元の推定には、次のように計算される \hat{N}_δ を用いることになる。

$$\hat{N}_\delta = \frac{1}{\delta} \sum_{n=1}^{\lceil 1/\delta \rceil} \max_{t/N, s/N \in ((n-1)\delta, n\delta]} \{|X_t - X_s|\}$$

$\{X_t\}$ の添字は整数であるが、 X_t に対する時間を t/N とすることで、上の t_k と同じように区間 $[0, 1]$ を等間隔にとった時点に変換している。図 29 は、この \hat{N}_δ の計算のイメージである。時系列 $\{X_t\}$ を幅 δ の区間に区切り、各区間内における $\{X_t\}$ の幅が δ 何個分であるかを求め、それを合計したものが \hat{N}_δ である。上述の通り、回帰分析の対象とする δ の範囲は少なくとも $N^{-1} \leq \delta < 1$ でなければならないが、 N^{-1} や 1 に近すぎる δ を対象にすると推定値に偏りが生じるため、本稿では $10N^{-1}$ から 0.1 の区間から対数目盛上で等間隔になるように 100 個の δ を選ぶものとした。そのようにして推定されたボックス次元を図表等において $\hat{\dim}_{\text{BC}}$ と表すことにする。

図 30 は図 16 と同じ乱数を用いて \hat{N}_δ を計算し、両対数グラフ上で線形回帰分析を行う様子である。青色の領域が回帰分析の対象としている範囲である。決定係数はいずれも非常に大きく、 \hat{N}_δ のばらつきも小さい。しかし、 $H = 0.2$ のとき、ボックス次元は $\alpha = 2$ ならば 1.8 となり、 $\alpha = 1.6$ ならば 1.675 となるはずであるが、推定値はそれよりも明らかに小さく、正確に推定できていないようである。一方で、 $H = 0.8$ の場合は比較的正しく推定されている。

図 31 は、非整数安定過程の乱数セットのグラフの次元をボックスカウント法によって推定した結果である。破線は本来とるべき値を示すが、ここでは $\alpha = 1$ のケースでも $2 - H - 1/\alpha + 1/2 = 3/2 - H$ としている。これは後述する樋口法に対する結果でも同様である。 H が小さいときには、やはり非常に大きな偏りが生じている。このときの推定値は過小評価となっているが、常に過小評価されるわけではなく、 H が大きいときには若干過大に評価されている。さらに、 α が小さいときほど偏りが大きく、加えて β にも影響を受けているようである。これらの不正確さは、 δ の選び方や $\tilde{N}_\delta(\text{graph}(F))$ の推定の仕方に大きく影響されるものと考えられる。とくに、正しく推定できていない $0 < \alpha < 2$ かつ $H \leq 1/2$ のケースでは、非整数安定過程が連続とはいえないため、 \hat{N}_δ のように推定することが正当化できない。しかし、上述の通り、 $\tilde{N}_\delta(\{x_k\})$ をそのまま用いて推定すると、 δ の範囲を適切に選ぶことが非常に困難になり、1 以上 2 以下という妥当な範囲に収まる推定値を得ることさえ容易でなくなる。

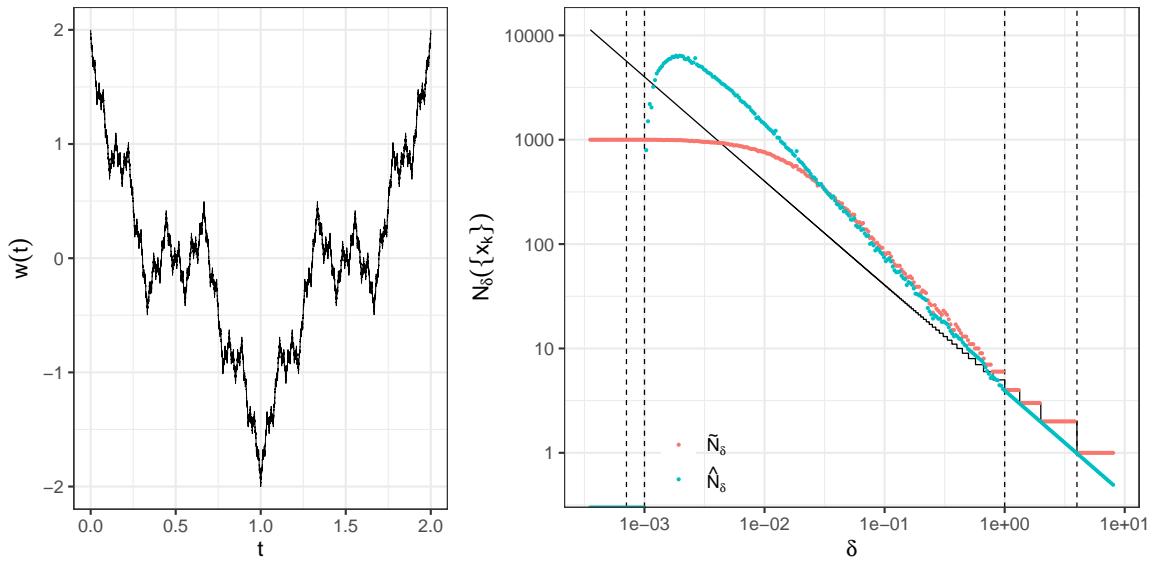


図 28 $a = 1/2, b = 3$ の Weierstrass 関数 $w(t)$ (左) と $N = 1000, f(t) = w(t) + 2$ としたときの $\tilde{N}_\delta(\{x_k\})$ と \hat{N}_δ (右)²⁹

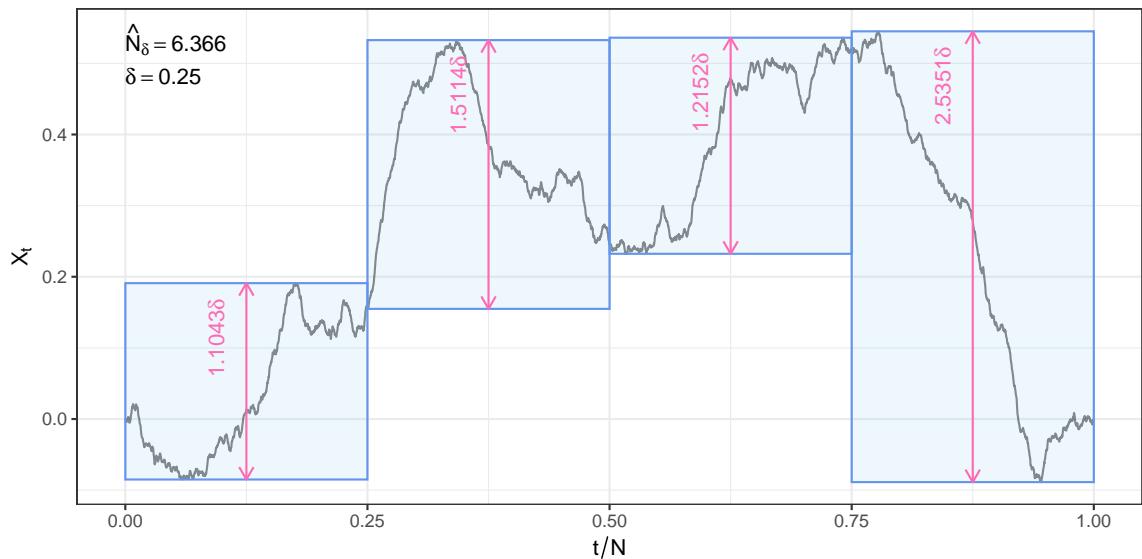


図 29 ボックスカウント法のイメージ

²⁹ Weierstrass 関数は 0 から 500 までの k に対する $a^k \cos(b^k \pi t)$ の和として近似した。

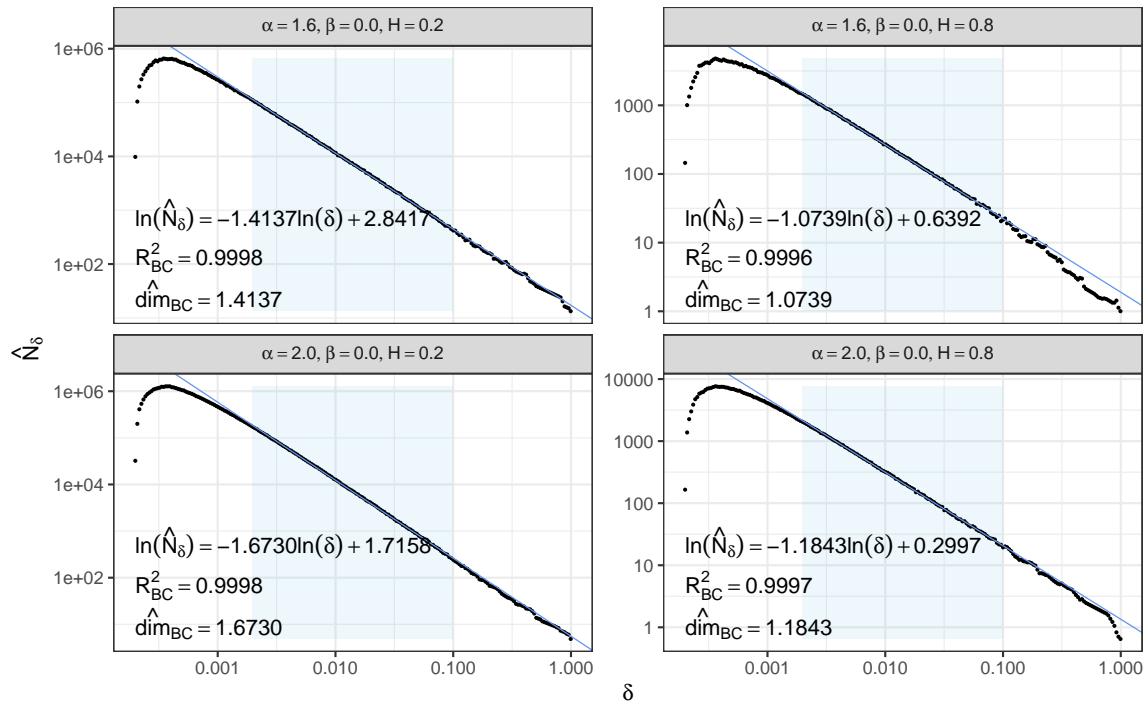


図 30 ボックスカウント法によるグラフの次元の推定の例

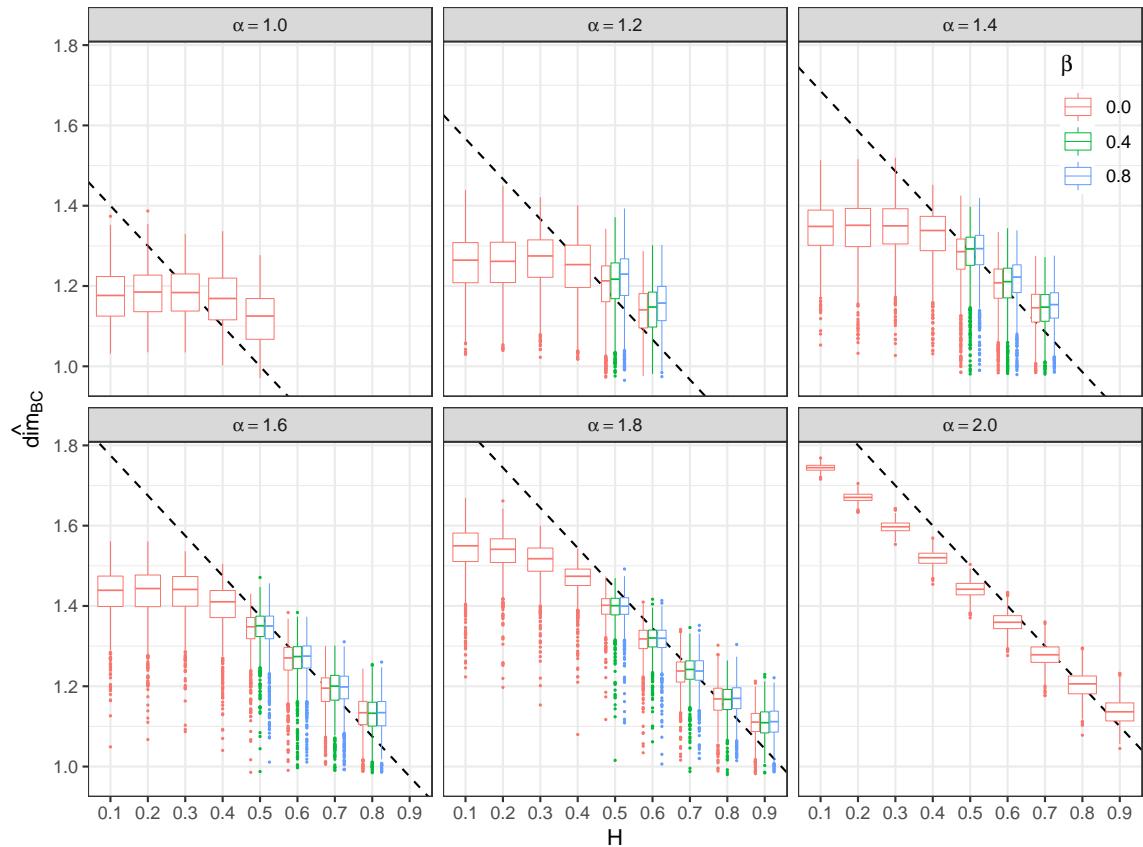


図 31 ボックスカウント法による非整数安定過程の乱数セットのグラフの次元の推定値

8.3.2 樋口法

関数のグラフのボックス次元を推定する別の方法として, Higuchi (1988) による樋口法が広く知られている。これは Burlaga and Klein (1986) による BK 法を改良したものである。これらの推定方法に関する詳細は熊谷 (2002) にもまとめられている。これらは主に非整数ブラウン運動のような自己相似過程のグラフの次元を推定することを目的としており、自己相似過程のスケーリング指数が s であるとき、多くの場合、グラフのボックス次元が確率 1 で $2 - s$ となることを利用している。とくに、増分の絶対値の期待値が時間間隔の s 乗に比例することを用いるが、したがって、絶対値の期待値が存在しない $0 < \alpha \leq 1$ のケースではこれらの方法を正当化し難い。一方で、上に述べた Weierstrass 関数のように確率過程ではない通常の関数であっても、そのグラフの次元が $2 - s$ であるならば、増分の絶対値の平均は近似的に時間間隔の s 乗に比例することが多い。たとえば、適当な関数 $f(t)$ の定義域を $[0, 1]$ とすると、十分小さな δ に対して、 $\delta \tilde{N}_\delta(\text{graph}(f))$ は定義域を幅 δ の区間で区切ったときに各区間に上での $f(t)$ のグラフが一辺 δ の正方形と交叉する平均的な数となり、 $\delta^2 \tilde{N}_\delta(\text{graph}(f))$ はその幅 δ の区間上での $f(t)$ の平均的な値域の幅を近似する。ただし、 $f(t)$ が定数関数であるようなケースは例外である。そして、 $\dim_B(\text{graph}(f)) = 2 - s$ であるならば、 $\tilde{N}_\delta(\text{graph}(f))$ は $\delta \rightarrow 0$ で指數 $s - 2$ の幕乗則に従うため、 $\delta^2 \tilde{N}_\delta(\text{graph}(f))$ は指數 s の幕乗則に従うことになる。したがって、増分の絶対値の平均も指數 s の幕乗則に従うと考えられる。また、とくに、関数 $f(t)$ の増分の二乗の平均が存在して、それが時間間隔 h に対して $h \rightarrow 0$ で指數 $2s$ の幕乗則に従うならば、 $f(t)$ はその増分の自己相関関数やパワースペクトル密度に関してハースト指數 $H = s$ の非整数ブラウン運動と似た性質をもつことになり、 $f(t)$ のグラフの次元も $2 - s$ となることが期待される。

このような性質を利用して、樋口法では観測された時系列 $\{X_t\}_{0 \leq t \leq N}$ と N 未満の自然数 n に対して次のように得られる統計量 L_n を用いてボックス次元の推定を行う。なお、ここでは $\{X_t\}$ を確率過程の観測値として扱っているが、Weierstrass 関数のような通常の関数の値であってもよい。

$$L_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{n} \frac{N-1}{\lfloor (N-t)/n \rfloor n} \sum_{k=1}^{\lfloor (N-t)/n \rfloor} |X_{t+kn} - X_{t+(k-1)n}|$$

ここで、係数 $(N-1) / (\lfloor (N-t)/n \rfloor n)$ は $\{X_t\}$ から得られる間隔 n の増分 $X_{t+kn} - X_{t+(k-1)n}$ の標本数が n によって異なることを考慮した調整であり、とくに n が N の約数であるならば $1 \leq t \leq n$ に対して $\lfloor (N-t)/n \rfloor = N/n - 1$ であるから、その場合には

$$L_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{n} \frac{N-1}{N-n} \sum_{k=1}^{N-n} |X_{t+kn} - X_{t+(k-1)n}| = \frac{1}{n^2} \frac{N-1}{N-n} \sum_{t=1}^{N-n} |X_{t+n} - X_t|$$

である。このように、間隔 n の増分 $X_{t+n} - X_t$ の絶対値の平均を計算することで、その期待値ないしは平均を推定しており、上述のように元の確率過程ないしは関数のグラフのボックス次元が $2 - s$ であるならば、それが n に対して指數 s の幕乗則に従うと考えられるため、 L_n は指數 $s - 2$ の幕乗則に従うことになる。図 32 は L_n の計算のイメージである。ただし、図では $n = N/4$ のケースを考え、時系列を 4 つの区間に分割しているが、実際には区間を重複させながら増分を評価することになるため、その点は正確でない。しかし、ボックスカウント法が図 29 のように値域の幅を評価していたのに対して、樋口法では始点と終点との差を評価しているという点が明確な違いとなっていることがわかる。

L_n の定義からわかるように、本来 n が N の約数である必要はないが、そのように制限することで上のように計算が簡単になることに加え、本稿では R/S 分析や DFA 等で適切な推定が行えるように、比較的約数の多い標本数でデータをとっているため、 n は N の約数から選べば十分であると考えられる。また、 N に対して n が大きすぎると $\{X_t\}$ から得られる間隔 n の増分の標本数が少くなり、その期待値の正確な推定が難しくなるため、 n は N に対してある程度小さな値でなければならない。そこで、本稿では n を $N/30$ 以下の N の約数として選ぶことにする。そのようにして推定されたボックス次元を図表等において $\hat{\dim}_H$ と表すことにする。なお、 H は樋口法の頭文字であり、ハウスドルフ次元 $\dim_H(F)$ の推定値であることを意味するわけではない。

ちなみに, Burlaga and Klein (1986) による BK 法では統計量 \tilde{L}_n を次のように計算して L_n の代わりに用いている.

$$\tilde{L}_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{N/n-1} \left| \sum_{t=1}^n (X_{t+kn} - X_{t+(k-1)n}) \right|$$

ただし, ここでは n が N の約数であることを前提にしているが, 実際には樋口法と同様に増分の標本数の違いを考慮することで, N の約数ではない n にも対応させることができる. 樋口法が増分の絶対値を合計しているのに対して, BK 法では絶対値をとる前に n 個ずつ増分の合計を計算しているという点が主な違いである.

図 33 は図 16 と同じ乱数を用いて L_n を計算し, 両対数グラフ上で線形回帰分析を行う様子であるが, L_n のばらつきは非常に小さく, n を $N/30$ 以下の N の約数に制限しても十分正しく推定できており, とくに $H = 0.2$ のケースではこれ以外の n を用いても推定結果がほとんど変わらないであろうことが確認できる. また, この結果からわかるように, 樋口法では決定係数が極めて高くなる傾向にあり, 小さな決定係数が計測された場合には注意が必要である. とくに $H = 0.8$ のケースでは, n が大きな範囲で異なる傾きを示しており, このような範囲が回帰分析の対象に含まれると, 決定係数が小さくなることがわかる. 推定値をボックスカウント法と比較すると, $H = 0.8$ のケースではいずれもあまり変わらないが, $H = 0.2$ のケースでは明らかに真の値に近づいている.

図 34 は, 非整数安定過程の乱数セットのグラフの次元を樋口法によって推定した結果である. ボックスカウント法と異なり H が小さいときにも正しく推定できており, 推定値の偏りもそれほど大きくなない. α が小さい場合には, H によらず同程度に過大評価されるようであるが, 推定値が過大であるか過小であるかがハースト指数や α によらない点からも, ボックスカウント法よりも扱いやすい推定方法であるといえる.

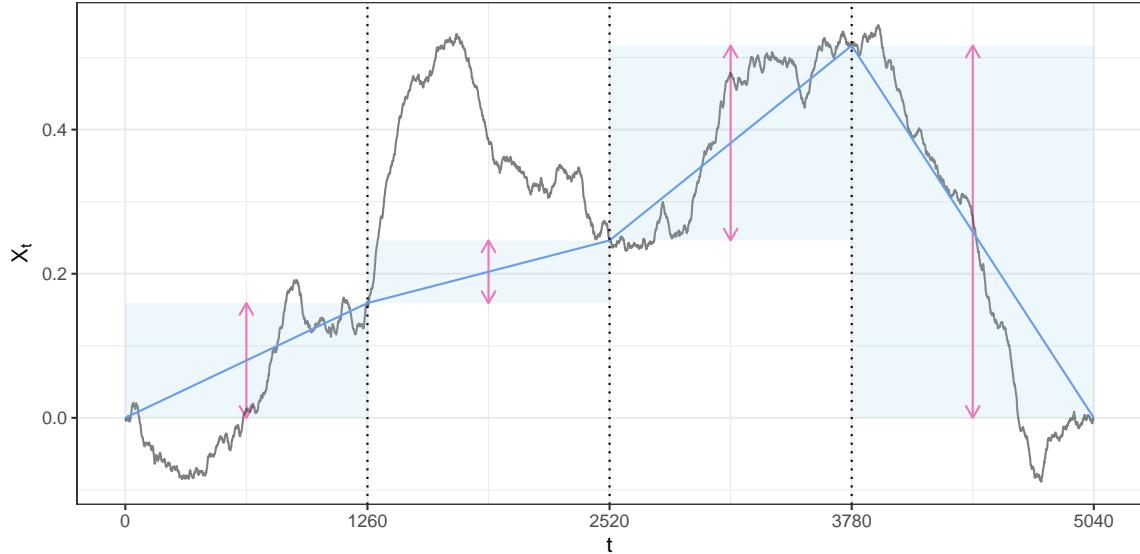


図 32 樋口法のイメージ

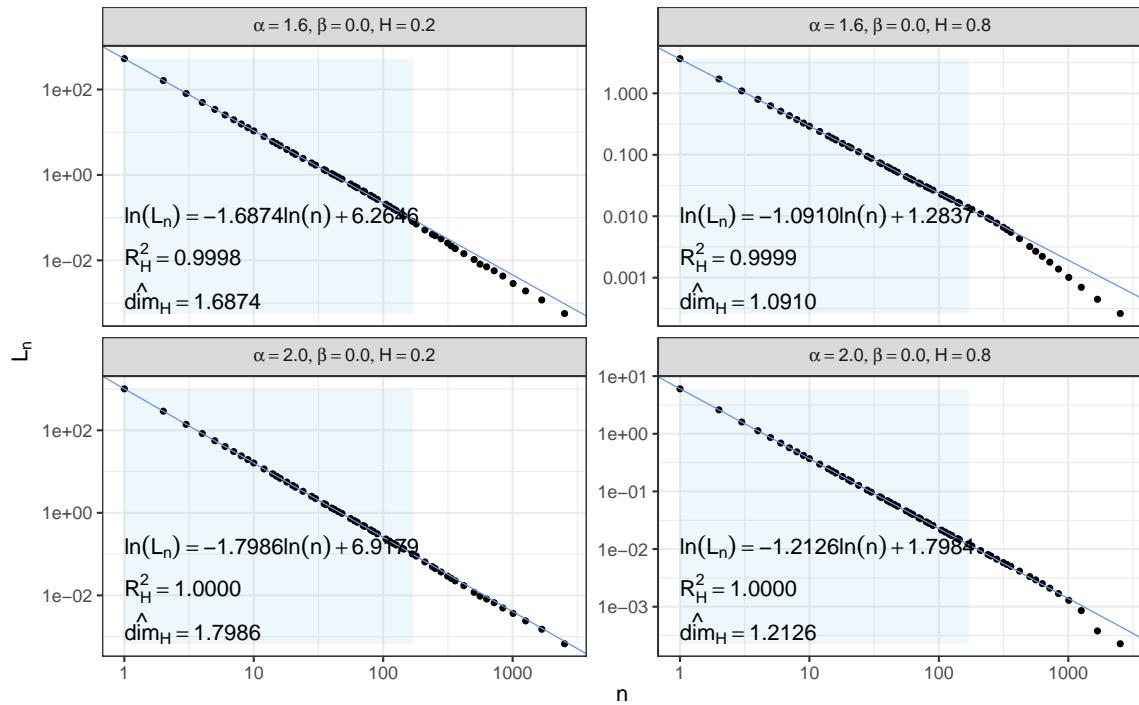


図 33 樋口法によるグラフの次元の推定の例

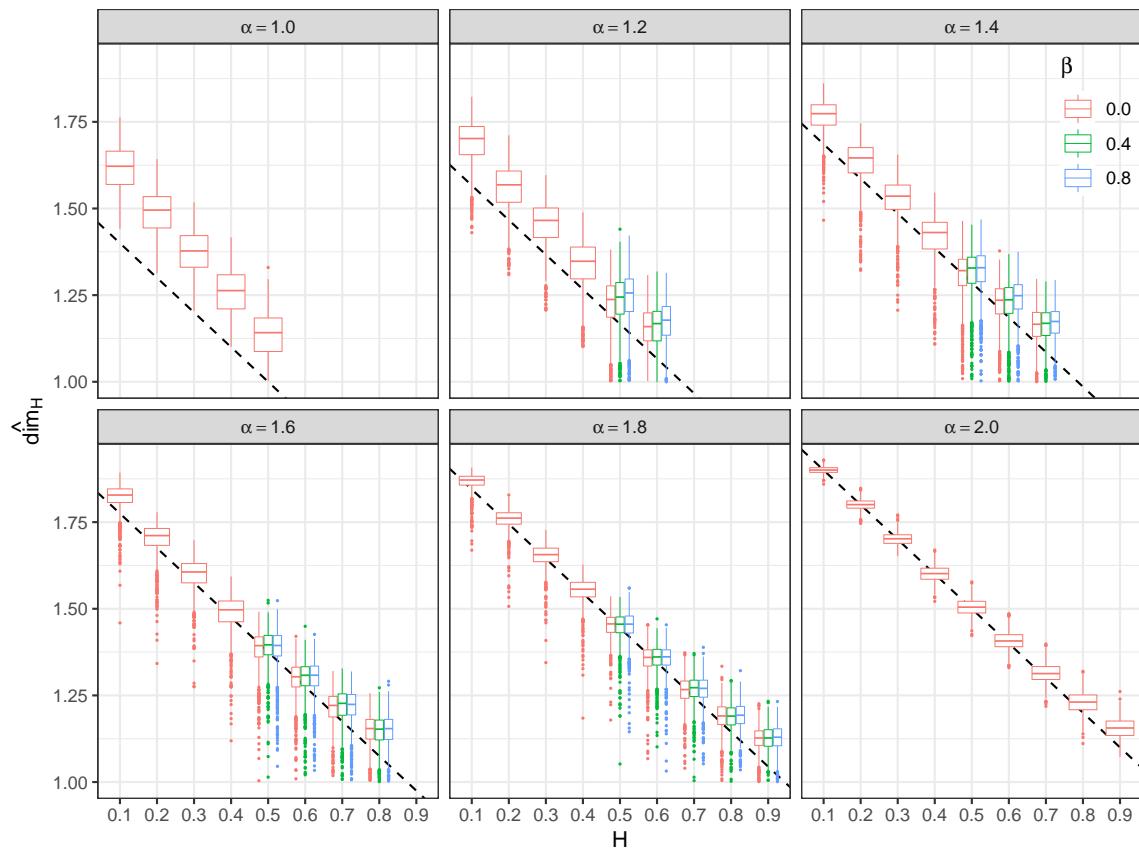


図 34 樋口法による非整数安定過程の乱数セットのグラフの次元の推定値

ここまで述べてきたすべての推定方法、すなわち、libstableR パッケージ（ver. 1.0.2）の stable_fit_mle2d 関数による安定分布のパラメータの推定、分散、パワースペクトル密度、R/S 分析、DFA によるハースト指数の推定、ボックスカウント法、樋口法によるフラクタル次元の推定は、いずれも時系列 $\{X_t\}_{0 \leq t \leq N}$ の定数倍あるいはその増分 $\{Y_t\}_{1 \leq t \leq N}$ の定数倍に対して不变である。もちろん、 $\{X_t\}$ に定数を足して平行移動しても $\{Y_t\}$ は変わらないため、これも結果に影響しない。しかし、 $\{Y_t\}$ の平行移動はボックスカウント法と樋口法によるフラクタル次元の推定に対して影響を及ぼす。 $\{Y_t\}$ に定数 μ を足して平行移動すると、 $\{X_t\}$ は各 t に対して μt だけ移動することになるが、これは $\{X_t\}$ のグラフ $\{(t, X_t)\}$ の適当な線形変換によって表されるため、本来その次元は変わらないはずである。つまり、これによる推定値の変化は推定方法の性質によるものであり、実際の値が変わることによるものではない。 $\{Y_t\}$ の平均がその変動に対して極端に大きいならば、 $\{X_t\}$ の変動幅は利用可能なほとんどの時間間隔に対して、その 1 乗に比例してしまうため、ボックスカウント法や樋口法では正確な推定が難しくなる。ゆえに、本稿ではあらかじめ $\{Y_t\}$ の平均が 0 になるように調整している。

最後に、非整数安定過程の乱数セットに対する推定結果の平均と標準偏差を表 1 に示しておく。±の後に続く数値が標準偏差である。

表 1: 非整数安定過程の乱数セットの推定値の平均と標準偏差

H	α	β	\dim_H	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{H}_{DFA}	$\hat{H}_{R/S}$	\hat{H}_S	\hat{H}_{σ^2}	$\hat{\dim}_H$	$\hat{\dim}_{\text{BC}}$
0.1	1.0	0.0	1.4000	1.0017 ± 0.040	0.0054 ± 0.089	0.1030 ± 0.011	0.4999 ± 0.021	0.0218 ± 0.024	0.0389 ± 0.068	1.6145 ± 0.066	1.1746 ± 0.065
0.1	1.2	0.0	1.5667	1.2006 ± 0.033	0.0032 ± 0.045	0.1033 ± 0.011	0.4976 ± 0.025	0.0214 ± 0.025	0.0442 ± 0.065	1.6895 ± 0.065	1.2549 ± 0.073
0.1	1.4	0.0	1.6857	1.4013 ± 0.030	0.0048 ± 0.030	0.1027 ± 0.011	0.4915 ± 0.033	0.0199 ± 0.025	0.0529 ± 0.053	1.7629 ± 0.051	1.3412 ± 0.068
0.1	1.6	0.0	1.7750	1.6008 ± 0.029	0.0056 ± 0.043	0.1029 ± 0.012	0.4752 ± 0.041	0.0211 ± 0.026	0.0662 ± 0.049	1.8196 ± 0.042	1.4294 ± 0.067
0.1	1.8	0.0	1.8444	1.8019 ± 0.038	0.0091 ± 0.105	0.1021 ± 0.011	0.4308 ± 0.058	0.0211 ± 0.025	0.0806 ± 0.040	1.8651 ± 0.029	1.5385 ± 0.064
0.1	2.0	0.0	1.9000	1.9623 ± 0.023	0.0140 ± 0.169	0.1023 ± 0.012	0.1913 ± 0.016	0.0237 ± 0.027	0.0991 ± 0.015	1.9003 ± 0.010	1.7444 ± 0.009
0.2	1.0	0.0	1.3000	1.0039 ± 0.054	0.0075 ± 0.133	0.2010 ± 0.021	0.5005 ± 0.021	0.1685 ± 0.021	0.1785 ± 0.045	1.4850 ± 0.068	1.1810 ± 0.065
0.2	1.2	0.0	1.4667	1.1987 ± 0.042	0.0043 ± 0.071	0.2004 ± 0.021	0.4984 ± 0.025	0.1691 ± 0.026	0.1814 ± 0.044	1.5581 ± 0.069	1.2557 ± 0.072
0.2	1.4	0.0	1.5857	1.3986 ± 0.035	0.0041 ± 0.047	0.2008 ± 0.019	0.4897 ± 0.032	0.1689 ± 0.022	0.1814 ± 0.037	1.6318 ± 0.065	1.3394 ± 0.074
0.2	1.6	0.0	1.6750	1.5993 ± 0.031	0.0065 ± 0.049	0.1999 ± 0.020	0.4678 ± 0.040	0.1684 ± 0.026	0.1863 ± 0.033	1.6998 ± 0.051	1.4301 ± 0.070
0.2	1.8	0.0	1.7444	1.8018 ± 0.038	0.0120 ± 0.114	0.1991 ± 0.019	0.4221 ± 0.052	0.1687 ± 0.025	0.1938 ± 0.027	1.7568 ± 0.032	1.5325 ± 0.055
0.2	2.0	0.0	1.8000	1.9637 ± 0.023	0.0159 ± 0.185	0.1992 ± 0.021	0.2712 ± 0.020	0.1689 ± 0.027	0.1996 ± 0.017	1.8005 ± 0.016	1.6705 ± 0.012
0.3	1.0	0.0	1.2000	1.0118 ± 0.052	0.0069 ± 0.156	0.2989 ± 0.029	0.4953 ± 0.021	0.2863 ± 0.027	0.2924 ± 0.032	1.3724 ± 0.066	1.1817 ± 0.063
0.3	1.2	0.0	1.3667	1.2031 ± 0.044	0.0021 ± 0.073	0.2984 ± 0.028	0.4902 ± 0.023	0.2877 ± 0.025	0.2944 ± 0.029	1.4527 ± 0.069	1.2634 ± 0.072
0.3	1.4	0.0	1.4857	1.3994 ± 0.031	0.0033 ± 0.048	0.2977 ± 0.027	0.4795 ± 0.030	0.2884 ± 0.023	0.2961 ± 0.029	1.5263 ± 0.062	1.3429 ± 0.071
0.3	1.6	0.0	1.5750	1.6004 ± 0.028	0.0077 ± 0.051	0.2969 ± 0.027	0.4550 ± 0.037	0.2873 ± 0.024	0.2969 ± 0.024	1.5965 ± 0.051	1.4291 ± 0.063
0.3	1.8	0.0	1.6444	1.8015 ± 0.038	0.0086 ± 0.116	0.2972 ± 0.026	0.4221 ± 0.041	0.2870 ± 0.024	0.2970 ± 0.022	1.6523 ± 0.037	1.5093 ± 0.051
0.3	2.0	0.0	1.7000	1.9634 ± 0.022	0.0147 ± 0.179	0.2949 ± 0.026	0.3502 ± 0.024	0.2870 ± 0.025	0.2988 ± 0.018	1.7017 ± 0.019	1.5971 ± 0.04
0.4	1.0	0.0	1.1000	1.0185 ± 0.046	0.0039 ± 0.158	0.3970 ± 0.031	0.4889 ± 0.021	0.3954 ± 0.019	0.3989 ± 0.018	1.2571 ± 0.067	1.1669 ± 0.067
0.4	1.2	0.0	1.2667	1.2006 ± 0.043	0.0050 ± 0.089	0.3954 ± 0.034	0.4837 ± 0.022	0.3950 ± 0.022	0.3986 ± 0.019	1.3347 ± 0.075	1.2423 ± 0.077
0.4	1.4	0.0	1.3857	1.4007 ± 0.030	0.0064 ± 0.053	0.3954 ± 0.033	0.4755 ± 0.023	0.3949 ± 0.026	0.3986 ± 0.020	1.4151 ± 0.068	1.3233 ± 0.072
0.4	1.6	0.0	1.4750	1.5989 ± 0.028	0.0082 ± 0.056	0.3943 ± 0.033	0.4635 ± 0.027	0.3955 ± 0.023	0.3989 ± 0.020	1.4864 ± 0.057	1.3973 ± 0.062
0.4	1.8	0.0	1.5444	1.7998 ± 0.035	0.0109 ± 0.123	0.3934 ± 0.030	0.4496 ± 0.028	0.3957 ± 0.025	0.3998 ± 0.020	1.5507 ± 0.041	1.4649 ± 0.044
0.4	2.0	0.0	1.6000	1.9637 ± 0.023	0.0146 ± 0.186	0.3941 ± 0.032	0.4356 ± 0.030	0.3959 ± 0.026	0.3995 ± 0.021	1.6013 ± 0.023	1.5194 ± 0.018
0.5	1.0	0.0	1.0000	0.9997 ± 0.018	-0.0007 ± 0.029	0.4966 ± 0.046	0.5038 ± 0.021	0.4996 ± 0.020	0.4984 ± 0.023	1.1368 ± 0.064	1.1185 ± 0.064

表 1: (続き)

H	α	β	\dim_H	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{H}_{DFA}	$\hat{H}_{R/S}$	\hat{H}_S	\hat{H}_{σ^2}	$\hat{\dim}_H$	$\hat{\dim}_{\text{BC}}$
0.5	1.2	0.0	1.1667	1.1993 ± 0.021	0.0029 ± 0.033	0.4949 ± 0.045	0.5079 ± 0.024	0.5001 ± 0.021	0.4989 ± 0.017	1.2242 ± 0.076	1.1973 ± 0.075
0.5	1.2	0.4	1.1667	1.1930 ± 0.023	0.4019 ± 0.030	0.4972 ± 0.043	0.5089 ± 0.025	0.4994 ± 0.022	0.4990 ± 0.016	1.2333 ± 0.075	1.2062 ± 0.073
0.5	1.2	0.8	1.1667	1.2000 ± 0.032	0.8168 ± 0.033	0.4941 ± 0.037	0.5067 ± 0.025	0.4997 ± 0.021	0.4981 ± 0.017	1.2431 ± 0.076	1.2155 ± 0.074
0.5	1.4	0.0	1.2857	1.3995 ± 0.024	0.0048 ± 0.039	0.4950 ± 0.038	0.5102 ± 0.026	0.4996 ± 0.026	0.4986 ± 0.019	1.3066 ± 0.073	1.2708 ± 0.071
0.5	1.4	0.4	1.2857	1.3970 ± 0.024	0.4061 ± 0.037	0.4919 ± 0.044	0.5090 ± 0.027	0.4983 ± 0.022	0.4970 ± 0.018	1.3139 ± 0.071	1.2770 ± 0.068
0.5	1.4	0.8	1.2857	1.4037 ± 0.033	0.8130 ± 0.042	0.4925 ± 0.038	0.5097 ± 0.029	0.5000 ± 0.024	0.4982 ± 0.017	1.3171 ± 0.071	1.2800 ± 0.068
0.5	1.6	0.0	1.3750	1.5987 ± 0.026	0.0072 ± 0.054	0.4945 ± 0.035	0.5151 ± 0.030	0.5009 ± 0.025	0.4989 ± 0.019	1.3835 ± 0.057	1.3375 ± 0.054
0.5	1.6	0.4	1.3750	1.5998 ± 0.029	0.4154 ± 0.059	0.4924 ± 0.037	0.5152 ± 0.031	0.5005 ± 0.024	0.4985 ± 0.019	1.3893 ± 0.053	1.3436 ± 0.049
0.5	1.6	0.8	1.3750	1.6023 ± 0.034	0.8097 ± 0.063	0.4932 ± 0.035	0.5150 ± 0.030	0.5003 ± 0.024	0.4986 ± 0.018	1.3844 ± 0.061	1.3387 ± 0.058
0.5	1.8	0.0	1.4444	1.8010 ± 0.034	0.0141 ± 0.123	0.4930 ± 0.036	0.5186 ± 0.032	0.5015 ± 0.024	0.4995 ± 0.020	1.4514 ± 0.038	1.3966 ± 0.035
0.5	1.8	0.4	1.4444	1.8027 ± 0.037	0.4592 ± 0.160	0.4919 ± 0.036	0.5174 ± 0.031	0.4987 ± 0.025	0.4976 ± 0.020	1.4489 ± 0.045	1.3940 ± 0.043
0.5	1.8	0.8	1.4444	1.8016 ± 0.039	0.7975 ± 0.117	0.4926 ± 0.036	0.5191 ± 0.032	0.5000 ± 0.026	0.4982 ± 0.020	1.4500 ± 0.044	1.3948 ± 0.041
0.5	2.0	0.0	1.5000	1.9638 ± 0.023	0.0045 ± 0.186	0.4896 ± 0.035	0.5216 ± 0.032	0.5014 ± 0.026	0.4979 ± 0.020	1.5049 ± 0.024	1.4414 ± 0.021
0.6	1.2	0.0	1.0667	1.2181 ± 0.054	0.0082 ± 0.164	0.5922 ± 0.041	0.5999 ± 0.031	0.6018 ± 0.022	0.5956 ± 0.019	1.1554 ± 0.061	1.1352 ± 0.062
0.6	1.2	0.4	1.0667	1.2155 ± 0.048	0.3959 ± 0.165	0.5931 ± 0.038	0.6018 ± 0.030	0.6031 ± 0.020	0.5957 ± 0.018	1.1589 ± 0.063	1.1392 ± 0.063
0.6	1.2	0.8	1.0667	1.2279 ± 0.053	0.8145 ± 0.119	0.5940 ± 0.041	0.6011 ± 0.030	0.6015 ± 0.019	0.5952 ± 0.020	1.1722 ± 0.063	1.1520 ± 0.063
0.6	1.4	0.0	1.1857	1.4044 ± 0.042	0.0074 ± 0.094	0.5924 ± 0.041	0.6036 ± 0.032	0.6032 ± 0.023	0.5963 ± 0.020	1.2251 ± 0.063	1.1982 ± 0.062
0.6	1.4	0.4	1.1857	1.3995 ± 0.043	0.4098 ± 0.101	0.5913 ± 0.036	0.6031 ± 0.031	0.6019 ± 0.027	0.5946 ± 0.019	1.2279 ± 0.065	1.2008 ± 0.064
0.6	1.4	0.8	1.1857	1.4088 ± 0.050	0.8078 ± 0.079	0.5919 ± 0.036	0.6028 ± 0.031	0.6019 ± 0.022	0.5956 ± 0.018	1.2393 ± 0.061	1.2125 ± 0.059
0.6	1.6	0.0	1.2750	1.6007 ± 0.031	0.0098 ± 0.070	0.5902 ± 0.040	0.6048 ± 0.034	0.6023 ± 0.022	0.5955 ± 0.020	1.2974 ± 0.053	1.2634 ± 0.052
0.6	1.6	0.4	1.2750	1.6013 ± 0.035	0.4168 ± 0.073	0.5880 ± 0.040	0.6050 ± 0.032	0.6029 ± 0.023	0.5954 ± 0.021	1.2991 ± 0.056	1.2642 ± 0.055
0.6	1.6	0.8	1.2750	1.6056 ± 0.039	0.8136 ± 0.068	0.5885 ± 0.037	0.6031 ± 0.033	0.6022 ± 0.024	0.5944 ± 0.020	1.3004 ± 0.053	1.2661 ± 0.052
0.6	1.8	0.0	1.3444	1.8006 ± 0.035	0.0040 ± 0.127	0.5907 ± 0.039	0.6094 ± 0.034	0.6033 ± 0.025	0.5953 ± 0.021	1.3548 ± 0.043	1.3131 ± 0.042
0.6	1.8	0.4	1.3444	1.8007 ± 0.037	0.4482 ± 0.156	0.5877 ± 0.037	0.6052 ± 0.034	0.6007 ± 0.025	0.5942 ± 0.021	1.3565 ± 0.040	1.3155 ± 0.039
0.6	1.8	0.8	1.3444	1.8029 ± 0.041	0.7947 ± 0.125	0.5920 ± 0.039	0.6102 ± 0.036	0.6015 ± 0.026	0.5954 ± 0.021	1.3563 ± 0.044	1.3145 ± 0.043

表 1: (続き)

H	α	β	\dim_H	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{H}_{DFA}	$\hat{H}_{R/S}$	\hat{H}_S	\hat{H}_{σ^2}	$\hat{\dim}_H$	$\hat{\dim}_{\text{BC}}$
0.6	2.0	0.0	1.4000	1.9642 ± 0.023	0.0171 ± 0.170	0.58888 ± 0.040	0.6110 ± 0.038	0.6013 ± 0.026	0.5951 ± 0.022	1.4078 ± 0.027	1.3599 ± 0.025
0.7	1.4	0.0	1.0857	1.4232 ± 0.069	0.0155 ± 0.177	0.6882 ± 0.043	0.6935 ± 0.034	0.7037 ± 0.022	0.6882 ± 0.024	1.1620 ± 0.054	1.1411 ± 0.054
0.7	1.4	0.4	1.0857	1.4226 ± 0.066	0.4062 ± 0.162	0.6908 ± 0.043	0.6944 ± 0.035	0.7042 ± 0.022	0.6902 ± 0.021	1.1634 ± 0.053	1.1418 ± 0.053
0.7	1.4	0.8	1.0857	1.4314 ± 0.065	0.8226 ± 0.104	0.6915 ± 0.040	0.6955 ± 0.035	0.7041 ± 0.021	0.6907 ± 0.022	1.1680 ± 0.051	1.1477 ± 0.052
0.7	1.6	0.0	1.1750	1.6081 ± 0.045	0.0133 ± 0.121	0.6912 ± 0.042	0.6988 ± 0.035	0.7051 ± 0.024	0.6904 ± 0.022	1.2140 ± 0.049	1.1879 ± 0.050
0.7	1.6	0.4	1.1750	1.6061 ± 0.057	0.4209 ± 0.117	0.6861 ± 0.044	0.6944 ± 0.037	0.7044 ± 0.025	0.6884 ± 0.024	1.2191 ± 0.052	1.1928 ± 0.051
0.7	1.6	0.8	1.1750	1.6077 ± 0.056	0.8149 ± 0.091	0.6894 ± 0.040	0.6957 ± 0.035	0.7048 ± 0.026	0.6892 ± 0.023	1.2166 ± 0.051	1.1908 ± 0.051
0.7	1.8	0.0	1.2444	1.7993 ± 0.043	0.0138 ± 0.164	0.6911 ± 0.042	0.7005 ± 0.038	0.7064 ± 0.027	0.6912 ± 0.024	1.2641 ± 0.044	1.2327 ± 0.044
0.7	1.8	0.4	1.2444	1.8028 ± 0.052	0.4568 ± 0.188	0.6866 ± 0.043	0.6966 ± 0.038	0.7044 ± 0.027	0.6882 ± 0.024	1.2682 ± 0.042	1.2373 ± 0.042
0.7	1.8	0.8	1.2444	1.8029 ± 0.045	0.7932 ± 0.126	0.6903 ± 0.043	0.7002 ± 0.038	0.7047 ± 0.026	0.6907 ± 0.023	1.2668 ± 0.042	1.2354 ± 0.042
0.7	2.0	0.0	1.3000	1.9635 ± 0.022	0.0195 ± 0.169	0.6886 ± 0.041	0.7013 ± 0.039	0.7048 ± 0.025	0.6905 ± 0.023	1.3138 ± 0.028	1.2783 ± 0.029
0.8	1.6	0.0	1.0750	1.6259 ± 0.083	0.0156 ± 0.230	0.7841 ± 0.047	0.7806 ± 0.039	0.8060 ± 0.024	0.7755 ± 0.024	1.1500 ± 0.045	1.1305 ± 0.045
0.8	1.6	0.4	1.0750	1.6245 ± 0.088	0.4313 ± 0.227	0.7872 ± 0.048	0.7822 ± 0.038	0.8067 ± 0.024	0.7776 ± 0.025	1.1467 ± 0.046	1.1267 ± 0.047
0.8	1.6	0.8	1.0750	1.6270 ± 0.097	0.8164 ± 0.140	0.7869 ± 0.044	0.7823 ± 0.039	0.8054 ± 0.025	0.7767 ± 0.024	1.1493 ± 0.045	1.1296 ± 0.046
0.8	1.8	0.0	1.1444	1.8053 ± 0.065	0.0065 ± 0.239	0.7844 ± 0.046	0.7804 ± 0.041	0.8047 ± 0.025	0.7760 ± 0.025	1.1886 ± 0.041	1.1658 ± 0.042
0.8	1.8	0.4	1.1444	1.8098 ± 0.070	0.4704 ± 0.238	0.7883 ± 0.047	0.7845 ± 0.041	0.8067 ± 0.026	0.7784 ± 0.025	1.1880 ± 0.039	1.1654 ± 0.040
0.8	1.8	0.8	1.1444	1.8112 ± 0.060	0.7926 ± 0.163	0.7843 ± 0.046	0.7810 ± 0.042	0.8043 ± 0.025	0.7758 ± 0.024	1.1908 ± 0.039	1.1682 ± 0.041
0.8	2.0	0.0	1.2000	1.9631 ± 0.022	0.0257 ± 0.199	0.7838 ± 0.046	0.7821 ± 0.043	0.8057 ± 0.026	0.7757 ± 0.026	1.2301 ± 0.031	1.2040 ± 0.033
0.9	1.8	0.0	1.0444	1.8289 ± 0.100	0.0155 ± 0.403	0.8828 ± 0.047	0.8555 ± 0.039	0.9055 ± 0.028	0.8513 ± 0.024	1.1251 ± 0.036	1.1083 ± 0.037
0.9	1.8	0.4	1.0444	1.8288 ± 0.093	0.4310 ± 0.375	0.8814 ± 0.048	0.8537 ± 0.041	0.9085 ± 0.025	0.8507 ± 0.025	1.1261 ± 0.035	1.1089 ± 0.038
0.9	1.8	0.8	1.0444	1.8340 ± 0.097	0.7553 ± 0.273	0.8812 ± 0.049	0.8543 ± 0.041	0.9063 ± 0.025	0.8508 ± 0.025	1.1275 ± 0.036	1.1104 ± 0.038
0.9	2.0	0.0	1.1000	1.9606 ± 0.024	0.0269 ± 0.284	0.8821 ± 0.047	0.8549 ± 0.041	0.9077 ± 0.027	0.8516 ± 0.024	1.1552 ± 0.029	1.1365 ± 0.032

9 ARFIMA モデルとの比較

実際の推定を行う前に、最後に自己相似過程と線形モデルとの関係について述べておく。自己相似過程の特徴の一つは増分の自己相関関数が幕乗則に従うことであったが、自己相関のある確率過程としてしばしば取り上げられる ARMA モデルのような線形モデルは、それが定常かつ次数が有限であるならば自己相関関数が幕乗則に従うことはない。言い換えれば、自己相関関数が幕乗則に従うような確率過程は自己相似過程の他にも無限の次数をもつ線形モデルによって表すことができる。実際に自己相関関数が幕乗則に従う線形モデルとして、Granger (1980) や Hosking (1981) による ARFIMA (AutoRegressive Fractionally Integrated Moving Average) モデルが知られている。以下に述べる ARFIMA モデルの性質に関しては松葉 (2007) 等を参考にした。

この ARFIMA モデルとは、ARIMA モデルの和分の次数を実数に拡張したモデルである。そして、ARIMA モデルとは増分が ARMA モデルに従う離散時間過程であった。つまり、離散時間過程 $X(t)$ が ARIMA (p, d, q) モデルに従うならば、 B をラグオペレータとして、 $Z(t) = X(t)(1 - B)^d$ が ARMA (p, q) モデルに従う。ARFIMA モデルはこの d を実数に拡張したモデルである。したがって、整数ではない増分を考えることになるが、 d が整数でないとき、ガンマ関数の相反公式を用いれば³⁰,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^k}{\partial B^k} (1 - B)^d &= (-1)^k (1 - B)^{d-k} \prod_{n=1}^k (1 + d - n) = (-1)^k (1 - B)^{d-k} \frac{\Gamma(1+d)}{\Gamma(1+d-k)} \\ &= (-1)^k (1 - B)^{d-k} \frac{\Gamma(k-d) \sin(\pi(k-d))}{\Gamma(-d) \sin(-\pi d)} = (1 - B)^{d-k} \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(-d)}\end{aligned}$$

であるから、マクローリン展開により、

$$Z(t) = X(t)(1 - B)^d = X(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-d)} B^k = X(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-d)} X(t-k)$$

が得られる。とくに $X(t)$ が ARFIMA $(0, d, 0)$ モデルに従うならば、 $Z(t)$ は独立に同一の期待値が 0 の分布に従うノイズとなるから、 $X(t)$ は自己回帰係数 ϕ_k が、

$$\phi_k = -\frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-d)} = -\frac{d}{d-k} \prod_{n=1}^k \left(1 - \frac{d}{n}\right)$$

と与えられるような AR(∞) モデルで表されることになる。スターリングの近似を用いれば、

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\phi_k}{k^{-d-1}} &= -\frac{\exp(d+1)}{\Gamma(-d)} \lim_{k \rightarrow \infty} k^{d+1} \frac{(k-d)^{k-d-1/2}}{(k+1)^{k+1/2}} = -\frac{\exp(d+1)}{\Gamma(-d)} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k-d}{k}\right)^{k-d-1/2} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1/2} \\ &= -\frac{\exp(d+1)}{\Gamma(-d)} \exp(-d) \exp(-1) = -\frac{1}{\Gamma(-d)}\end{aligned}$$

であるから、 ϕ_k は指数 $-d - 1$ の幕乗則に従い、

$$\phi_k \sim -\frac{1}{\Gamma(-d)} k^{-d-1}$$

である。反対に、 $X(t) = (1 - B)^{-d} Z(t)$ であるから、 $Z(t)$ が独立に同一の期待値が 0 の分布に従うノイズであって、 $X(t)$ が ARFIMA $(0, d, 0)$ モデルに従うならば、同様の議論により、 $X(t)$ は移動平均係数 θ_k が、

$$\theta_k = \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d)} = \frac{d}{d+k} \prod_{n=1}^k \left(1 + \frac{d}{n}\right)$$

³⁰ ガンマ関数の相反公式とは、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して成り立つ以下の関係をいう。

$$\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)\Gamma(z)}$$

と与えられるような MA(∞) モデルで表され, この θ_k は

$$\theta_k \sim \frac{1}{\Gamma(d)} k^{d-1}$$

という指数 $d - 1$ の幕乗則に従う. したがって, $Z(t)$ が従う分布の分散が σ^2 であるときの $X(t)$ の分散 $\sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k^2$ は $d \geq 1/2$ で発散してしまい, 定常過程とならない. 一方で, このとき, $d < 1/2$ ならば $X(t)$ は定常過程であり, その自己共分散関数 $\gamma_X(k)$ は,

$$\begin{aligned} \gamma_X(k) &= E[X(t+k)X(t)] = E\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n Z(t+k-n)\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n Z(t-n)\right)\right] = \sigma^2 \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \theta_{n+k} \\ &= \sigma^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(n+1)\Gamma(d)} \frac{\Gamma(n+k+d)}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(d)} = \frac{\sigma^2}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(n+1)\Gamma(d)} \frac{\Gamma(n+k+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(n+k+1)} \\ &= \frac{\sigma^2}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(n+1)\Gamma(d)} B(n+k+d, 1-d) \\ &= \frac{\sigma^2}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(n+1)\Gamma(d)} \int_0^1 s^{n+k+d-1} (1-s)^{-d} ds \\ &= \frac{\sigma^2}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \int_0^1 s^{k+d-1} (1-s)^{-d} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(n+1)\Gamma(d)} s^n \right) ds = \frac{\sigma^2}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \int_0^1 s^{k+d-1} (1-s)^{-2d} ds \\ &= \frac{\sigma^2}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} B(k+d, 1-2d) = \frac{\sigma^2}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \frac{\Gamma(k+d)\Gamma(1-2d)}{\Gamma(k+1-d)} = \sigma^2 \frac{\sin(\pi d)}{\sin(2\pi d)\Gamma(2d)} \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(k+1-d)} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\cos(\pi d)\Gamma(2d)} \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(k+1-d)} \end{aligned}$$

と与えられる. ここで, 9つ目の等号は被積分関数の括弧内が $(1-s)^{-d}$ のマクローリン展開になっていることによる. また, $X(t)$ が定常過程であるための条件 $d < 1/2$ はこの積分が収束するための条件でもある. したがって, $X(t)$ の自己相関関数 $\rho_X(k)$ は,

$$\rho_X(k) = \frac{\gamma_X(k)}{\gamma_X(0)} = \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1-d)}$$

となる. スターリングの近似により,

$$\begin{aligned} \rho_X(k) &\approx \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} \exp(1-2d) \frac{(k+d)^{k+d-1/2}}{(k+1-d)^{k-d+1/2}} = \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} \exp(1-2d) \left(1 - \frac{1-2d}{k+1-d}\right)^{k+1-d} \frac{(k+d)^{2d-3/2}}{(k+1-d)^{-1/2}} \\ &\approx \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} \exp(1-2d) \exp(-(1-2d)) k^{2d-1} = \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} k^{2d-1} \end{aligned}$$

であるから, $\rho_X(k)$ は指数 $2d - 1$ の幕乗則に従う. これは $X(t)$ のハースト指数が $1/2$ ではないことを意味する. ハースト指数が H である非整数ブラウン運動の増分の自己相関関数は指数 $2H - 2$ の幕乗則に従い, ハースト指数は自己相関関数が従う幕乗則を定めるものであったから, $-1/2 < d < 1/2$ に対して ARFIMA(0, d , 0) モデルに従う確率過程 $X(t)$ のハースト指数は $d + 1/2$ ということになる. なお, $-1/2 < d$ という条件は $X(t)$ の反転可能条件を与える. 非整数ブラウン運動の増分が $H > 1/2$ で長期記憶であり, $H < 1/2$ で短期記憶であったように, ARFIMA(0, d , 0) モデルでは $d > 0$ で長期記憶となり, $d < 0$ で短期記憶となる. さらに, 自己相関関数が従う幕乗則やそれによって導かれる諸性質は, 和分の次数 d によってのみ定まることが知られており, より一般に ARFIMA(p, d, q) モデルに対して同じことがいえる.

この結果から推察されるように, ARFIMA(0, d , 0) モデルに従う確率過程 $X(t)$ のパワースペクトル密度も, 非整数ブラウン運動の増分の場合と同様に, ある幕乗則に従うことになる. 実際, このとき, $X(t) = (1-B)^{-d} Z(t)$ は上に述べたような MA(∞) モデルで表され, $Z(t)$ は独立であり $t \neq s$ ならば $E[Z(t)Z(s)] = 0$, $t = s$ ならば $E[Z(t)Z(s)] = \sigma^2$ であるから, $X(t)$ のパワースペクトル密度 $S_X(\omega)$ は,

$$\begin{aligned}
S_X(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} \left| \sum_{t=0}^{T-1} X(t) \exp(-i\omega t) \right|^2 \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} \left| \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k Z(t-k) \exp(-i\omega t) \right|^2 \right] \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{s=0}^{T-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \theta_k \theta_l Z(t-k) Z(s-l) \exp(-i\omega t) \exp(i\omega s) \right] \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \theta_k \theta_l E[Z(t-k) Z((t-k+l)-l)] \exp(-i\omega t) \exp(i\omega(t-k+l)) \\
&= \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \theta_k \theta_l \exp(-i\omega k) \exp(i\omega l) = \sigma^2 \left| \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \exp(-i\omega k) \right|^2 = \sigma^2 \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d)} \exp(-i\omega)^k \right|^2 \\
&= \sigma^2 \left| (1 - \exp(-i\omega))^{-d} \right|^2 = \sigma^2 \left| 2 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^{-2d}
\end{aligned}$$

である。ここで、8つ目の等号は絶対値の中身が $(1 - \exp(-i\omega))^{-d}$ のマクローリン展開になっていることによる。そして、

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{S_X(\omega)}{\omega^{-2d}} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \sigma^2 \left| 2 \frac{\sin(\omega/2)}{\omega} \right|^{-2d} = \sigma^2$$

であるから、

$$S_X(\omega) \sim \sigma^2 |\omega|^{-2d}$$

であり、 $S_X(\omega)$ は $\omega \rightarrow 0$ で指数 $-2d$ の幕乗則に従う。自己相関関数から導出される $X(t)$ のハースト指数は $d + 1/2$ であったが、ハースト指数が H のときパワースペクトル密度は指数 $-2H + 1$ の幕乗則に従っていたから、ここに $H = d + 1/2$ を代入すれば同じ結果が得られる。

このように $-1/2 < d < 1/2$ に対して ARFIMA(0, d , 0) モデルはハースト指数 $H = d + 1/2$ の非整数ブラウン運動の増分に似た特徴を示すが、 $d \neq 0$ であるならばそれは決して自己相似過程の増分とならない。なぜならば、もし ARFIMA(0, d , 0) モデルに従う確率過程 $X(t)$ がスケーリング指数 s の自己相似過程の増分であるならば、任意の $h \in \mathbb{N}$ に対して $\sum_{k=1}^h X(k) \stackrel{d}{=} h^s X(1)$ でなければならず、とくに、

$$\text{Var} \left[\sum_{k=1}^h X(k) \right] = h^{2s} \text{Var}[X(1)]$$

すなわち、

$$\frac{1}{2 \ln(h)} \ln \left(\frac{\text{Var}[\sum_{k=1}^h X(k)]}{\text{Var}[X(1)]} \right) = s$$

でなければならないが、 $d \neq 0$ のとき、

$$\begin{aligned}
\text{Var} \left[\sum_{k=1}^h X(k) \right] &= \sum_{k=1}^h \sum_{l=1}^h \text{Cov}[X(k), X(l)] = \sum_{k=1}^h \sum_{l=1}^h \gamma_X(k-l) = \frac{\sigma^2}{2 \cos(\pi d) \Gamma(2d)} \sum_{k=1}^h \sum_{l=1}^h \frac{\Gamma(k-l+d)}{\Gamma(k-l+1-d)} \\
&= \frac{\sigma^2}{\cos(\pi d) \Gamma(2d+2)} \left(\frac{\sin(\pi d)}{\pi} \Gamma(d+1)^2 + \frac{\Gamma(h+1+d)}{\Gamma(h-d)} \right) \\
&= \sigma^2 \frac{\tan(\pi d)}{\pi} B(d+1, d+1) + \frac{h^2 - d^2}{d(2d+1)} \gamma_X(h)
\end{aligned}$$

である。なお、4つ目の等号は、任意の複素数 x, y と整数 $n < m$ に対して、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^m \frac{\Gamma(k+x)}{\Gamma(k+y)} &= \frac{1}{\Gamma(y-x)} \sum_{k=n}^m B(k+x, y-x) = \frac{1}{\Gamma(y-x)} \sum_{k=n}^m \int_0^1 t^{k+x-1} (1-t)^{y-x-1} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(y-x)} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-x-1} \left(\sum_{k=n}^m t^k \right) dt = \frac{1}{\Gamma(y-x)} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-x-1} \left(\frac{t^{m+1} - t^n}{t-1} \right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(y-x-1)} (B(n+x, y-x-1) - B(m+x+1, y-x-1)) \\
&= \frac{1}{x-y+1} \left(\frac{\Gamma(m+x+1)}{\Gamma(m+y)} - \frac{\Gamma(n+x)}{\Gamma(n+y-1)} \right)
\end{aligned}$$

が成り立つことを利用して得られる。したがって、

$$\frac{1}{2 \ln(h)} \ln \left(\frac{\text{Var} \left[\sum_{k=1}^h X(k) \right]}{\text{Var}[X(1)]} \right) = \frac{1}{2 \ln(h)} \ln \left(\frac{\frac{\sin(\pi d)}{\pi} \Gamma(d+1)^2 + \frac{\Gamma(h+1+d)}{\Gamma(h-d)}}{\frac{\sin(\pi d)}{\pi} \Gamma(d+1)^2 + \frac{\Gamma(2+d)}{\Gamma(1-d)}} \right)$$

であり、これは h によって変動するため、常にこれに等しい s を定数として選ぶことはできない。もちろん、非整数ブラウン運動の増分は自己相似過程であるからこの性質を満たすが、逆に、ある s を先に定めてこの性質を満たすようにラグ 1 から順に自己相関関数を定めていけば、それはハースト指数 s の非整数ブラウン運動の増分の自己相関関数に一致する。つまり、自己相関関数が非整数ブラウン運動の増分と異なる時点で ARFIMA(0, d , 0) モデルが自己相似過程ではないことがわかる。図 35 には ARFIMA(0, d , 0) モデルと非整数ブラウン運動の増分の自己相関関数のグラフを示した。垂線が ARFIMA(0, d , 0) モデルの自己相関関数であり、曲線が非整数ブラウン運動の増分の自己相関関数であるが、これらは k をどれだけ大きくしても一致することがなく、一定の比率に近づきながら幂乗則に従って推移している。具体的に、ARFIMA(0, d , 0) モデルの自己相関関数に対する非整数ブラウン運動の増分の自己相関関数の比率は、 k を大きくするに従って $(2d+1)\Gamma(1+d)/\Gamma(1-d)$ に近づいていく。一方で、 $h \rightarrow \infty$ のとき $\Gamma(h+1+d)/\Gamma(h-d) \rightarrow \infty$ であることに注意すれば、スターリングの近似を用いて、

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \ln(h)} \ln \left(\frac{\text{Var} \left[\sum_{k=1}^h X(k) \right]}{\text{Var}[X(1)]} \right) &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \ln(h)} \ln \left(\frac{\Gamma(h+1+d)}{\Gamma(h-d)} \right) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \ln(h)} \ln \left(\frac{(h+1+d)^{h+d+1/2}}{(h-d)^{h-d-1/2}} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\left(d + \frac{1}{2} \right) \frac{\ln(h+1+d) + \ln(h-d)}{2 \ln(h)} + h \frac{\ln(h+1+d) - \ln(h-d)}{2 \ln(h)} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow \infty} \left(d + \frac{1}{2} \right) \frac{\ln(h+1+d) + \ln(h-d)}{2 \ln(h)} = d + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

が得られる。これは、とくに $Z(t)$ が正規分布に従うとき、 h を十分大きくとくれば、すなわち短い期間での変動を無視すれば、 $X(t)$ の累積和がハースト指数 $H = d + 1/2$ の非整数ブラウン運動のように振る舞うことを示す。

このようにして幂乗則に従う自己相関関数が無限の次数をもつ線形モデルから得られることは、逆にそのような自己相関関数をもつ時系列に対して次数が有限な線形モデルを当てはめてもその自己相関構造を完全に取り除くことが不可能であることを示唆する。もちろん、データ数は常に有限であるから次数を上げていけばいつかは計測可能なすべての範囲のラグに対して自己相関を 0 にすることはできるが、それは必ずしも元の時系列がそのような高い次数の線形モデルに従っていることを示すものではない。図 36 は $\alpha = 2$ の非整数安定過程に対して AR(p) モデルを当てはめ、その残差のハースト指数を DFA によって推定した結果である。ただし、自己相関関数の幂乗則が維持されることを確認するために、生成する乱数の標本数は 55440 とし³¹、DFA

³¹ 55440 は 28 番目の高度合成数であり、120 個の約数をもつ。さらに、55440 は 9 番目の優高度合成数であり、任意の自然数 n と $0.2703 < \epsilon < 0.2890$ に対して $\sigma_0(55440)/55440^\epsilon = 120/55440^\epsilon \geq \sigma_0(n)/n^\epsilon$ となる。

における回帰分析の対象範囲は、 $n \geq 30$ ではなく、 $n \geq 300$ とした。 $p = 0$ のケースは元の乱数である。図中の破線は傾き $1/2$ の直線である。次数 p を大きくするに従って小さなラグに対する自己相関が順々に取り除かれ、 F_n が指数 $1/2$ の幂乗則に従うかのように振る舞う範囲、すなわち自己相関が 0 であることを示す範囲が広くなっているが、 n が大きなところでは元のハースト指数が示す通りの幂乗則に従うようになっており、ハースト指数の推定値にも極端な変化がない。計測可能なすべての自己相関を 0 にするためには相当の次数が必要であることがわかる。また、この結果は非整数安定過程や ARFIMA(0, d , 0) モデルに有限な次数の ARMA モデルが加わっていたとしても、標本数を大きくするに従いハースト指数の推定値が本来の値に近づいていくことを示唆する。そのようなケースでは n が小さなところで異なる指数の幂乗則に従うかのように振る舞うことになるため、 n の選び方に注意する必要がある。DFA や R/S 分析では、この意味でその決定係数に注意を払わなければならない。

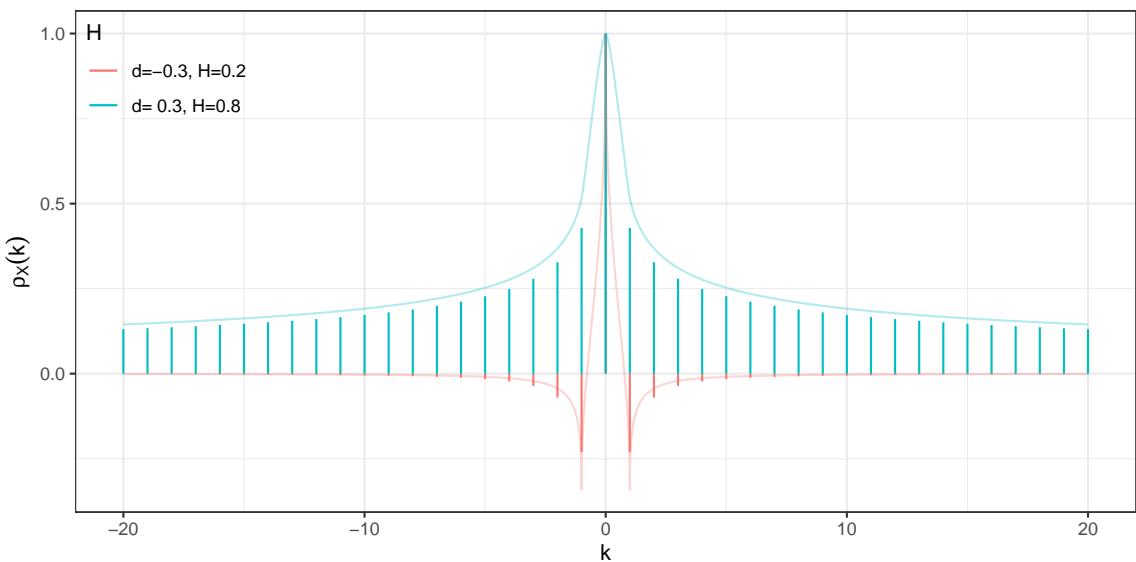


図 35 ARFIMA(0, d , 0) モデルと非整数ブラウン運動の増分の自己相関関数

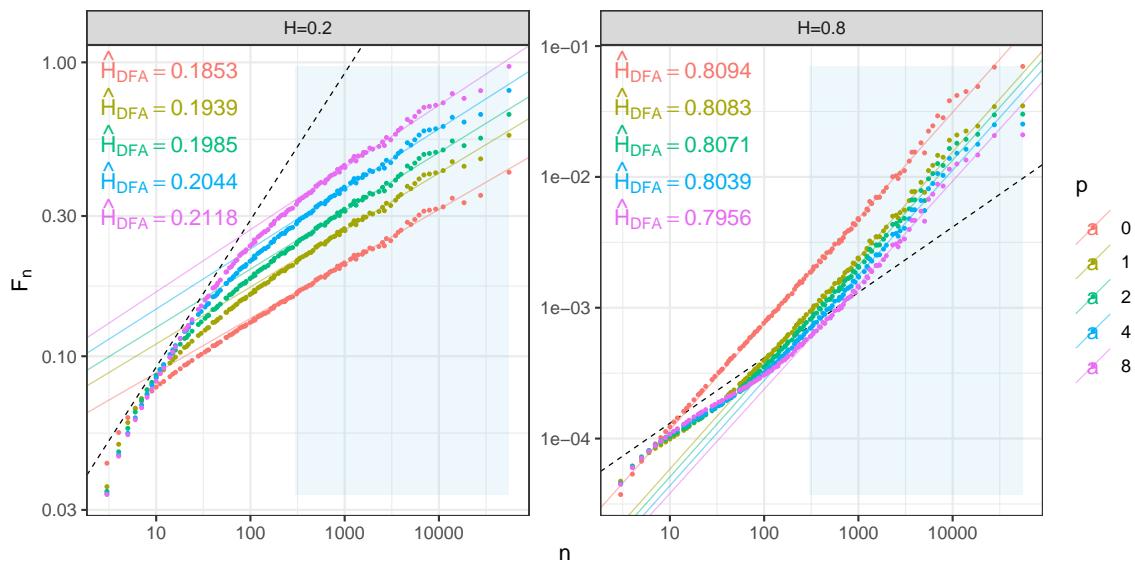


図 36 DFA による AR(p) モデルの残差のハースト指数の推定値³²

10 使用データ

本稿で推定の対象とするデータは、日経平均株価と業種別日経平均、各国の株価指数、TOPIX の高頻度データである。推定結果を示す前に、これらの詳細について述べる。

まず、日経平均株価と業種別日経平均は日経 NEEDS から取得した日次データであり、各取引日の終値を用いた。期間は日経平均株価が 1949 年 5 月 16 日から 2019 年 8 月 1 日までの 19153 取引日であり、業種別日経平均が 1972 年 1 月 4 日から 2019 年 6 月 14 日までの 12321 取引日である³³。これらのデータの開始時点はいずれも各指数の算出開始日である。それぞれのデータから得られる系列 $\{X_t\}$ 、すなわち対数増分から平均を差し引いた値の累積和のグラフを図 37 および図 38 に示した。業種別日経平均は日経 500 種平均株価を業種ごとに分類して算出された株価指数であり、その業種とは図 38 にある 36 業種である³⁴。したがって、業種によっては対象銘柄が 3 銘柄ほどしかなく、株価が変動しない取引日が多い業種もある。たとえば、系列 $\{Y_t\}$ 、すなわち $\{X_t\}$ の増分に関するいえば、空運では 12320 個の標本のうち、およそ 8% にあたる 1023 標本が 0 である。この $\{Y_t\}$ が 0 であるような取引日、すなわち株価に変化がない取引日の数を、元の系列の対数増分の要約統計量とともに表 2 に示した。表中の「0 の数」がその数であり、これが全取引日の 1% を上回るような業種がちょうど半分にあたる 18 業種存在するが、これらは対象銘柄数が比較的少ない業種である。また、表中の「最大連休」とは連続してデータが存在しなかった日数の最大値である。日本の株式市場の場合、少なくとも 1949 年 5 月 16 日以降に関しては、ゴールデンウィーク中に天皇の即位の日が定められた 2019 年 4 月 27 日から 2019 年 5 月 6 日までの 10 日間が最長である。要約統計量は $\{Y_t\}$ のものではなく、平均を差し引かなければ対数増分のものであり、したがって平均は 0 ではない。歪度と尖度は moments パッケージ (ver. 0.14) の skewness 関数と kurtosis 関数によるが、これらは偏差の 3 乗平均ないしは 4 乗平均を偏差二乗平均の $3/2$ 乗ないしは $4/2$ 乗で割った値である。したがって、標本が正規分布に従うならば歪度は 0 に近い値をとり、尖度は 3 に近い値をとるが、計測された値は正規分布からの乖離を示唆しており、とくに尖度はすべての業種において 3 よりも大きい。

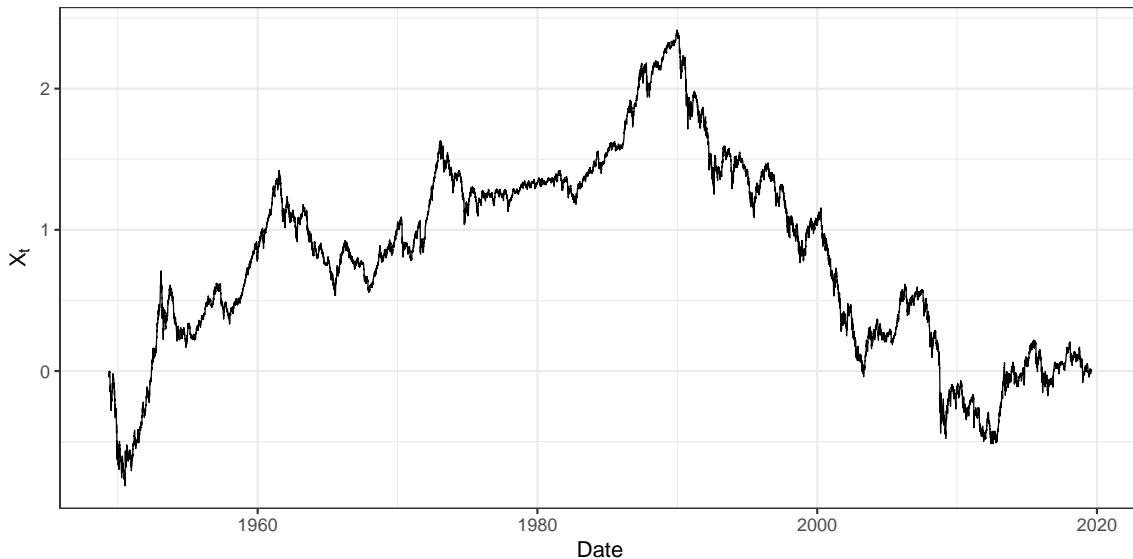


図 37 日経平均株価の系列 $\{X_t\}$

³² AR モデルの当てはめは stats パッケージ (ver. 3.6.1) の arima 関数による。非整数安定過程に従う乱数の生成は arfima パッケージ (ver. 1.7-0) の arfima.sim 関数による。

³³ 19152 は 60 個の約数をもち、12320 は 48 個の約数をもつ。

³⁴ 日経 500 種平均株価算出要領(日本経済新聞社, https://indexes.nikkei.co.jp/nkave/archives/file/nikkei_500_stock_average_guidebook_jp.pdf) より。

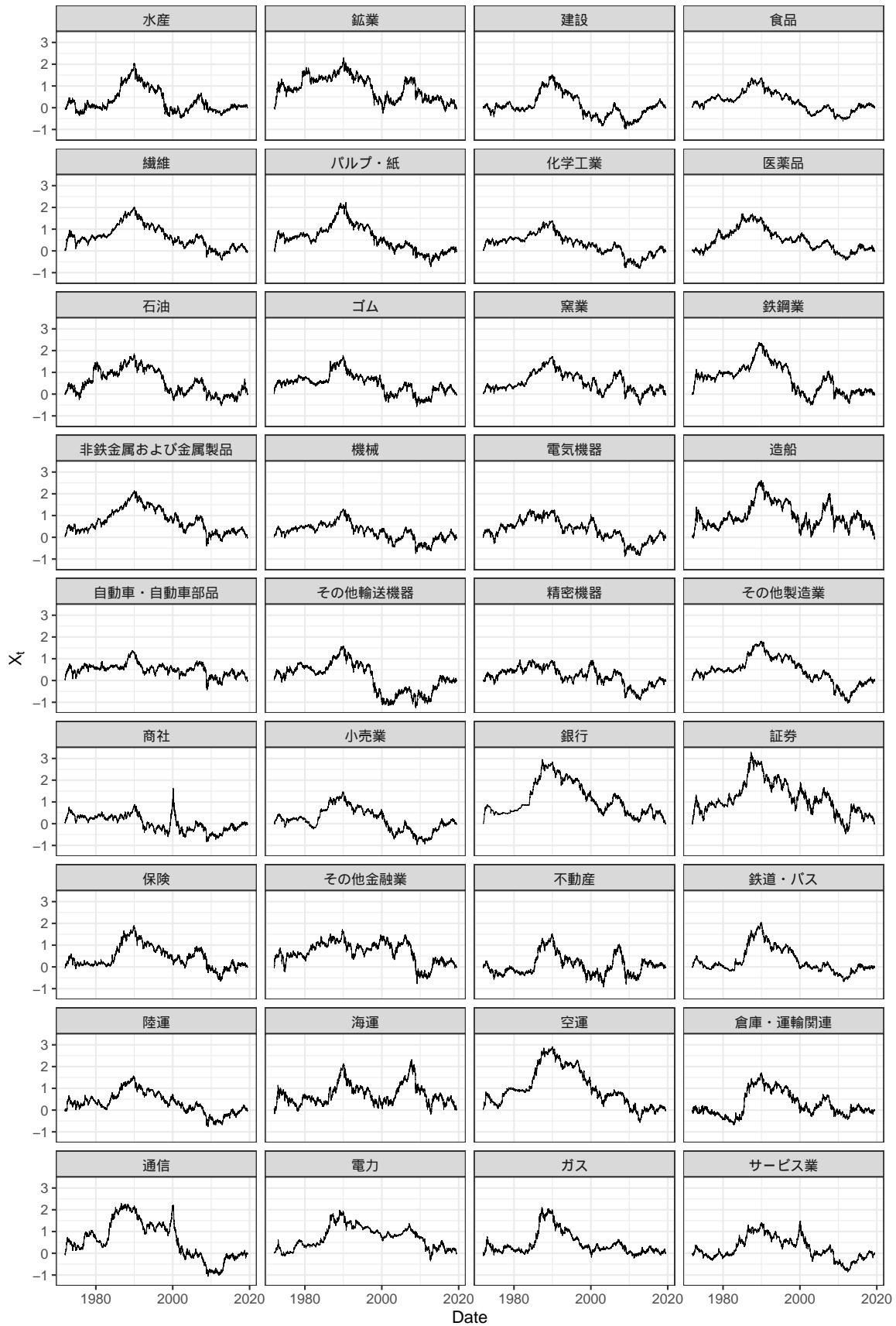


図 38 業種別日経平均の系列 $\{X_t\}$

表 2: 日経平均株価と業種別日経平均の要約統計量

業種	最大連休	0 の数	平均	標準偏差	歪度	尖度	最小値	最大値
日経平均株価	10	8	0.000251	0.0116	-0.394	13.786	-0.161	0.132
水産	10	499	0.000045	0.0179	0.350	9.484	-0.176	0.153
鉱業	10	138	0.000052	0.0202	0.233	6.869	-0.140	0.153
建設	10	32	0.000088	0.0137	0.141	11.380	-0.173	0.123
食品	10	24	0.000154	0.0108	-0.464	16.660	-0.178	0.121
繊維	10	84	0.000111	0.0135	-0.250	11.311	-0.171	0.136
パルプ・紙	10	178	0.000049	0.0159	-0.005	8.754	-0.156	0.120
化学工業	10	22	0.000197	0.0124	-0.320	13.276	-0.167	0.131
医薬品	10	48	0.000266	0.0129	-0.056	10.183	-0.173	0.109
石油	10	121	0.000138	0.0176	0.235	7.700	-0.182	0.131
ゴム	10	187	0.000216	0.0166	-0.062	8.800	-0.171	0.139
窯業	10	57	0.000121	0.0148	-0.309	10.825	-0.172	0.133
鉄鋼業	10	47	0.000058	0.0160	-0.181	11.057	-0.178	0.169
非鉄金属および金属製品	10	58	0.000096	0.0146	-0.173	10.759	-0.156	0.162
機械	10	23	0.000169	0.0136	-0.258	10.275	-0.137	0.134
電気機器	10	3	0.000235	0.0150	-0.037	8.135	-0.156	0.127
造船	10	415	0.000031	0.0211	0.155	9.255	-0.199	0.212
自動車・自動車部品	10	53	0.000219	0.0149	-0.035	10.891	-0.177	0.145
その他輸送機器	10	329	0.000094	0.0182	-0.045	7.969	-0.178	0.126
精密機器	10	64	0.000271	0.0156	-0.174	8.986	-0.170	0.138
その他製造業	10	94	0.000092	0.0132	-0.386	12.239	-0.180	0.140
商社	10	38	0.000195	0.0140	-0.258	12.126	-0.139	0.136
小売業	10	57	0.000229	0.0119	-0.229	11.134	-0.153	0.097
銀行	10	214	0.000112	0.0140	0.135	13.207	-0.168	0.133
証券	10	157	0.000174	0.0197	0.260	7.624	-0.171	0.166
保険	10	170	0.000191	0.0166	0.089	11.072	-0.182	0.141
その他金融業	10	412	0.000163	0.0180	0.051	8.094	-0.180	0.134
不動産	10	119	0.000095	0.0184	0.274	8.623	-0.168	0.169
鉄道・バス	10	272	0.000177	0.0130	0.183	9.595	-0.137	0.110
陸運	10	235	0.000169	0.0145	0.060	9.779	-0.192	0.121
海運	10	221	-0.000053	0.0206	0.191	7.308	-0.153	0.164
空運	10	1023	-0.000039	0.0161	0.352	10.665	-0.146	0.176
倉庫・運輸関連	10	772	0.000169	0.0185	0.286	6.847	-0.156	0.145
通信	10	287	0.000247	0.0158	0.020	7.150	-0.126	0.105
電力	10	193	0.000077	0.0129	0.499	14.869	-0.145	0.125
ガス	10	935	0.000203	0.0154	0.307	10.385	-0.185	0.124
サービス業	10	48	0.000167	0.0138	-0.013	9.476	-0.124	0.118

表3: 各国の株価指数のデータ

国	ISO 3166-1	名称	シンボル	開始時点	終了時点	標本数	データ元
アイスランド	IS	アイスランド全株	OMXIFI	2002/03/06	2019/07/30	4321	Investing
アイルランド	IE	アイルランド総合	ISEQ	2002/07/18	2019/08/01	4321	Yahoo
アメリカ	US	S&P500	SPX	2002/06/04	2019/08/01	4321	Yahoo
アラブ首長国連邦	AE	アラビア株式総合指数	ADI	2002/11/26	2019/08/01	4321	Investing
アルゼンチン	AR	S&P Merval	MERV	2002/01/03	2019/07/31	4321	Investing
イギリス	GB	英国 FTSE100	FTSE	2002/06/27	2019/08/01	4321	Investing
イスラエル	IL	TA35	TA35	2001/12/25	2019/08/01	4321	Investing
イタリア	IT	イタリア 40	FTMIB	2002/07/26	2019/08/01	4321	Stoq
インド	IN	インド SENSEX30	BSESN	2002/01/21	2019/08/01	4321	Yahoo
インドネシア	ID	IDX コンポジット	JKSE	2001/11/05	2019/08/01	4321	Investing
ウクライナ	UA	ウクライナ PFTS 指数	PFTSI	2001/07/26	2019/07/30	4321	Investing
エストニア	EE	タリン総合	OMXTGI	2002/05/30	2019/08/01	4321	Investing
オーストラリア	AU	オーストラリア S&P/ASX 200	AXJO	2002/09/12	2019/08/01	4321	Investing
オーストリア	AT	ATX	ATX	2002/02/12	2019/08/01	4321	Yahoo
オマーン	OM	オマーン MSM30	MSI	2002/03/21	2019/07/31	4321	Investing
オランダ	NL	オランダ株 25	AEX	2002/09/23	2019/08/01	4321	Investing
カタール	QA	ドーハ株式全株指数	QSI	2002/05/28	2019/08/01	4321	Investing
カナダ	CA	S&P トロント総合指数	GSPTSE	2002/05/17	2019/08/01	4321	Investing
韓国	KR	韓国総合株価指数	KS11	2002/02/14	2019/08/01	4321	Investing
クロアチア	HR	ザグレブ CROBEX 指数	CRBEX	2002/03/26	2019/07/30	4321	Investing
サウジアラビア	SA	サウジアラビア・タダウル全株指数	TASI	2003/01/07	2019/08/01	4321	Investing
シンガポール	SG	FTSE Straits Times Singapore	STI	2002/04/22	2019/08/01	4321	Yahoo
スイス	CH	SMI	SSMI	2002/06/11	2019/07/31	4321	Investing
スウェーデン	SE	ストックホルム OMX30	OMXS30	2002/05/21	2019/08/01	4321	Investing
スペイン	ES	スペイン IBEX35	IBEX	2002/08/09	2019/08/01	4321	Investing

表3: (続き)

国	ISO 3166-1	名称	シンボル	開始時点	終了時点	標本数	データ元
スリランカ	LK	コロンボ株式全株指数	CSE	2001/08/17	2019/08/01	4321	Investing
タイ王国	TH	タイ SET 指数	SETI	2001/11/27	2019/08/01	4321	Investing
台湾	TW	台湾加權	TWII	2002/01/14	2019/08/01	4321	Yahoo
チエコ	CZ	プラハ株	PX	2002/05/14	2019/08/01	4321	Stooq
中国	CN	上海総合指数	SSEC	2001/10/17	2019/08/01	4321	Investing
チュニジア	TN	Tunindex	TUNINDEX	2002/02/05	2019/08/01	4321	Investing
チリ	CL	S&P CLX IPSA	SPIPSA	2002/04/08	2019/08/01	4321	Investing
デンマーク	DK	コペンハーゲン OMX20 株	OMXC20	2002/04/19	2019/08/01	4321	Investing
ドイツ	DE	ドイツ DAX 指数	GDAXI	2002/08/06	2019/08/01	4321	Investing
トルコ	TR	イスタンブル 100	XU100	2002/05/23	2019/08/01	4321	Investing
日本	JP	日経平均株価	N225	2001/12/13	2019/08/01	4321	Yahoo
ニュージーランド	NZ	NZX 50	NZ50	2002/08/01	2019/08/01	4321	Investing
ノルウェー	NO	オスロ OBX	OBX	2002/05/21	2019/07/31	4321	Investing
パキスタン	PK	カラチ 100	KSE	2002/02/14	2019/08/01	4321	Investing
ハンガリー	HU	ブダペスト株式指数	BUX	2002/04/17	2019/08/01	4321	Stooq
フィリピン	PH	フィリピン PSEi 総合	PSI	2001/12/19	2019/08/01	4321	Stooq
フィンランド	FI	ヘルシンキ 25	OMXH25	2002/05/27	2019/08/01	4321	Investing
ブルジル	BR	ブラジルボベスノ	BVSP	2002/02/21	2019/08/01	4321	Yahoo
フランス	FR	仏 CAC40	FCHI	2002/09/16	2019/08/01	4321	Investing
ブルガリア	BG	ソフィア BSE 指数	SOFIX	2002/01/23	2019/08/01	4321	Stooq
ベトナム	VN	VN	VNI	2002/04/08	2019/08/01	4321	Investing
ペルー	PE	S&P Lima General	SPBLPGPT	2001/10/04	2019/08/01	4321	Yahoo
ベルギー	BE	ブリュッセル株 20	BFX	2002/09/18	2019/08/01	4321	Investing
ポーランド	PL	ワルシャワ WIG20	WIG20	2002/05/07	2019/08/01	4321	Investing
ポルトガル	PT	リスボン PSI20	PSI20	2002/09/12	2019/08/01	4321	Stooq

表3: (続き)

国	ISO 3166-1	名称	シンボル	開始時点	終了時点	標本数	データ元
香港	HK	香港ハンセン	HSI	2002/03/05	2019/08/01	4321	Investing
マレーシア	MY	FTSE マレーシア KLCI	KLSE	2002/01/02	2019/08/01	4321	Yahoo
南アフリカ	ZA	ヨハネスブルグ主要40	JTOPI	2002/04/24	2019/08/01	4321	Investing
メキシコ	MX	S&P/BMV IPC	MXX	2002/06/10	2019/08/01	4321	Investing
モーリシャス	MU	モーリシャス株式指数	MDEX	2002/04/16	2019/07/31	4321	Investing
モロッコ	MA	MADEX	MADX	2002/04/03	2019/08/01	4321	Investing
ヨルダン	JO	アンマン株式総合指数	AMGNRLX	2002/02/06	2019/08/01	4321	Investing
ラトビア	LV	ナスダック Riga 総合	OMXRGI	2002/05/06	2019/08/01	4321	Stooq
リトニア	LT	ビニュリス総合株価指数	OMXVGI	2002/02/14	2019/08/01	4321	Investing
ルーマニア	RO	ブカレスト株式指数	BETI	2002/03/27	2019/08/01	4321	Stooq
ロシア	RU	モスクワ RTSI	IRTS	2002/04/26	2019/08/01	4321	Investing

表 4: 各国の株価指数の要約統計量

国	最大連休	0 の数	平均	標準偏差	歪度	尖度	最小値	最大値
アイスランド	5	3	0.000028	0.0201	-39.674	2112.934	-1.103	0.051
アイルランド	5	6	0.000075	0.0137	-0.679	11.864	-0.140	0.097
アメリカ	4	3	0.000241	0.0117	-0.265	13.202	-0.095	0.110
アラブ首長国連邦	9	2	0.000314	0.0111	-0.076	11.162	-0.087	0.076
アルゼンチン	12	17	0.001115	0.0207	-0.315	6.666	-0.130	0.126
イギリス	4	5	0.000119	0.0116	-0.172	10.561	-0.093	0.094
イスラエル	5	5	0.000300	0.0112	-0.214	7.530	-0.072	0.092
イタリア	5	4	-0.000024	0.0150	-0.213	8.556	-0.133	0.109
インド	5	0	0.000554	0.0138	-0.079	12.888	-0.118	0.160
インドネシア	11	15	0.000656	0.0131	-0.704	10.728	-0.110	0.076
ウクライナ	13	37	0.000545	0.0184	0.868	23.319	-0.155	0.244
エストニア	5	3	0.000448	0.0101	0.146	14.700	-0.070	0.121
オーストラリア	5	3	0.000178	0.0099	-0.458	8.793	-0.087	0.056
オーストリア	5	3	0.000206	0.0144	-0.336	9.913	-0.103	0.120
オマーン	10	22	0.000196	0.0091	-1.004	23.222	-0.087	0.080
オランダ	4	9	0.000154	0.0133	-0.052	11.133	-0.096	0.100
カタール	9	15	0.000381	0.0133	-0.346	10.870	-0.094	0.094
カナダ	4	0	0.000174	0.0103	-0.679	14.918	-0.098	0.094
韓国	10	4	0.000215	0.0131	-0.521	9.657	-0.112	0.113
クロアチア	5	5	0.000093	0.0114	-0.037	24.193	-0.108	0.148
サウジアラビア	9	22	0.000277	0.0150	-0.849	12.253	-0.103	0.094
シンガポール	5	6	0.000149	0.0106	-0.202	9.343	-0.087	0.075
スイス	5	3	0.000104	0.0115	-0.130	10.256	-0.091	0.108
スウェーデン	5	1	0.000192	0.0138	0.024	7.816	-0.088	0.099
スペイン	5	4	0.000080	0.0141	-0.105	10.642	-0.132	0.135
スリランカ	6	32	0.000633	0.0113	0.322	38.540	-0.139	0.183
タイ王国	5	3	0.000404	0.0122	-0.820	16.384	-0.161	0.106
台湾	11	2	0.000150	0.0122	-0.342	6.761	-0.069	0.065
チェコ	5	10	0.000185	0.0132	-0.573	19.445	-0.162	0.124
中国	16	3	0.000132	0.0160	-0.370	7.704	-0.093	0.094
チュニジア	16	21	0.000399	0.0078	-0.382	637.597	-0.267	0.265
チリ	5	5	0.000338	0.0096	0.030	13.424	-0.072	0.118
デンマーク	5	6	0.000313	0.0126	-0.278	8.945	-0.117	0.095
ドイツ	5	6	0.000286	0.0141	-0.024	8.313	-0.074	0.108
トルコ	10	1	0.000520	0.0177	-0.156	7.879	-0.133	0.121
日本	10	2	0.000168	0.0147	-0.464	10.157	-0.121	0.132
ニュージーランド	4	9	0.000401	0.0065	-0.500	8.308	-0.049	0.058
ノルウェー	5	5	0.000388	0.0152	-0.539	10.228	-0.113	0.110
パキスタン	10	36	0.000675	0.0127	-0.326	6.541	-0.077	0.085
ハンガリー	6	0	0.000354	0.0147	-0.128	10.170	-0.126	0.132
フィリピン	11	16	0.000456	0.0123	-0.549	10.118	-0.131	0.094

表 4: (続き)

国	最大連休	0 の数	平均	標準偏差	歪度	尖度	最小値	最大値
フィンランド	5	2	0.000214	0.0136	-0.114	7.150	-0.089	0.093
ブラジル	5	6	0.000468	0.0172	-0.098	7.512	-0.121	0.137
フランス	4	2	0.000132	0.0136	0.016	9.428	-0.095	0.106
ブルガリア	12	17	0.000332	0.0121	-0.595	13.576	-0.114	0.084
ベトナム	10	10	0.000374	0.0138	-0.116	4.970	-0.061	0.047
ペルー	6	3	0.000652	0.0138	-0.470	15.223	-0.133	0.128
ベルギー	4	2	0.000143	0.0120	-0.033	9.898	-0.083	0.093
ポーランド	5	3	0.000128	0.0140	-0.230	6.067	-0.084	0.082
ポルトガル	4	1	-0.000040	0.0117	-0.269	10.017	-0.104	0.102
香港	5	24	0.000213	0.0141	-0.008	12.638	-0.136	0.134
マレーシア	6	5	0.000203	0.0072	-0.842	15.016	-0.100	0.043
南アフリカ	4	5	0.000358	0.0128	-0.097	6.383	-0.080	0.077
メキシコ	4	2	0.000411	0.0118	0.010	9.497	-0.073	0.104
モーリシャス	4	14	0.000414	0.0064	0.290	28.016	-0.064	0.077
モロッコ	6	1	0.000286	0.0081	0.348	14.397	-0.051	0.107
ヨルダン	10	16	0.000124	0.0140	1.241	494.925	-0.413	0.438
ラトビア	6	43	0.000362	0.0119	0.403	13.353	-0.081	0.116
リトアニア	5	14	0.000504	0.0100	-0.330	24.778	-0.119	0.110
ルーマニア	17	10	0.000546	0.0149	-0.542	13.876	-0.119	0.128
ロシア	11	1	0.000284	0.0204	-0.460	14.268	-0.212	0.202

次に、各国の株価指数であるが、これは表 3 に示した 61 カ国の代表的な株価指数の日次データである。このデータは標本数が 4321 となるように 2019 年 8 月 1 日から遡って取得したものであり³⁵、したがって、データの開始時点は指標ごとに異なるが、概ね 17 年 4 カ月程度の期間に相当するデータである。データは Investing.com (<https://jp.investing.com>)、Yahoo Finance (<https://finance.yahoo.com>)、Stooq (<https://stooq.pl>) から取得したものであるが、各ウェブサイトによって公開されているデータ数が異なるため、4321 個以上のデータが存在するものの中から Investing.com、Yahoo Finance、Stooq の順に一つを選んだ。さらに、この 61 カ国は変動しない取引日の数が全体の 1% 未満、すなわち 43 個以下であり、なおかつ連続してデータが存在しない日数が 20 日間以下であるものに制限した結果として得られたものであり、十分な期間にわたって何らかの株価指数が公表されている国は他にもいくつか存在する。なお、表中の国名と指標の名称およびシンボルはデータ元によらず Investing.com の表記に基づいている。指標は国ごとに 1 つずつ選んでいるため、以下ではこれらの株価指数を区別する呼称として指標の名称ではなく国名を用いることとする。表 2 と同様に、これらのデータの対数増分の要約統計量等を表 4 に示した。とくにアイスランド等では尖度が著しく大きく、明らかに正規分布として近似し難いが、安定分布であればこのような尖度が観測されることはそれほど珍しいことではない。たとえば、乱数を用いた実験によれば、4320 個の標本からなる乱数が $\alpha = 1.5, \beta = 0$ の安定分布に従うとき、その尖度は約 17.8% の確率で 2000 を超えるようである³⁶。さらに、 $\alpha = 1, \beta = 0$ では 47.5% にもおよぶ。また、アイスランドでは対数増分の最小値が -1.103 と著しく小さいが、これは 2008 年の世界金融危機による影響であり、2008 年 10 月 13 日から翌日までのわずか 1 日の間で株価がおよそ 1/3 にまで下落したことによる。

³⁵ 4320 は 48 個の約数をもつ。³⁶ stabledist パッケージ (ver. 0.7-1) の rstable 関数を用いて 100000 系列の標本を生成して検証した。

最後に、TOPIX の高頻度データであるが、これはJPX データクラウドから取得した TOPIX の秒間隔データである。東京証券取引所が 1 秒間隔で TOPIX の提供を開始したのは 2010 年 9 月 13 日であり、この日から 2019 年 7 月 31 日までの 2175 取引日のデータを用いる。株式市場は前場と後場に分かれ、2019 年現在では前場後場ともに 150 分間であるが、2011 年 11 月 18 日までは前場が午前 9 時から午前 11 時までの 120 分間であった。したがって、取引日により標本数が異なることになる。これらのことから、この秒間隔データの標本数は全体で約 3863 万となるが、これをすべて結合して同一の系列とみなすべきではない。それは時間間隔の差が大きすぎるためである。日次データではデータ間の時間間隔が 1 日から長くとも 2 週間程度であり、高々十数倍の違いであったが、秒間隔データでは基本的な時間間隔が 1 秒であるのに対して、取引終了から翌日の取引開始までには 18 時間もの隔たりがあり、時間間隔に数万倍におよぶ差が生じてしまう。前場と後場の間も同様であり、この間には 3600 秒の隔たりがある。時系列が独立であると考えられるならば、時間間隔にどれだけの差があったとしてもその部分だけを取り除けばよいが、ここで推定しようとしているハースト指数はその独立性を判断する材料となるものであるから、時間間隔の異なるデータを結合することはできない。したがって、本稿では日ごと、前場後場ごとに推定を行うこととする。また、取引時間が 150 分間であるとき、そこから得られる系列 $\{Y_t\}$ の標本数は 8999 であり、これは素数である。上に述べたように、標本数の約数が少ない場合、とくに DFA や R/S 分析によってハースト指数を推定する際に都合が悪い。したがって、本稿では最後の数十秒を切り捨てて推定を行うこととする。具体的には、取引時間が 150 分間であるならば最初の 8977 秒間のデータだけを採用し、取引時間が 120 分間であるならば最初の 7141 秒間のデータだけを採用することにする。その結果、 $\{Y_t\}$ の標本数は 8976 ないしは 7140 となり、約数の数はそれぞれ 40, 48 となる。秒間隔データを扱う上でもう一つ問題となる点は TOPIX の算出時の端数処理である。TOPIX は小数点以下第 3 位を四捨五入して算出されるが³⁷、これは 1 秒の間に想定される株価の変動に対して些か大雑把である。たとえば、基準時点に対する時価総額の比率が厳密に 10 であり、四捨五入する前の TOPIX がちょうど 1000 であるとき、1 秒後に実際に公表される TOPIX が変動するためには時価総額の変化率が $\mathbb{R} \setminus [-0.000005, 0.000005]$ に含まれなければならない。時間間隔が 1 秒と非常に短いため、対数増分によって変化率を近似できると考えれば、対数増分が平均 0 分散 σ^2 の正規分布に従うとき、TOPIX が変動する確率は $\text{erfc}\left(0.000005 / \sqrt{2\sigma^2}\right)$ と評価できる。ここで、 $\text{erfc}(x)$ は相補誤差関数であり、

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-t^2) dt$$

と定義される。今回の秒間隔データから計測される対数増分の標準偏差は 0.0041% 程度であるが、この場合約 90% の確率で TOPIX が変動することになる。しかし、これに反して実際の TOPIX は 1 秒間で変動しないことが驚くほど多い。実際に今回のデータで観測された TOPIX の 1 秒間の変動を表 5 に示した。全体の約 30% は変動していないことがわかる。さらに、割合が 0 を中心に徐々に小さくなっていることから、この変動しないケースの多さが取引の生じない時間の長さによるものではないことがわかる。また、変動する確率が 70% 程度であるというこの結果は、対数増分が平均 0 の正規分布に従うと仮定されるときに、その標準偏差がおよそ 0.0013% でなければならないことを示す。一方で、もし TOPIX の対数がスケーリング指数 s の自己相似過程に従うならば、TOPIX が n 秒後に変動しない確率は指数 $-s$ の幕乗則に従うはずである。なぜならば、確率変数 X を TOPIX の 1 秒間隔の対数増分と同一の分布に従うものとすれば、自己相似性により n 秒間隔の対数増分は $n^s X$ と同一の分布に従うから、 X が従う分布の確率密度関数を $f_X(x)$, $q = 0.000005$ として、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n^s X \in [-q, q])}{n^{-s}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(X \in [-qn^{-s}, qn^{-s}])}{n^{-s}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{-s}} \int_{-qn^{-s}}^{qn^{-s}} f_X(x) dx \\ &= 2q \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2qn^{-s}} \int_{-qn^{-s}}^{qn^{-s}} f(x) dx = 2q \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f_X(x) dx = 2qf_X(0) \end{aligned}$$

³⁷ 東証指數算出要領（東京証券取引所、https://www.jpx.co.jp/markets/indices/topix/tvdivq00000030ne-att/cal_3_topix.pdf）より。

となるためである。 $f_X(x)$ は自己相似過程が従う分布の確率密度関数であるから、 $0 < f_X(0) < \infty$ であることは保証される。実際に今回のデータを使い、この n 秒後に TOPIX が変動しない確率が n に応じてどのように変化するかを調べたものが図 39 である。ただし、確率は取引時間が 150 分間であるものだけを対象に推定している。 n は標本数 8976 の約数のうち 600 以下のものを選び、重複のない n 秒間隔の増分が 0 である割合を全取引日を通して計算し、これをこの確率の推定値とした。TOPIX が変動しない確率は指数 -0.70 程度の乗算則に従っており、自己相似過程を仮定した場合、スケーリング指数は 0.70 程度になることが予想される。実際に各取引日におけるハースト指数やフラクタル次元の推定値がそれを支持する結果となっているかについては後に詳しくみしていく。

表 5: TOPIX の 1 秒間の変動

変動	回数	割合
-0.05	454884	0.0118
-0.04	600472	0.0156
-0.03	1112900	0.0289
-0.02	2672709	0.0694
-0.01	6876480	0.1785
0.00	11646756	0.3024
0.01	6779536	0.1760
0.02	2629143	0.0683
0.03	1100819	0.0286
0.04	599829	0.0156
0.05	456459	0.0119

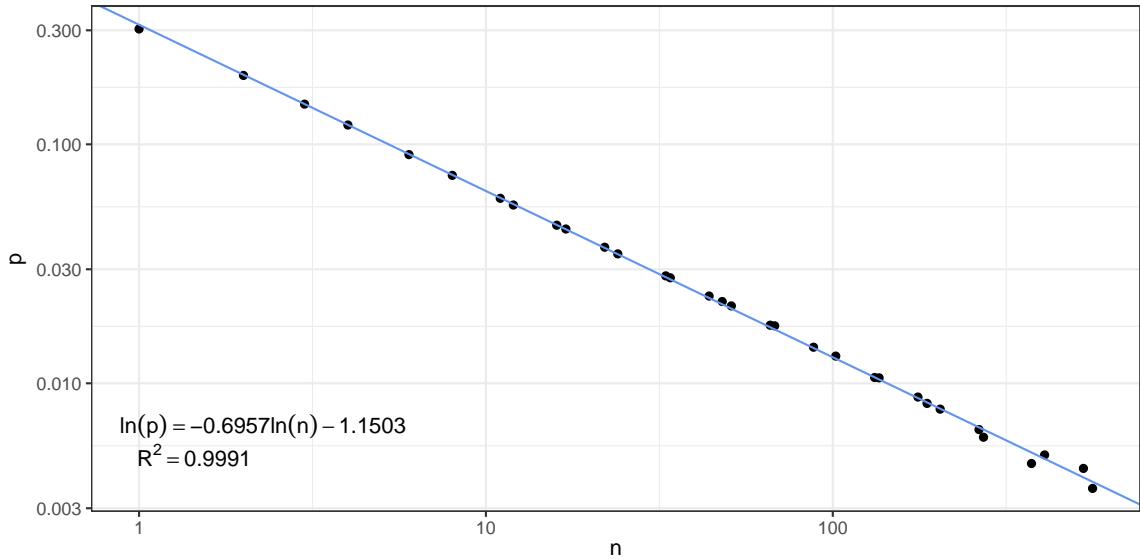


図 39 n 秒後に TOPIX が変動しない確率 p

11 日経平均株価を用いた分析

11.1 安定分布のパラメータの推定

まず、日経平均株価の安定分布としてのパラメータを推定する。これ以降の他のデータに関する分析では推定値を示すだけにとどめるが、日経平均株価についてはやや詳しく分析していく。図 40 は系列 $\{X_t\}$ の間隔 n の増分を $n^{-1/2}$ 倍した標本のヒストグラムとパラメータの推定値である。参考に正規分布のパラメータも推定しており、曲線は推定された正規分布と安定分布の確率密度関数である。なお、 $\{X_t\}$ は増分の平均が 0 になるように調整しているため、平均 μ の推定値は常に 0 である。一方で、 δ の推定値は標本の平均が 0 であっても β の推定値に応じて 0 でない値をとる。

$n = 1$ のものが系列 $\{Y_t\}$ に対する推定値にあたるが、この $n = 1$ の場合をみると、 α の推定値は約 1.46 であり、非常に裾の厚い分布が推定されている。ヒストグラムと確率密度関数を比較すると、正規分布よりも急尖的な分布になっており、とくに分布の中心付近では安定分布によって非常にうまく近似されていることがわかる。 β の推定値は約 -0.06 であり、ほとんど左右対称な分布が推定されている。

しかし、 n を大きくしていくと、 α の推定値は若干大きくなり、 β の推定値は明らかに小さくなっている。 α の推定値は $n = 4$ から $n = 12$ に対して 1.6 程度になっており、 β の推定値は $n = 9$ で約 -0.27 に達している。この結果を自己相似性を否定するものとして捉えることもできるが、図 14 や図 15 でみたように、とくに系列に正の自己相関がある場合には推定値に多少の偏りが生じる。それは α や β の絶対値を過大評価するような偏りである。さらに、非整数安定過程の乱数セットでは標本数を 5040 としていたが、日経平均株価の標本数は 19153 であるから、たとえば $n = 12$ のケースでは $(19153 - 1) / 12 = 1596$ の標本しか得られず、偏りとばらつきがともに大きくなっていることが予想される。したがって、多少の変動はこれによって説明できるが、それを考慮しても β の推定値の変動は些か激しいように思われる。

図 40 は間隔 n に対して $n^{-1/2}$ 倍で標本をスケーリングしているため、もし $\{X_t\}$ がブラウン運動に従うならば分布は n によらず等しくなるはずである。確かに、標準偏差 σ の推定値は 0.0116 から 0.0120 程度でほとんど一定であり、この点はブラウン運動を明らかに否定する結果にはなっていない。しかし、これはスケーリング指数が $1/2$ であることを示すものではない。分散に基づくハースト指数の推定からもわかるように、この結果はハースト指数が $1/2$ に近いことを示唆するものである。そのハースト指数の詳しい推定については後にみていく。一方で、安定分布のスケールパラメータである γ の推定値は $n = 4$ から $n = 12$ に対して 0.0065 程度で一定であるが、 $n = 1$ や $n = 2$ のケースではこれよりも若干小さい。しかし、この相違は α の推定値にも影響されているものと考えられる。 γ が一定のもとで α が小さくなれば、自ずと分布のばらつきも大きくなるためである。したがって、 γ の推定値からスケーリング指数を考えることは難しい。

分布パラメータではなく単にヒストグラムだけを比較すれば、とくに分布の中心付近において同一の階級に対する相対度数が n を大きくするに従って傾向的に小さくなっている。分布のばらつきが次第に大きくなっているように見える。相対度数の変化は観測値が特定の範囲に含まれる確率の減衰の仕方を表し、図 39 と同じようにスケーリング指数に関する情報を与える。つまり、 $n^{-1/2}$ 倍でスケーリングしているにも関わらずこの確率が n の増大とともに減衰しているということは、スケーリング指数が $1/2$ よりも大きいことを示唆している。ハースト指数が $1/2$ に近くスケーリング指数が $1/2$ よりも大きいことは α が 2 よりも小さいことを示し、水準の違いはともかく α の推定値と整合的ではある。少なくとも α は 1 よりも大きいようであるから、スケーリング指数はグラフのフラクタル次元から計算可能であり、その詳細は後に述べていく。

推定された分布の当てはまりのよさを比較するために、図 41 に Q-Q プロットと Kullback-Leibler 情報量を示した。図 40 と同様に n に対して $\{X_t\}$ の間隔 n の増分を $n^{-1/2}$ 倍した標本の Q-Q プロットであり、この Q-Q プロットは対象の標本 $\{x_k\}_{1 \leq k \leq N}$ と比較対象の分布の逆累積分布関数 $F^{-1}(p)$ に対して、 $\{(F^{-1}((k - 1/2) / N), x_{(k)}) \mid 1 \leq k \leq N\}$ と与えられたものである。ここで、 $x_{(k)}$ は $\{x_k\}$ の順序統計量であり、 k 番

目に小さな値を示す。 $F^{-1}(p)$ は安定分布ないしは正規分布の逆累積分布関数となる。ただし、安定分布を当てはめたときの Q-Q プロットは横軸の幅が非常に大きくなってしまうため、適当な範囲に制限している。

$\{x_k\}$ が従う分布が比較対象の分布 $F(x)$ と等しいならば、Q-Q プロットは図中の破線で示した傾き 1 切片 0 の直線付近にプロットされるはずであるが、安定分布でも正規分布でも分布の裾にあたる点で著しく乖離している。正規分布では左裾が破線よりも下にプロットされており、右裾が破線よりも上にプロットされている。これはその確率を過小評価していることを示している。安定分布ではその反対であり、中心から大きく離れた値が生じる確率を過大評価している。経験的には、株価の暴落ないしは暴騰が正規分布に比べて頻繁に生じることがしばしば指摘されるが、今回のような方法で単純に推定された安定分布を仮定すると、逆にリスクを過大に評価してしまうおそれがある。安定分布のように裾が厚い分布の Q-Q プロットでは裾の部分が強調されてしまうため判別しづらいが、分布の中心付近では正規分布よりも安定分布のほうが破線に近い位置にプロットされている。これは図 40 のヒストグラムと確率密度関数を比較しても明らかである。

各グラフの左上に表示した値は Kullback-Leibler 情報量であり、標本と比較対象の分布の近さを評価する指標である。一般に、有限な測度空間 (S, Σ, μ) に関して、 μ に対して絶対連続な確率測度 Q に対する Q に対して絶対連続な確率測度 P の Kullback-Leibler 情報量 $D_{KL}(P \parallel Q)$ は、

$$D_{KL}(P \parallel Q) = \int_S p(x) \ln \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) d\mu(x)$$

と定義される。ここで、 $p = dP/d\mu, q = dQ/d\mu$ であり、これらは P, Q の μ に関するラドン-ニコディム微分である。したがって、 $D_{KL}(P \parallel Q)$ は μ によらない。とくに S が実数全体 \mathbb{R} であって Σ が \mathbb{R} 上のボレル集合 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ であるならば P, Q はある確率分布であると考えることができるが、さらに P, Q が絶対連続な分布であるならば μ をルベーグ測度 \mathcal{L} として選ぶことができ、このとき $p(x), q(x)$ は P, Q の確率密度関数となるため、

$$D_{KL}(P \parallel Q) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) dx \quad (61)$$

と書ける。もし P と Q が等しければ、任意の x に対して $p(x) = q(x)$ であり、 $\ln(p(x)/q(x)) = 0$ であるから、 $D_{KL}(P \parallel Q) = 0$ である。また、 $D_{KL}(P \parallel Q)$ は常に非負であることが知られており、 $D_{KL}(P \parallel Q)$ が小さいほど Q が P に近いと評価できる。さらに、確率分布 P に従う確率変数 X の確率分布 Q による対数尤度の期待値は

$$\begin{aligned} E[\ln(L(Q|X))] &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln(q(x)) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln(p(x)) dx \\ &= -D_{KL}(P \parallel Q) + \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln(p(x)) dx \end{aligned}$$

となるから、確率分布 P が与えられたときに $D_{KL}(P \parallel Q)$ を最小化する確率分布 Q を選ぶことは最尤法による推定に等しい。実際には P を標本の分布とし、 Q を推定された正規分布ないしは安定分布とすることになる。標本から P を計算するにあたりカーネル密度推定等を考えることもできるが、ここでは度数分布を用いることにした。度数分布の階級は標本の最小値から最大値までの区間を標本数 N に対して $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$ 個の区間に分割することで得、各階級内における確率密度は対応する相対度数を階級の幅で割った値として等しく扱う。したがって、 k 番目の階級 I_k に対応する相対度数を p_k とおき、 $q_k = \int_{I_k} q(x) dx$ とおけば、Kullback-Leibler 情報量は $\sum_k p_k \ln(p_k/q_k)$ と計算できる。正規分布や安定分布は \mathbb{R} 上に定義された確率分布であるから常に $q_k > 0$ となるが、分布の裾においては $q(x)$ が非常に小さな値をとるため、計算機上では $q_k = 0$ と評価されてしまうことがある。そこで、そのような階級 I_k については、それが最右端の区間であるならば左の階級 I_{k-1} と結合し、それ以外であるならば右の階級 I_{k+1} と結合して評価しなおすものとした。図 41 では正規分布を当てはめたものを $D_{KL}(N)$ 、安定分布を当てはめたものを $D_{KL}(S)$ として示している。正規分布は安定分布の特殊なケースであり、安定分布のパラメータは最尤法に基づいて推定されているため、当然の結果ではあるが、すべての n において $D_{KL}(N)$ よりも $D_{KL}(S)$ の方が小さく、安定分布のほうが当てはまりがよいという結果が示されている。ただし、その差は n を大きくするに従って小さくなっている。

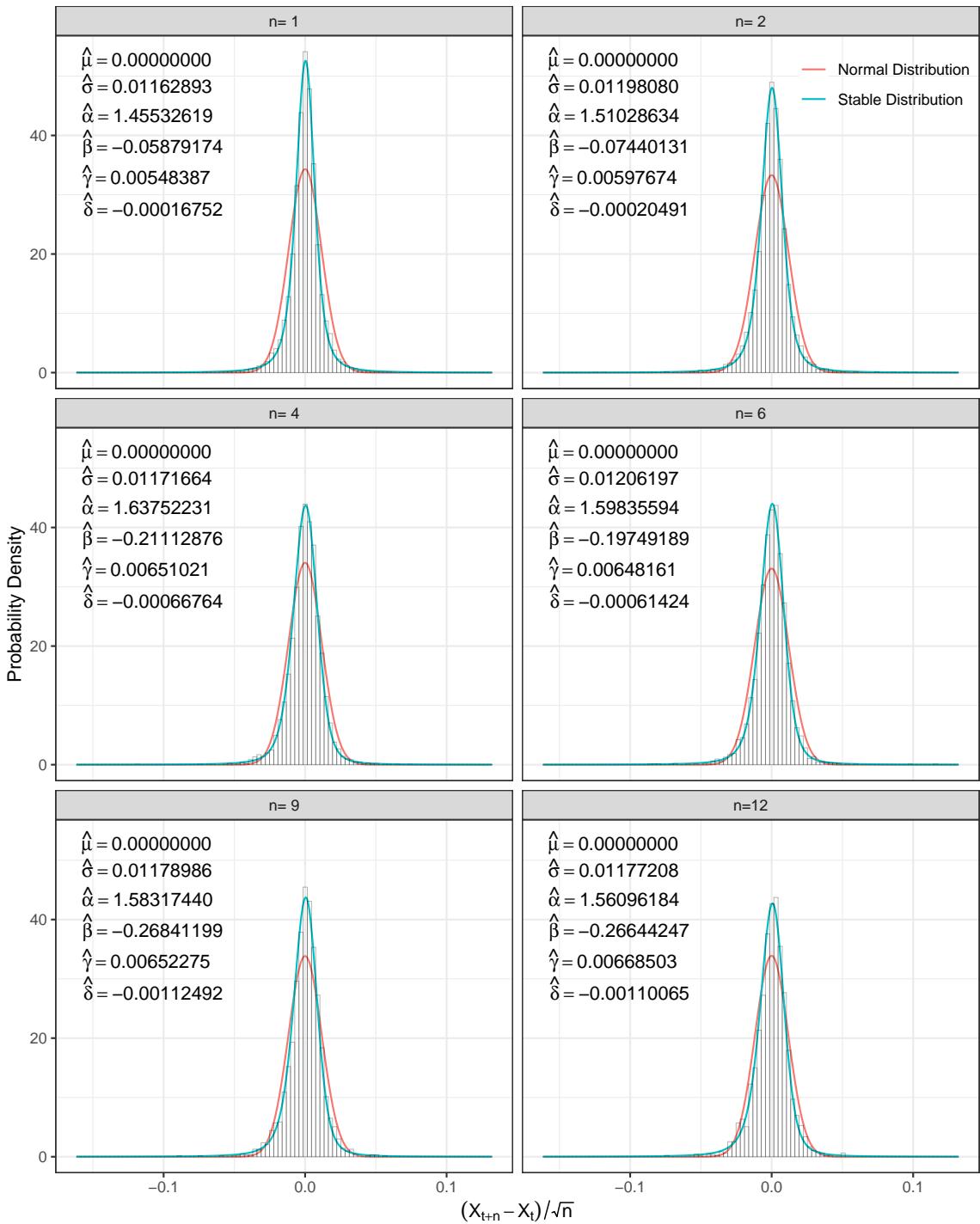


図 40 日経平均株価の系列 $\{X_t\}$ の増分のヒストグラムと分布パラメータの推定値³⁸

³⁸ 安定分布の確率密度関数は libstableR パッケージ (ver. 1.0.2) の stable_pdf 関数による.

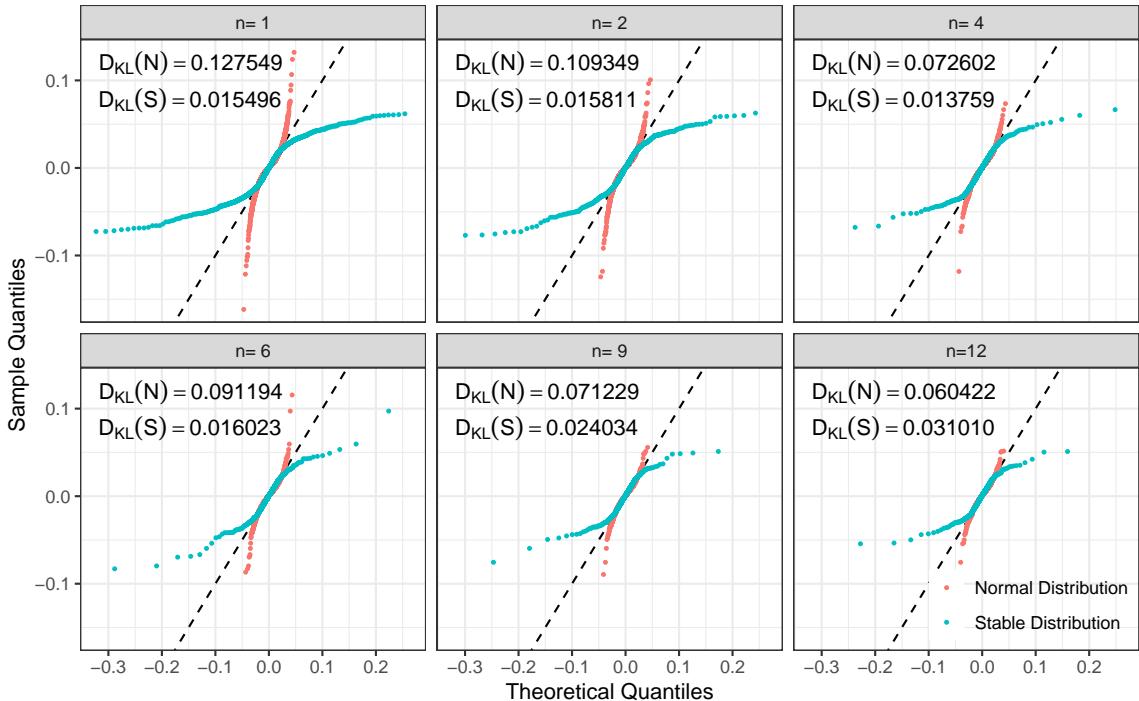


図 41 日経平均株価の系列 $\{X_t\}$ の増分の Q-Q プロットと Kullback-Leibler 情報量³⁹

11.2 ハースト指数の推定

次に、日経平均株価のハースト指数の推定を行う。まずは、分散を用いたハースト指数の推定結果を図 42 に示す。図では計算可能なすべての n に対する $\hat{\sigma}_n^2$ を表示しているが、上に述べたように、実際に回帰分析の対象にする部分は図中の青色の領域内だけであり、これは標本数が 50 以上になる範囲である。つまり、 $1 \leq n \leq (19153 - 1)/50$ の範囲である。少なくともこの範囲において $\hat{\sigma}_n^2$ は幂乗則に従っていることが観察でき、この方法の場合それほど重要ではないが、決定係数は十分大きい。そして、推定されたハースト指数は 0.5339 であり、1/2 よりもわずかに大きな値であった。図 17 でもみたように、分散によるハースト指数の推定では、とくに真の値がそれほど小さくなれば推定値のばらつきが比較的小さく、また、真の値が 1/2 に近い場合には推定値に大きな偏りがなかった。したがって、この結果から真のハースト指数は 1/2 よりもわずかに大きく系列が長期記憶をもつか、あるいは 1/2 であって系列が無相関であると考えられる。

次に、パワースペクトル密度を用いた推定結果を図 43 に示す。回帰分析の対象範囲を示す青色の領域は $\omega \leq \pi/4$ の範囲である。推定値は 0.5153 であり、分散を用いた場合よりも 1/2 に近い。また、決定係数は極めて小さいが、パワースペクトル密度はハースト指数 H に対して指数 $-2H + 1$ の幂乗則に従うため、 $H = 1/2$ 付近においてはこの指数が 0 に近い値となり、このような結果が生じることが自然である。このパワースペクトル密度によるハースト指数の推定の場合でも、とくに真の値が 1/2 に近い場合には推定値のばらつきや偏りが比較的小さかったから、やはり推定結果はハースト指数が 1/2 であるか、それよりもわずかに大きいことを示唆している。

図 44 には R/S 分析による推定結果を示した。統計量 $(R/S)_n$ は少なくとも青色の領域で示した $n \geq 50$ の範囲において幂乗則に従っていることが観察できる。青色の領域の外側の n が小さなところでは回帰直線からのわずかな乖離が確認できるが、これは $(R/S)_n$ の性質によるものであり、この範囲の間隔 n に対して系列が異なる様相を呈することを示すわけではない。また、決定係数は十分大きいが、推定値は 0.5849 であり、分散

³⁹ 安定分布の逆累積分布関数は libstableR パッケージ (ver. 1.0.2) の stable_q 関数による。

やパワースペクトル密度による推定結果よりも明らかに大きく、 $1/2$ からの乖離を示している。しかし、これはR/S分析の推定値が偏りをもつことによると考えられる。図22でみたように、R/S分析では真の値が小さなときに偏りが大きく、推定値は過大評価された。とくに $H < 1/2$ かつ $\alpha < 2$ であるとき正しく推定できていなかったが、他の推定結果からもわかるように $H < 1/2$ であるとは考えにくいため、この点は深刻な問題ではない。しかし、それでも $H = 1/2$ 程度の水準であれば推定値がわずかに過大評価される傾向にあったため、真のハースト指数は 0.5849 よりも若干小さな値であると予想される。そのことを考慮すれば、この結果は分散やパワースペクトル密度による推定結果と整合的であるようにも思えるが、もしパワースペクトル密度による推定結果である 0.5153 という値が真の値であるとすれば、推定値の偏りを考慮しても R/S 分析による 0.5849 という推定値は些か大きすぎるともいえる。分散による推定結果がパワースペクトル密度による推定結果より大きかったことからも、真のハースト指数は 0.5153 よりも若干大きいのではないかと考えられる。

最後に、DFAによる推定結果を図45に示す。青色の領域内において、統計量 F_n が従う幕乗則が観測でき、決定係数は十分大きな値をとっている。図26でみたように、DFAでは真の値によらずに推定値の偏りが小さいが、推定値は 0.5566 であり、これまでの推定結果と同じように、 $1/2$ よりも大きいことを示唆する結果となっている。この系列から 0.5566 という推定値が得られることがどれだけ珍しいことであるかを判断するために、DFAに関してスクランブルテストを行った結果を図46に示した。上述の通り、これは系列 $\{X_t\}$ の増分 $\{Y_t\}$ をランダムに並べ替え、DFAによってハースト指数を推定したときの推定値の分布である。並べ替えは 10000 回行ったが、その中で元の推定値よりも $1/2$ から離れた値が得られたケースは 305 回だけであった。つまり、その割合 p_{DFA} は 3.05% であり、ある程度低い水準であるといえる。したがって、 $\{Y_t\}$ の順序は無意味ではなく、 $\{X_t\}$ が独立増分ではないことがわかる。そして、これまでの推定結果からハースト指数は $1/2$ よりも大きく、この系列が長期記憶をもつと判断できる。なお、非整数安定過程では安定分布のパラメータ α とハースト指数 H の関係が、 $H = 1/2$ であるケースを除いて、 $0 < H < 3/2 - 1/\alpha$ に制限され、 H が大きいほど α がとれる範囲が狭くなっていたが、今回の推定結果からハースト指数を大きめに $H = 0.6$ と評価しても $1.11 < \alpha \leq 2$ となるため、上でみた α の推定値に対してハースト指数の推定値は十分小さいといえる。

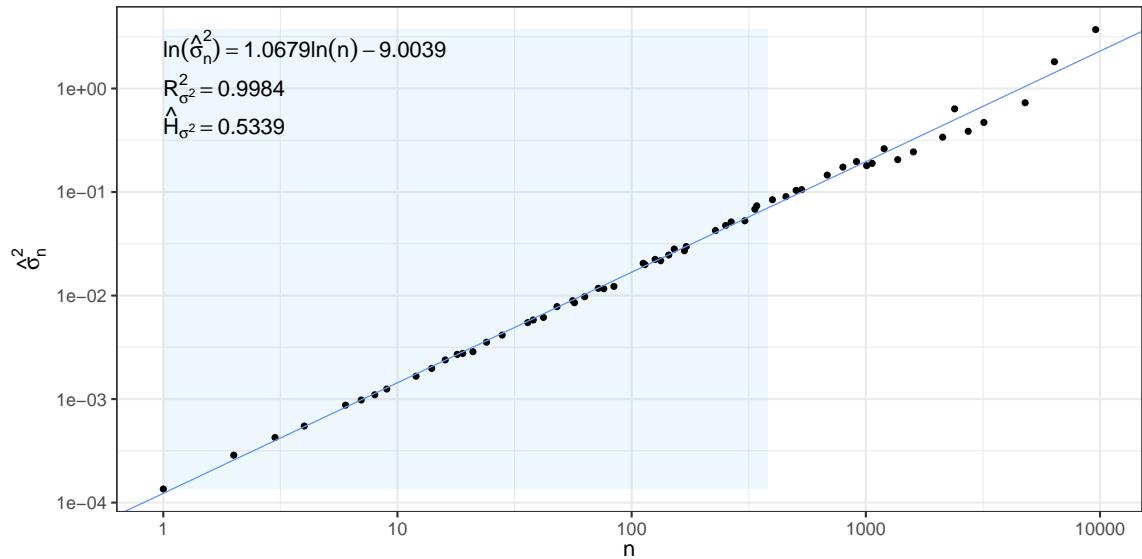


図 42 日経平均株価の分散に基づくハースト指数の推定

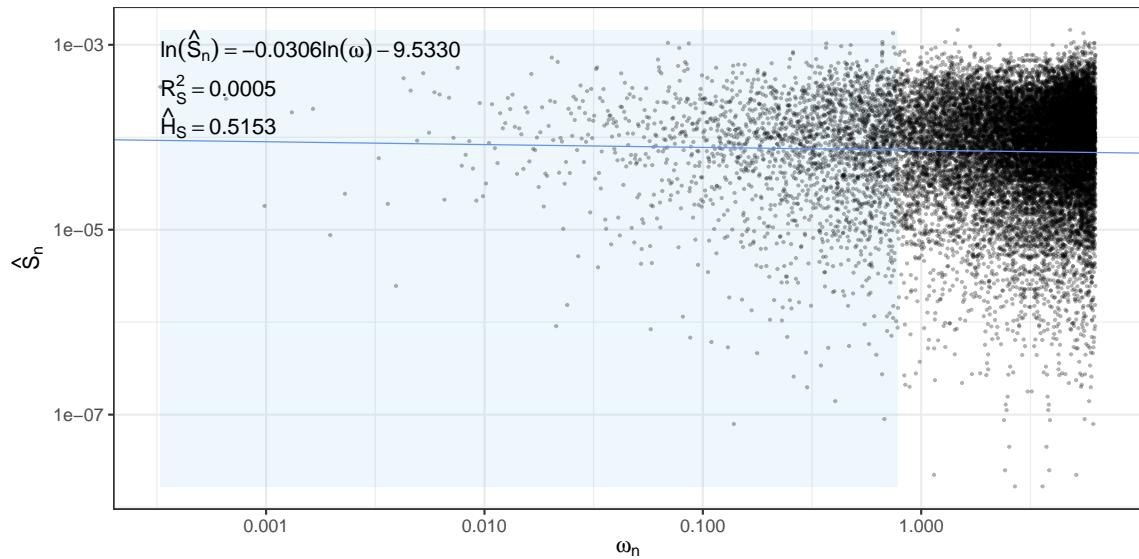


図 43 日経平均株価のパワースペクトル密度に基づくハースト指数の推定

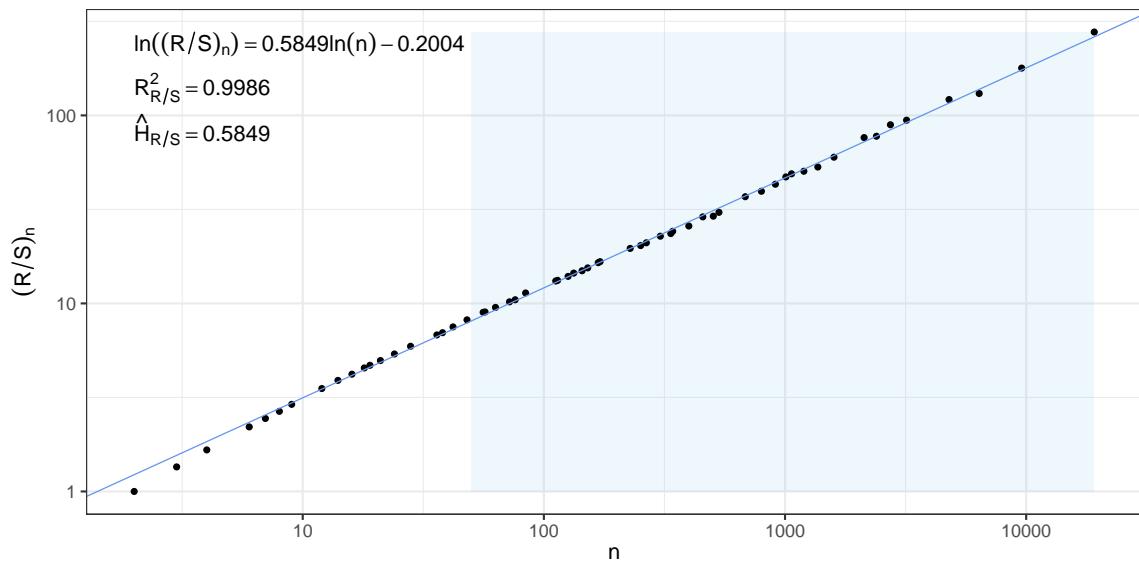


図 44 R/S 分析による日経平均株価のハースト指数の推定

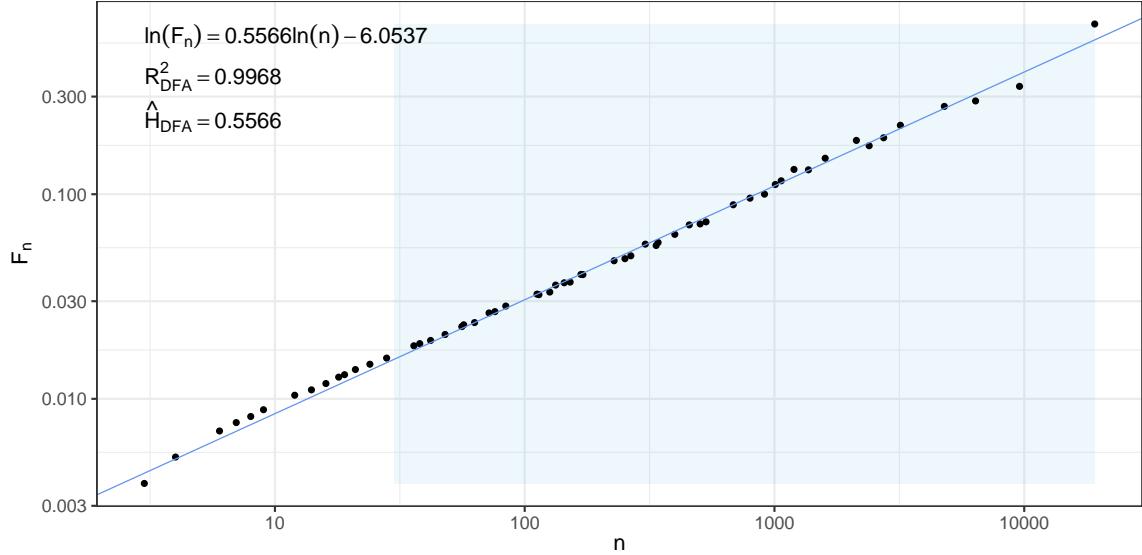


図 45 DFA による日経平均株価のハースト指数の推定

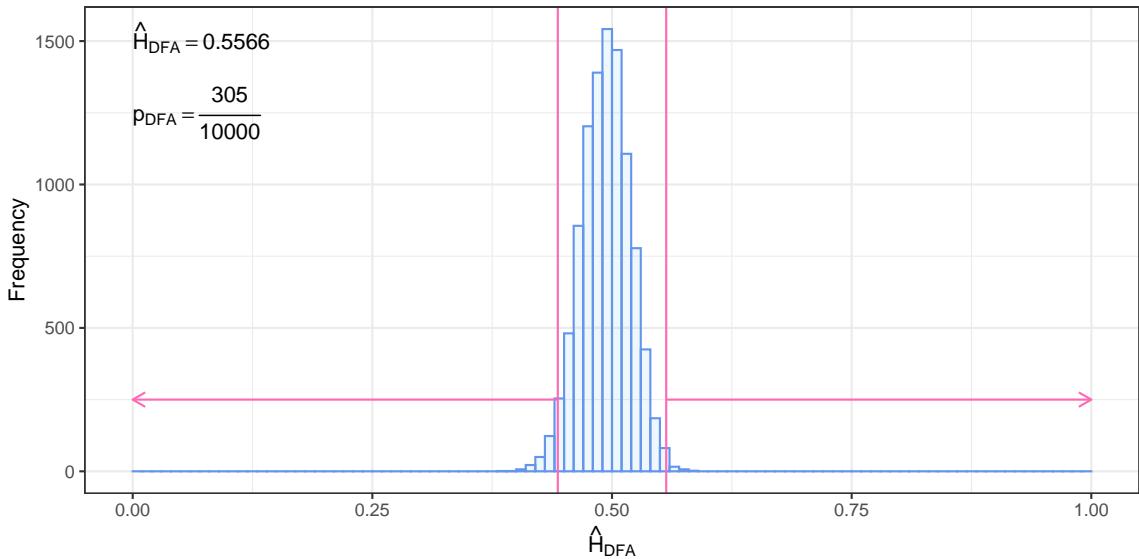


図 46 日経平均株価のスクランブルテストの結果

11.3 フラクタル次元の推定

最後に、フラクタル次元の推定を行う。これまでの推定結果を極めて大雑把に評価すれば、安定分布のパラメータ α の推定値は 1.4 から 1.6 程度であり、ハースト指数の推定値は 0.5 から 0.6 程度であった。したがって、グラフの次元は 1.19 から 1.38 程度であると考えられる。とくに、DFA によるハースト指数に基づいて推定される次元 \dim_{DFA} は $2 - 0.5566 - 1/1.4553 + 1/2 = 1.26$ である。また、ハースト指数が $1/2$ よりも大きいことは α によらずグラフの次元が 1.5 よりも小さいことを意味する。

図 47 にはボックスカウント法によるグラフの次元の推定結果を示した。 δ を小さくしていったとき、 10^{-4} 程度を境に \hat{N}_δ が急激に減少しているが、これは区間 $[0, 1]$ を幅 δ の区間で分割したときに、各区間に上に対応する標本が 1 つしか存在しないような区間が生じるためである。いま、標本数は $N = 19152$ であり、 k 番目の標本は時点 k/N に対応するから、自然数 $1 \leq m \leq \lceil 1/\delta \rceil - 1$ に対して区間 $((m-1)\delta, m\delta]$ に属する時点に対応

する標本は、 $\delta \geq 2/N$ ならばすべての m に対して少なくとも 2 つ以上存在するが、 $\delta < 2/N$ ならば標本が 1 つしかないような区間がいくつか生じる。標本が 1 つしかない区間では対応する標本値の幅が 0 になるため、 \hat{N}_δ は著しく低下する。そして、この $2/N = 2/19152$ は約 10^{-4} であり、図 47 におけるこの付近での \hat{N}_δ の振る舞いはこのことを表している。一方で、回帰分析の対象範囲を示す青色の領域内においては明確に累乗則がみられる。ここから推定された次元は 1.4004 であり、決定係数は十分大きい。図 31 でみたように、ボックスカウント法ではハースト指数が小さいとき正しく推定できなかったが、上述の推定結果からハースト指数は $1/2$ よりも大きいと考えられるため、幸いにもこのことは大きな問題とならない。しかし、 $H > 1/2$ であっても推定値に若干の偏りが生じていた。それを考慮しても、1.4004 という推定値はハースト指数や α の推定値から推測される次元よりもやや大きい。もしグラフの次元が 1.40 程度かそれよりもやや大きく、ハースト指数が DFA で推定されたように 0.55 程度であるならば、 α は 1.8 以上でなければならない。

図 48 には樋口法によるグラフの次元の推定結果を示した。決定係数は表示上 1 であり極めて高い。推定値は 1.4437 でありボックスカウント法による推定値よりもやや大きいが、図 34 でみたように、樋口法では推定値を過大評価する方向に一定の偏りが生じていた。したがって、実際のグラフの次元は 1.4004 から 1.4437 の間程度であると考えられる。 α は少なくとも 1 よりは大きいと考えられるため、この結果はスケーリング指数が 0.5563 から 0.5996 程度であることを意味する。このスケーリング指数の下限は DFA によるハースト指数の推定値に非常に近いため、その結果から判断すれば $\alpha = 2$ として差し支えないといえる。しかし、スケーリング指数の上限 0.5996 と、最もハースト指数の推定値が低かったパワースペクトル密度に基づく推定値 0.5153 を用いれば、そこから計算される α は $1/(0.5996 - 0.5153 + 1/2) = 1.7115$ となる。いずれにしても実際の α の推定値よりは明らかに大きい。

観測された系列 $\{X_t\}$ の増分が実際にそのようなスケーリング指数をもっているのかを、Kullback-Leibler 情報量を用いて調べた。もしスケーリング指数が s ならば自然数 n に対して $n^{-s}(X_{t+n} - X_t)$ が従う分布に対する $X_{t+1} - X_t$ が従う分布の Kullback-Leibler 情報量は 0 になるはずである。もちろん観測されたデータから推定する以上、その推定値は必ずしも 0 にならないが、同じデータに対して s を 0 から 1 に動かしながら Kullback-Leibler 情報量を計算していくとき、 s がスケーリング指数に一致する点の付近でその値が最小になることが期待される。Kullback-Leibler 情報量は式 (61) から得られるが、ここで確率密度関数 $p(x), q(x)$ は図 41 と同様に度数分布を用いて推定した。そのとき、度数分布の階級は次のように定めた。まず、 $m_1 = \max \{\min \{X_{t+1} - X_t\}, \min \{n^{-s}(X_{t+n} - X_t)\}\}, m_2 = \min \{\max \{X_{t+1} - X_t\}, \max \{n^{-s}(X_{t+n} - X_t)\}\}$ として、 $(m_1, m_2]$ に属する $\{n^{-s}(X_{t+n} - X_t)\}$ の標本数と $(m_1, m_2]$ に属する $\{X_{t+1} - X_t\}$ の標本数のうち小さい方を \tilde{N} とする。そして、区間 $(m_1, m_2]$ を $\lfloor \sqrt{\tilde{N}} \rfloor$ 個の区間に分割したものと、その外側の区間 $(-\infty, m_1], (m_2, \infty)$ をここで用いる度数分布の階級とする。ただし、図 41 のときと同様に、 $\{n^{-s}(X_{t+n} - X_t)\}$ が存在しない階級については右ないしは左の階級と結合して評価するものとする。また、一般には必ずしも $m_1 < m_2$ とはならないが、いま $\{X_t\}$ の増分の平均を 0 としているから、 $\{X_t\}$ の間隔 n の増分の平均もまた 0 であり、 $\{n^{-s}(X_{t+n} - X_t)\}$ には符号の異なるデータが常に存在するはずであるから、常に $m_1 < m_2$ となる。様々な n と s に対して、そのような手順で計算した Kullback-Leibler 情報量を図 49 に示した。 s は 0.25 から 0.75 の範囲を 0.0001 刻みで選んでいる。色のついた垂線は各 n に対して Kullback-Leibler 情報量が最小になる s を示す。なお、そのような s は必ずしも一意ではないが、結果的には各 n に対して 1 つだけしか存在しなかった。そして、その n と s の関係を表 6 に示した。 n に応じて若干の違いがあるが、おおむね $s = 0.53$ から $s = 0.57$ で Kullback-Leibler 情報量が最小になっており、その s に近づくにつれて Kullback-Leibler 情報量が明確に減少していることが図 49 から観察できる。スケーリング指数が 0.53 から 0.57 程度であることは、グラフの次元が 1.43 から 1.47 程度であることを示し、ボックスカウント法や樋口法による推定値と同程度かやや大きな推定値を与えていた。このわずかな相違の原因には次のような点を挙げることができる。もし元の系列が $H > 1/2$ の非整数ブラウン運動に従うならばスケーリング指数は H であるが、式 (59) のように、通常の分散の不变推定量による推定値は過小評価となる。したがって、観測された間隔 n の増分の分布は間隔 1 の増分の分布の n^H 倍よりも若干小さなスケールの分布に従う。つまり、平均的には、本来のスケーリング指数 H よりも少しだけ小さな s において

Kullback-Leibler 情報量が最小化されると考えられる。とくに n が大きくなるほど真の分散と分散の推定値の期待値との乖離が広がるため、この影響は大きな n に対して顕著である。また、このことは非整数ブラウン運動だけでなく、非整数安定過程の場合でも同様である。

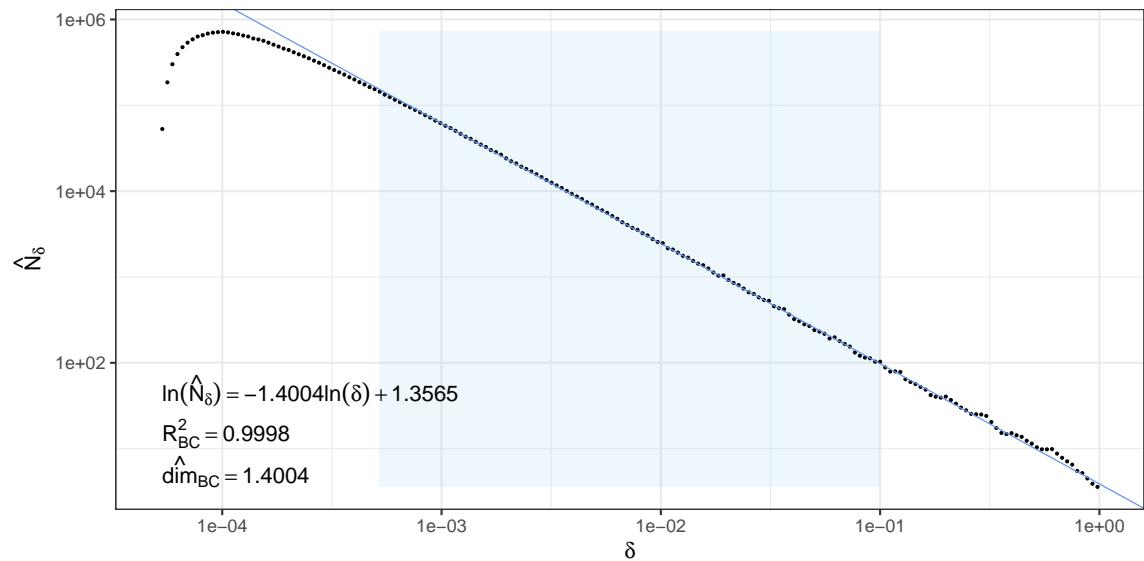


図 47 ボックスカウント法による日経平均株価のグラフの次元の推定

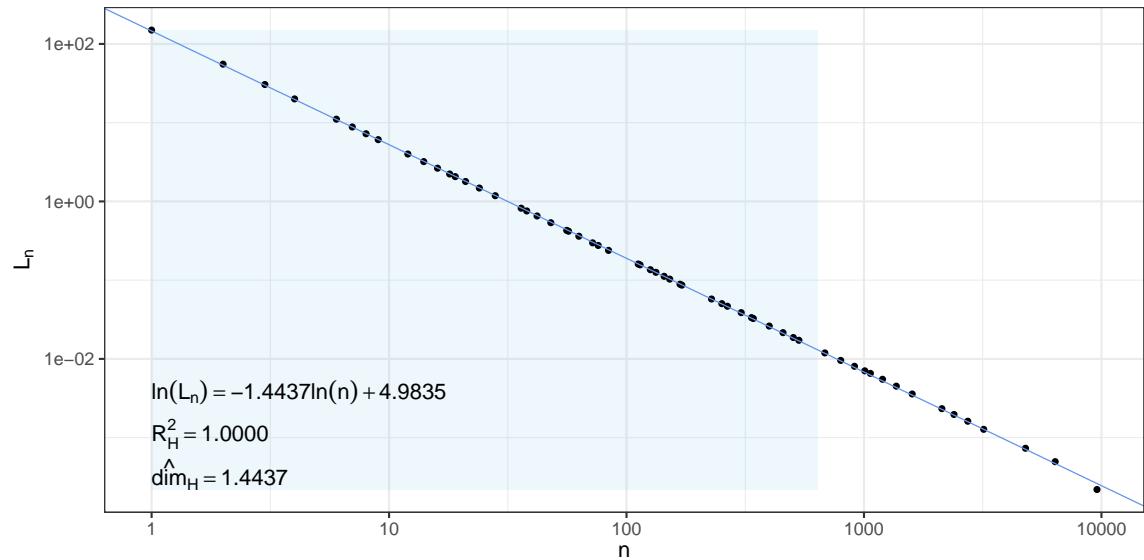


図 48 樋口法による日経平均株価のグラフの次元の推定

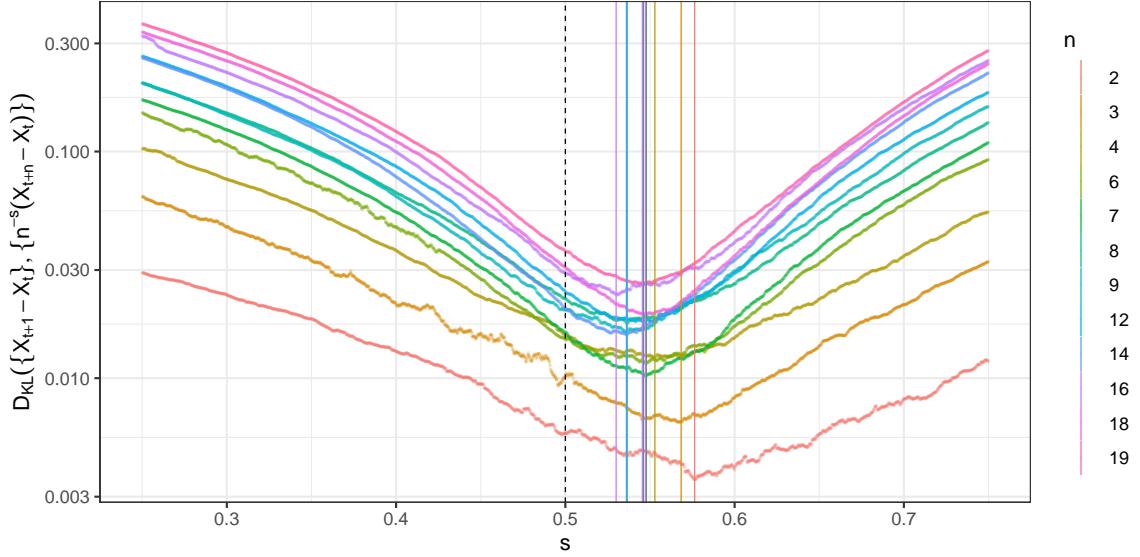


図 49 日経平均株価の対数増分の Kullback-Leibler 情報量

表 6: Kullback-Leibler 情報量を最小化するスケーリング指数 s

n	標本数	$\min \{D_{KL}\}$	s
2	9576	0.003567	0.5764
3	6384	0.006365	0.5684
4	4788	0.012297	0.5529
6	3192	0.011586	0.5475
7	2736	0.010211	0.5478
8	2394	0.017456	0.5364
9	2128	0.015801	0.5361
12	1596	0.017691	0.5462
14	1368	0.015545	0.5365
16	1197	0.023291	0.5300
18	1064	0.019060	0.5474
19	1008	0.026124	0.5455

11.4 推定値の推移

日経平均株価のデータは標本数が大きく、推定値の経時的な変動を観察することができるため、その結果を示しておく。もっとも、元の時系列が自己相似過程であると考えるならば、各パラメータは一定でなければならず、推定値の変動は微小であることが望ましい。しかし、たとえばハースト指数が一定でないような確率過程が存在しないわけではない。とくに非整数ブラウン運動の拡張として、ハースト指数が時間によって異なるような確率過程はマルチフラクタルブラウン運動 (multifractional Brownian motion) として知られている。これについては Peltier and Véhel (1995) 等に詳しく述べられているが、基本的には式 (48) と同じような形式で表される確率過程であり、パラメータ H を局所 Hölder 連続な関数 $H(t) : [0, \infty) \rightarrow (0, 1)$ で置き換えればよい。そのとき、マルチフラクタルブラウン運動は時点 t の近くでハースト指数 $H(t)$ の非整数ブラウン運動と同じような振る舞いを示す。たとえば、マルチフラクタルブラウン運動を適当な区間 $[a, b]$ に制限した見本関数のグ

ラフの次元は確率 1 で $2 - \min\{H(t) | t \in [a, b]\}$ である。また、時点 t から時点 $t + h$ までの増分の分散は $h \rightarrow 0$ で指数 $2H(t)$ の幂乗則に従う。そのような性質をもつ確率過程は一般に局所自己相似過程とよばれることがある。このマルチフラクタルブラウン運動に関しては経時的なハースト指数の変化を観察することでその特徴を捉えることができるが、上述の通りハースト指数は増分のパワースペクトル密度の振る舞いを定めるため、その時間変動を観察してもよい。その意味で短時間フーリエ変換やウェーブレット変換といった手法が有用であるが、それらを用いてハースト指数を推定するためには、使用するマザーウェーブレットやスケール等の新たなパラメータ選択の問題が生じるため、本稿では単純にデータを短い期間に区切ってこれまでと同様の方法でハースト指数等の推定を行うことにした。なお、ウェーブレット変換を用いたハースト指数やフラクタル次元の推定については、Bayraktar, Poor and Sircar (2004) 等がある。

具体的には、データを 2521 個ずつの期間に区切り、その 2520 個の増分を用いて各期間ごとに推定を行った⁴⁰。表 7 にはデータの開始時点から始めて期間を半分ずつ重複させながらパラメータを推定した結果を示した。すなわち、2521 個の標本からなる期間を 1949 年 5 月 16 日から 1260 標本ずつ移動させながら合計 14 の期間で推定したものである。なお、データ全体を通して対数増分の期待値を推定し、系列 $\{X_t\}$ の増分の平均を 0 に修正したため、この各期間内においては $\{X_t\}$ の平均が 0 にならないが、推定結果に大きな影響はないと思われる。とくにグラフの次元以外のパラメータに対しては一切影響がない。

パラメータ α の推定値は 1.4 程度から 1.8 程度まで幅広く変動している。とくにちょうどバブル景気とその崩壊を含む期間では α が小さく、急激な変動が頻繁に生じた結果を反映したものと考えられる。この結果は分布自体が経時的に変化している可能性を示唆するが、ハースト指数も変動している可能性を考慮すると、 α の推定値の変動はそれによるものであると考えることもできる。つまり、マルチフラクタルブラウン運動を考える場合、特定の時間間隔に対する分散は時点によって異なることになり、それを一つの標本として結合して推定に用いたために α が小さく評価されたとみることができる。あるいは、より単純に分布のスケールだけが時点によって異なることによっても同じ結果が予想される。これは混合正規分布の尖度が 3 ではなくなることと同じような理由である⁴¹。

ハースト指数の推定値は推定方法にもよるがおおむね 0.45 から 0.60 程度である。多くの期間でスクランブルテストの結果 p_{DFA} がそれほど小さくないことからも、変動はそれほど激しくなく 0.5 付近を推移しているようであるが、オイルショックを含む 1974 年 8 月 14 日に始まる期間は例外的であり、DFA によるハースト指数の推定値が 0.3919 と著しく小さく p_{DFA} も小さい。ハースト指数が $1/2$ よりも小さいことから、負の自己相関が生じているものと考えられるが、それと同時に決定係数もやや小さいことに注意しなければならない。これは DFA で用いる統計量 F_n が幂乗則に従っていない可能性を示唆する。そこで、このときの回帰分析の様子を図 50 に示した。なお、垂線は $n = 500$ を示し、破線の回帰直線は $30 \leq n \leq 500$ の範囲で当てはめたものであるが、左上の数値は $30 \leq n$ の範囲で回帰分析を行った結果である。 $n < 30$ の範囲における回帰直線からの乖離は F_n の性質によるものであるが、 $n > 500$ の範囲での下方への乖離は n が大きいとき、すなわち大きな時間間隔でみたときの自己相関によるものであると考えられる。この部分が回帰分析の範囲に含まれていることで、推定値が小さく評価され、決定係数も下がってしまっていることがわかる。破線で示した回帰直線のように、 $30 \leq n \leq 500$ の範囲で回帰分析を行うと推定値は $1/2$ に近くなる。図中に示してはいないが、このときの推定値は $\hat{H}_{DFA} = 0.4834$ であった。図からわかるように $n > 500$ の範囲では傾きが極端に小さい。典型的には、このような状況は定常過程やあるいは力学系におけるアトラクター上の軌道のように有界な空間に満遍なく分布する時系列において生じる。 F_n はデータを n 個ずつに分割して時間で線形回帰したときの残差によって評価されたが、もし元の時系列がとる値が有界な空間に制限されているならば時間間隔 n を大きくするにしたがって、回帰直線の傾きは 0 に近づかざるを得ず、 F_n は元の系列の標準偏差に近づく。したがって、十分

⁴⁰ 2520 は 18 番目の高度合成数であり、48 個の約数をもつ。さらに、2520 は 7 番目の優高度合成数であり、任意の自然数 n と $0.3220 < \epsilon < 0.3562$ に対して $\sigma_0(2520)/2520^\epsilon = 48/2520^\epsilon \geq \sigma_0(n)/n^\epsilon$ となる。

⁴¹ 一般に確率変数 σ^2 が平均 m 分散 s^2 の正の値だけをとる分布に従い、確率変数 X が平均 μ 分散 σ^2 の正規分布に従うとき、 X の期待値、分散、歪度、尖度はそれぞれ μ , m , 0, $3(1 + s^2/m^2)$ となる。

大きな n に対して F_n はほとんど一定であり、図のような結果が得られることがある。図 37 からもわかるように、この期間の日経平均株価の系列 $\{X_t\}$ は一定の水準を保つように推移しており、値が一定の水準に達すると、あるいは下回ると、反対の傾向を示すようになっている。

グラフの次元の推定値はボックスカウント法では 1.35 から 1.45 程度、樋口法では 1.40 から 1.50 程度であった。常に樋口法による推定値がボックスカウント法による推定値よりも 0.05 程度大きくなっている。しかし、いずれにしても α とハースト指数の推定値から計算される次元 \hat{d}_{DFA} よりも大きな値をとっている。これはデータ全体を用いて推定した結果と同様であるが、上に述べたような理由により α が過小評価されていることによるものであると考えられる。また、マルチフラクタルブラウン運動を考える場合、グラフの次元は正確にはその期間中のハースト指数の最小値によって定まるが、これは直感的にはグラフ全体を被覆するために必要な直径 δ 以下の集合の数が δ を小さくするに従って最も次元の高い部分に対する被覆によって支配的になるためである。しかし、実際に推定する際には有限個のデータしか扱えないため δ をいくらでも小さくすることができます、ハースト指数が大きい期間の影響を受けることになり、結果的には平均的な次元が推定されることになる。したがって、全期間を通して推定されたグラフの次元 1.4004 または 1.4437 は、分割した期間におけるグラフの次元の推定値の最大値とはなっておらず、その平均的な値になっている。

図 51 から図 57 には 2521 個の標本からなる期間を 1 標本ずつ移動させながら各パラメータを推定したときの推定値の推移を示した。いずれも横軸の時間は中間時点、すなわち 1261 番目の標本に対する日付を示している。したがって、推定にはこの前後約 5 年間程度のデータが使用されることになる。また、ハースト指数とグラフの次元の推定には回帰分析を用いるため、図 57 以外ではプロットの色によって決定係数を示している。ハースト指数の推定値はいずれの推定方法においても似たような推移を示し、1970 年くらいまで 0.55 から 0.6 程度と比較的高水準であり、それ以降 1980 年頃に向けて低下し、表 7 でみたように 1970 年代後半に最小値ないしはそれに近い値を記録する。それ以降は、とくに DFA による推定結果では 1990 年代中盤と 2010 年代中盤に小さな値をとっていることが目立つものの、それらを除けばどの推定方法でも $H = 1/2$ であることを否定し難い水準にある。なお、R/S 分析による推定値は全体的に大きいが、この手法では推定値が過大評価される傾向にあることを注意しなければならない。このように、1970 年以前には 0.6 に達するほど比較的高い水準にあり、一方で最近では 0.5 付近の低い水準を推移してきた結果として、全期間を通して推定されたハースト指数が上に述べたように 0.5 よりもわずかに大きい 0.55 程度の水準となったと考えられる。

ボックスカウント法と樋口法によるグラフの次元の推定値はほとんど同じ推移をしており、常に 0.05 程度の差を保っている。また、その推定値はおおむねハースト指数と反対の動きをしていることがわかる。とくに樋口法による次元の推定値と DFA によるハースト指数の推定値の相関係数を計算すると -0.7900 であった。 $\alpha > 1$ のときのグラフの次元は $2 - H - 1/\alpha + 1/2$ であったから、次元の変動の大部分がハースト指数によって説明できることは、 α がそれほど激しく変動しないことを示唆する。図 58 にはこの関係を用いてグラフの次元とハースト指数の推定値から α を計算した結果を示した。図中ではその α を $\hat{\alpha}_{\text{DFA}}$ と表しているが、これは $\hat{\alpha}_{\text{DFA}} = 1/(2 - \hat{H}_{\text{DFA}} - \hat{d}_{\text{H}} + 1/2)$ として計算されたものである。全体的に高い水準にあり、90% 以上の期間で 1.8 を超えている。2000 年以降、多くのケースで $\hat{\alpha}_{\text{DFA}} > 2$ となっているが、実際には α の上限は 2 である。これはグラフの次元かハースト指数のいずれかが過大に評価されている可能性を示唆する。とくに樋口法による推定値は過大評価される傾向にあったため、その影響であると考えられる。

一方で、図 57 の α の推定値は 1.4 程度から 1.8 程度の範囲で推移している。上に述べたように分布のスケールが異なる場合には α が過小評価されることになるが、もし実際の α が一定でありその推定値の変動がハースト指数の変動だけによるものであるならば、ハースト指数がほとんど変わらない期間における α の推定値はそうでない期間に比べて相対的に大きくなることが期待される。実際、 α の推定値が最も大きいのは 1960 年代中盤であるが、確かにこの時期にハースト指数の推定値は比較的安定していた。しかし、1950 年代中盤に α の推定値が 1.5 程度にまで低下していることや、ハースト指数の変動が最も激しかった 1980 年前後に α の推定値が一時的に上昇していることは説明できない。これはそもそも α が一定ではないか、あるいは分布のスケールがハースト指数以外の要因によって変動している可能性を示唆する。

表 7: 日経平均株価の各パラメータの推移

開始時点	中間時点	終了時点	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{H}_{DFA}	$\hat{H}_{R/S}$	\hat{H}_S	\hat{H}_{σ^2}	$\hat{\dim}_{\text{H}}$	$\hat{\dim}_{\text{BC}}$	$\hat{\dim}_{\text{DFA}}$	p_{DFA}	R_{DFA}^2	$R_{R/S}^2$	R_{H}^2	R_{BC}^2
1949/05/16	1953/07/23	1957/09/27	1.5033	0.0057	0.5963	0.6159	0.6005	0.5944	1.3921	1.3409	1.2385	0.0434	0.9857	0.9890	0.9996	0.9992
1953/07/23	1957/09/27	1961/12/05	1.6204	-0.2166	0.5863	0.6286	0.5830	0.5890	1.4055	1.3375	1.2966	0.0664	0.9958	0.9966	1.0000	0.9995
1957/09/27	1961/12/05	1966/02/12	1.7619	-0.1866	0.5860	0.6516	0.5775	0.5598	1.4117	1.3406	1.3464	0.0684	0.9725	0.9914	1.0000	0.9994
1961/12/05	1966/02/12	1970/05/02	1.8035	0.0477	0.5266	0.5906	0.5913	0.5274	1.4418	1.3664	1.4189	0.5795	0.9920	0.9946	0.9999	0.9993
1966/02/12	1970/05/02	1974/08/14	1.6568	-0.2889	0.5440	0.6118	0.5747	0.5223	1.4083	1.3491	1.3524	0.3580	0.9776	0.9881	0.9999	0.9993
1970/05/02	1974/08/14	1979/01/18	1.6199	-0.1568	0.5345	0.5699	0.5366	0.5206	1.4210	1.3626	1.3481	0.4713	0.9845	0.9956	0.9999	0.9990
1974/08/14	1979/01/18	1983/06/16	1.6046	-0.1874	0.3919	0.4449	0.4587	0.4998	1.5173	1.4405	1.4849	0.0259	0.9460	0.9827	0.9990	0.9986
1979/01/18	1983/06/16	1987/12/02	1.5277	-0.0972	0.4912	0.5051	0.5151	0.4763	1.4840	1.3966	1.3542	0.8556	0.9789	0.9803	0.9998	0.9994
1983/06/16	1987/12/02	1992/11/30	1.3798	-0.1303	0.5412	0.5793	0.5503	0.5100	1.4456	1.3627	1.2341	0.3927	0.9590	0.9841	0.9999	0.9995
1987/12/02	1992/11/30	1998/01/09	1.4732	-0.0341	0.5268	0.5680	0.4862	0.5083	1.4560	1.3632	1.2944	0.5708	0.9910	0.9945	0.9998	0.9997
1992/11/30	1998/01/09	2003/02/21	1.6425	0.0320	0.4902	0.5180	0.4917	0.4791	1.4834	1.4072	1.4010	0.8353	0.9948	0.9934	0.9998	0.9995
1998/01/09	2003/02/21	2008/04/07	1.6615	-0.0891	0.5342	0.5600	0.5223	0.4588	1.5024	1.4139	1.3639	0.4709	0.9798	0.9951	0.9999	0.9996
2003/02/21	2008/04/07	2013/05/29	1.6571	-0.1636	0.5383	0.5547	0.4428	0.4917	1.4799	1.3905	1.3582	0.4127	0.9888	0.9976	0.9999	0.9995
2008/04/07	2013/05/29	2018/07/18	1.5404	-0.0965	0.5089	0.4798	0.4753	0.4797	1.4958	1.4116	1.3419	0.8550	0.9818	0.9925	0.9999	0.9995

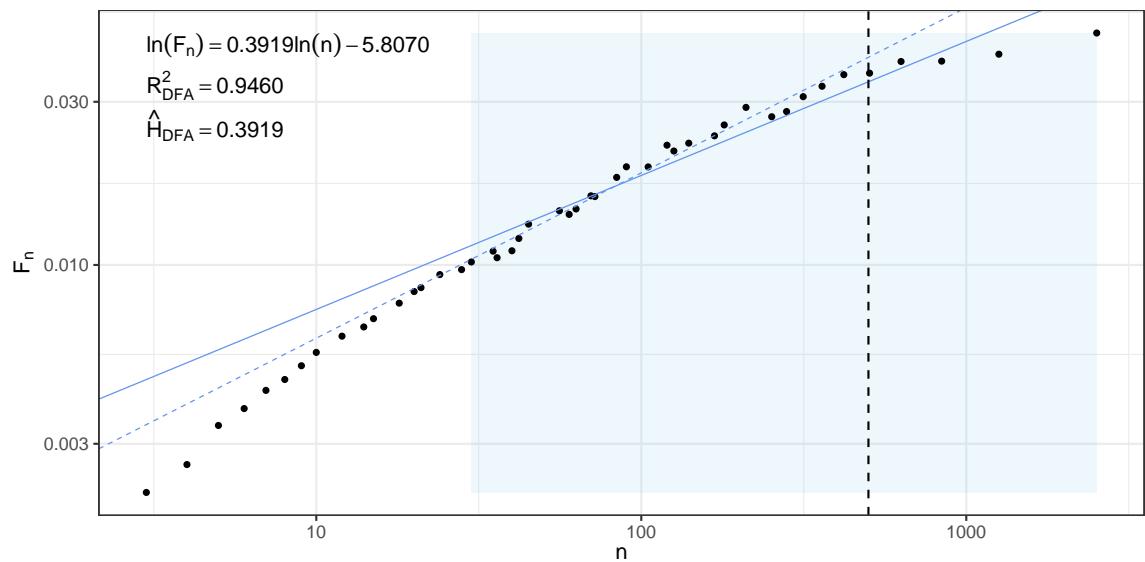


図 50 1974 年 8 月 14 日から 1979 年 1 月 18 日までの日経平均株価のハースト指数の DFA による推定

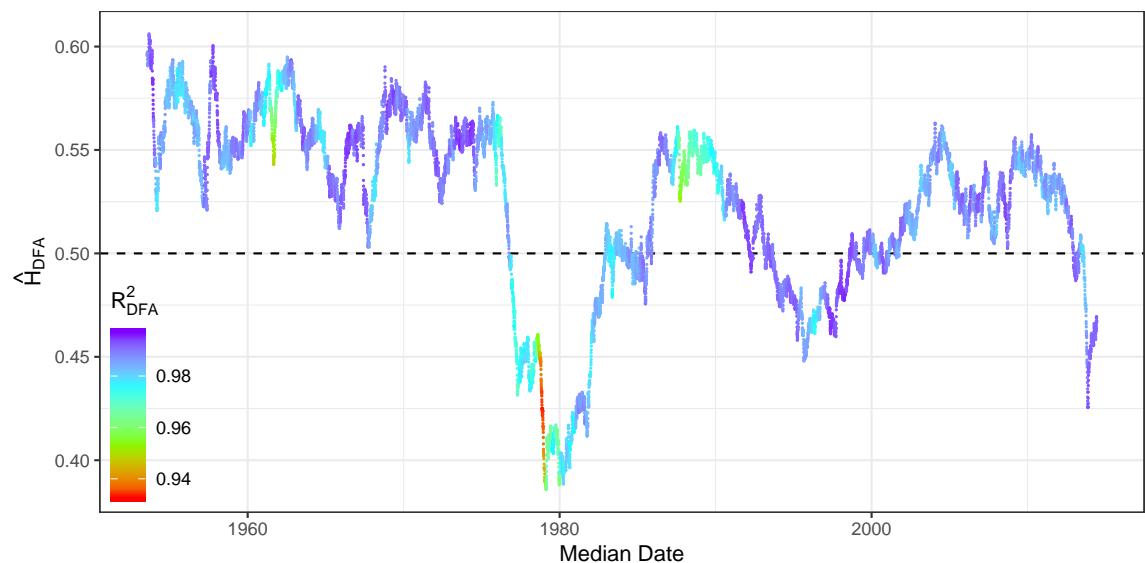


図 51 DFA による日経平均株価のハースト指数の推定値の推移

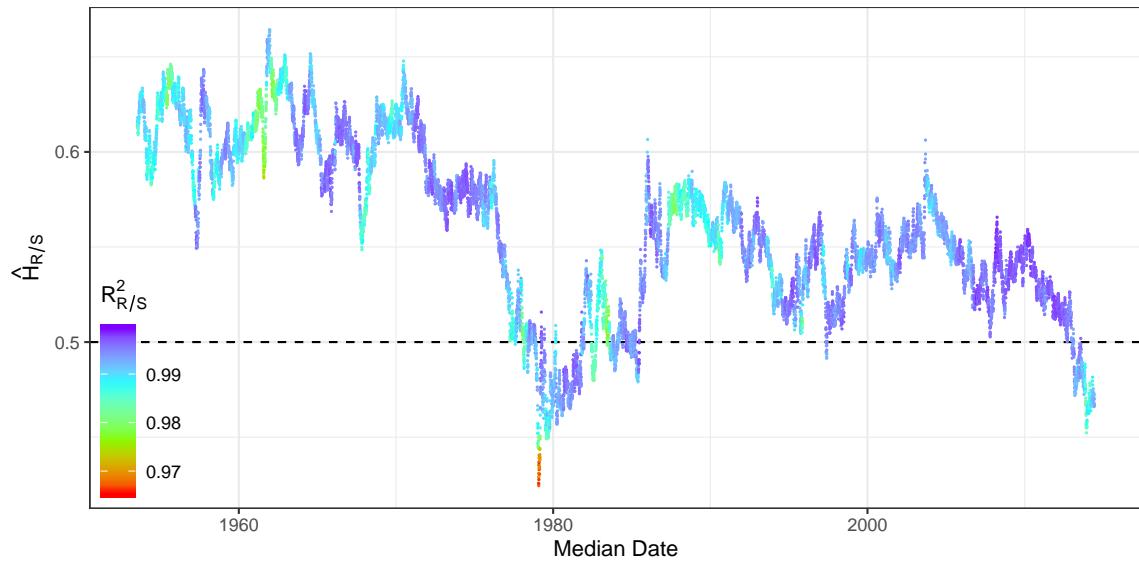


図 52 R/S 分析による日経平均株価のハースト指数の推定値の推移

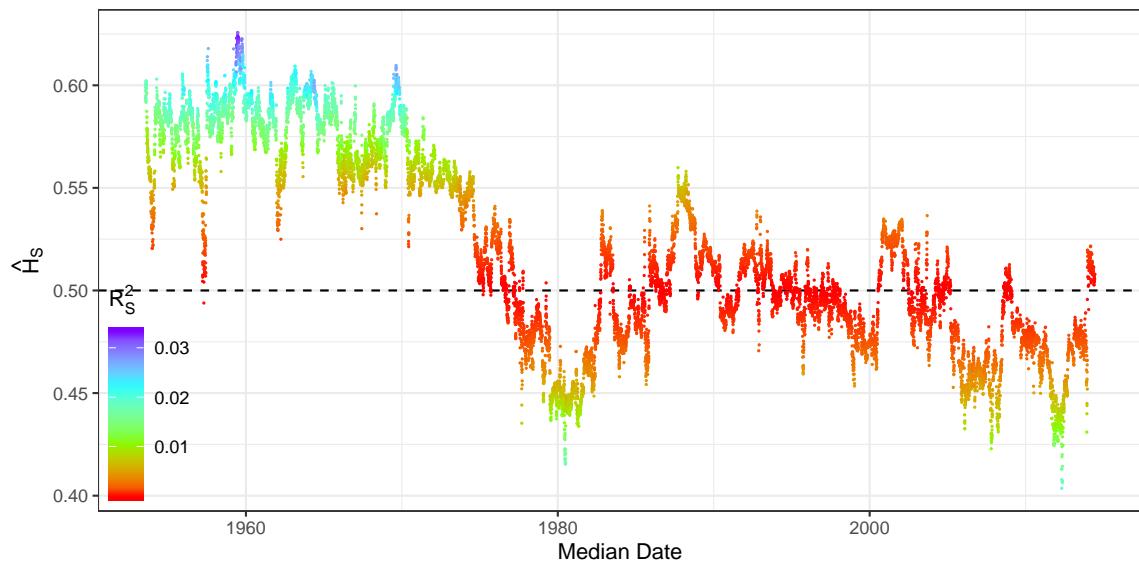


図 53 日経平均株価のパワースペクトル密度に基づくハースト指数の推定値の推移

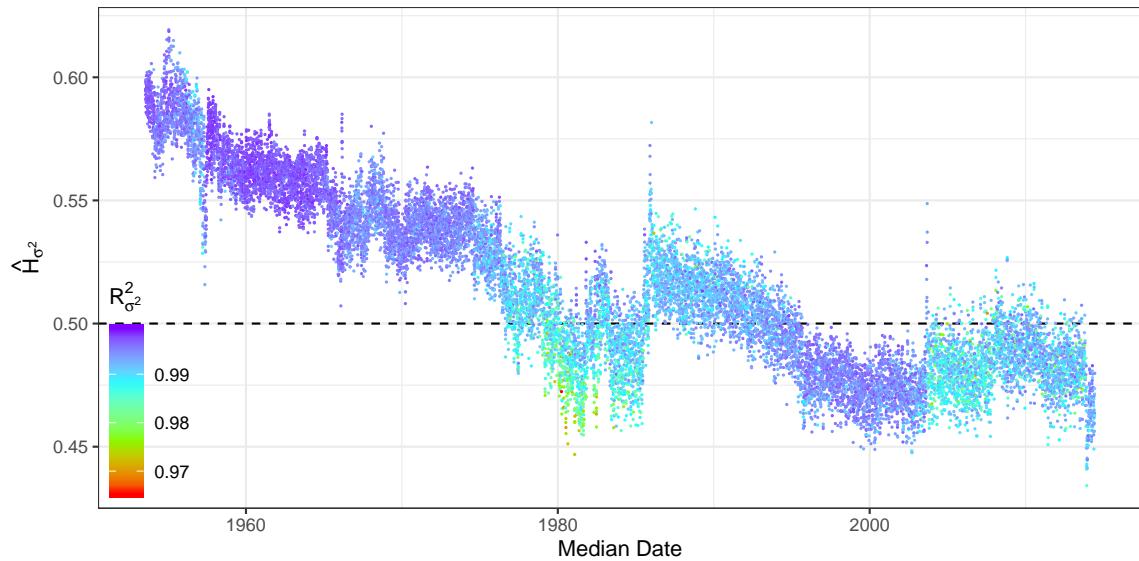


図 54 日経平均株価の分散に基づくハースト指数の推定値の推移

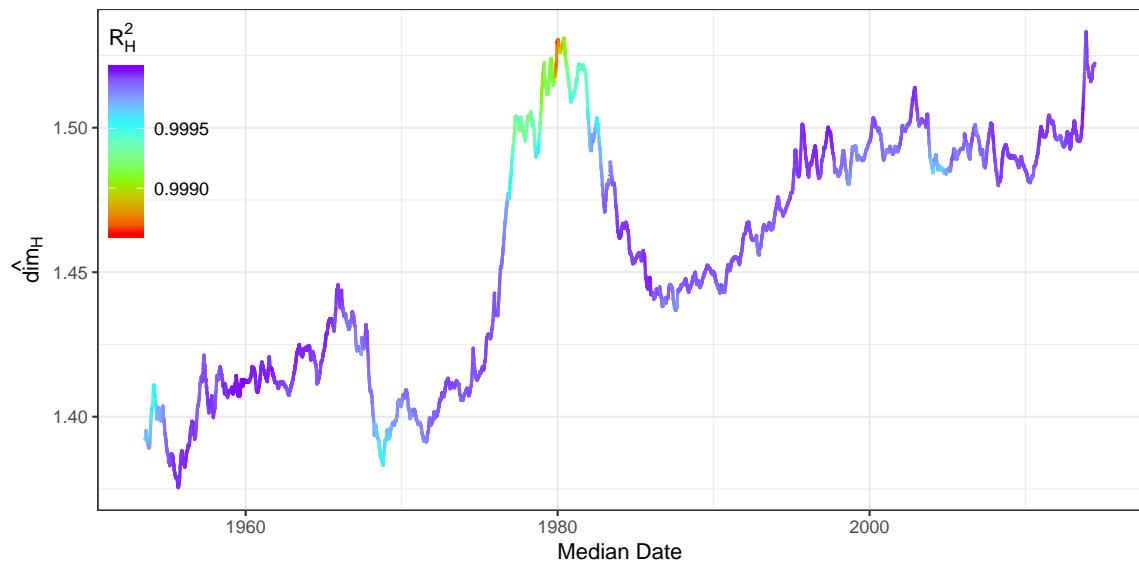


図 55 樋口法による日経平均株価のグラフの次元の推定値の推移

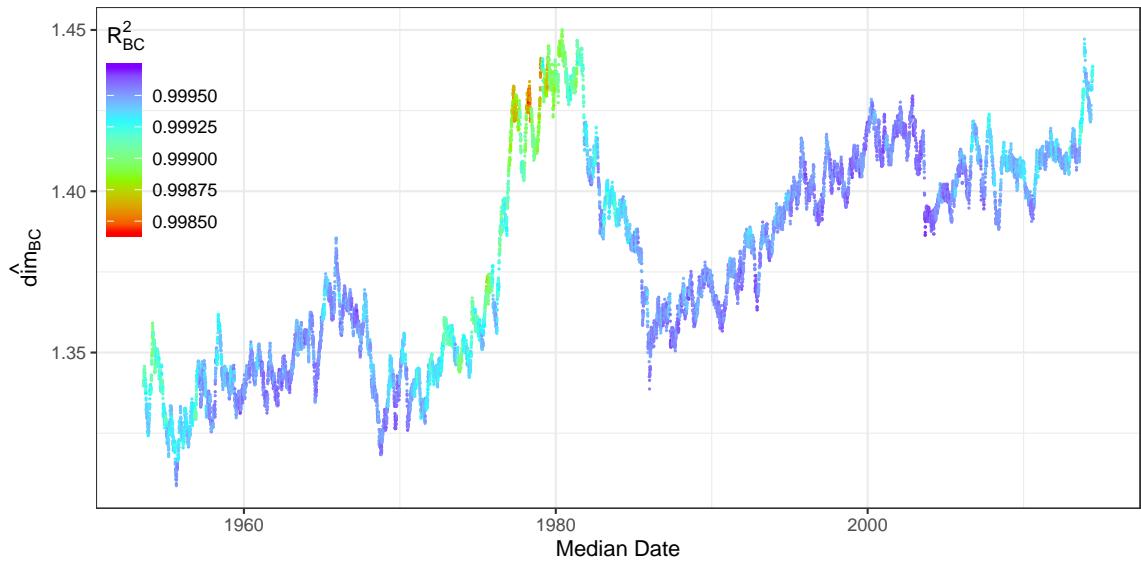


図 56 ボックスカウント法による日経平均株価のグラフの次元の推定値の推移

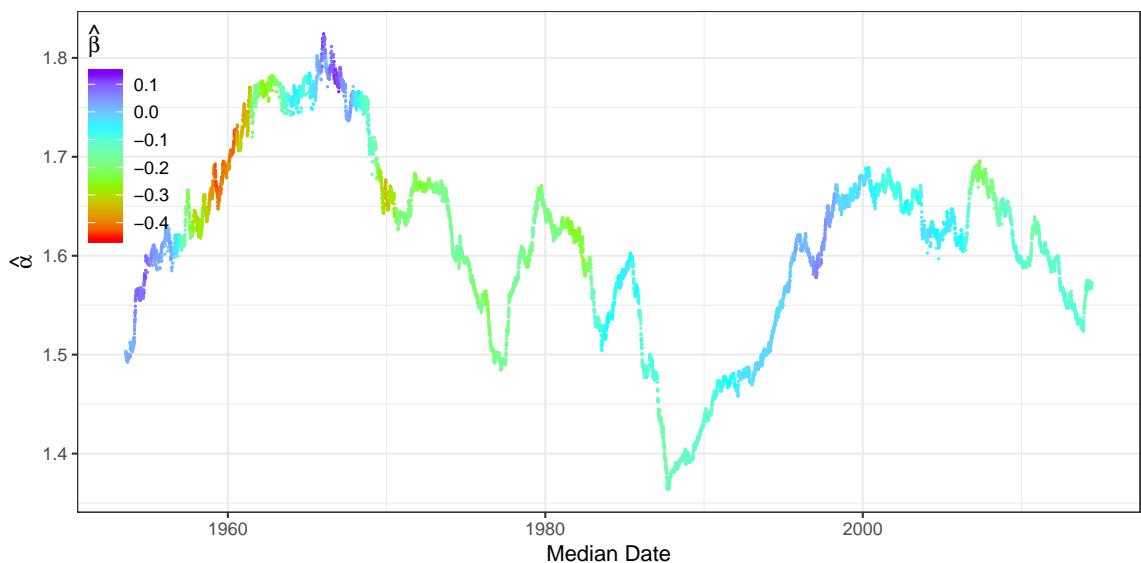


図 57 日経平均株価のパラメータ α の推定値の推移

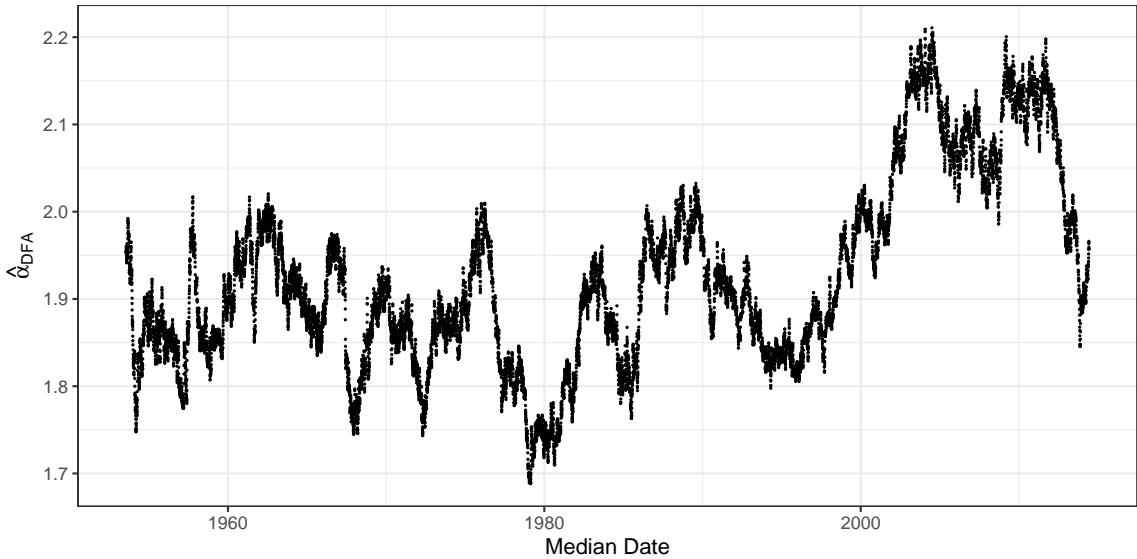


図 58 \hat{H}_{DFA} と $\hat{\dim}_H$ から計算される日経平均株価の α の推移

12 業種別日経平均を用いた分析

次に、業種別日経平均の各パラメータを推定する。日経平均株価に関する推定では各推定方法ごとに回帰分析の様子などを図で示してきたが、ここではその結果のみを示す。表 8 がその推定結果である。なお、比較のため最終行に日経平均株価に対する推定結果を載せたが、これは業種別日経平均と同じ期間、すなわち 1972 年 1 月 4 日から 2019 年 6 月 14 日までの 12321 個のデータを用いて推定したものであり、上に述べた推定結果とは異なる。

スクランブルテストの結果 p_{DFA} をみると、ほとんどの業種で十分大きい値であり、ハースト指数が $1/2$ ではないとは言い難い結果を示している。しかし、銀行、鉄道・バス、通信の 3 業種と日経平均株価だけは $p_{\text{DFA}} < 0.05$ である。いずれも DFA によるハースト指数の推定値は 0.55 から 0.60 程度と $1/2$ よりも大きく、長期記憶であることを示している。また、決定係数は十分大きく、回帰分析の対象範囲が不適切であることから生じた結果ではないことがわかる。日経平均株価のハースト指数が $1/2$ よりも大きいことはこれら 3 業種による影響であるように思われるが、これはそれほど明らかではない。そもそも、一般に確率過程 $X_1(t), X_2(t)$ がそれぞれスケーリング指数 s_1, s_2 の自己相似過程であり、互いに独立であるならば、それらの和 $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$ について $X(t) \stackrel{d}{=} t^{s_1} X_1(1) + t^{s_2} X_2(1)$ であるが、これが常に $t^s X(1) = t^s (X_1(1) + X_2(1))$ と同一の分布に従うような指数 s が存在するためには $s_1 = s_2$ でなければならないから、 $X(t)$ は必ずしも自己相似過程とはならない。もし $s_1 = s_2$ であり、さらに $X_1(t), X_2(t)$ がパラメータ α の等しい安定分布に従うならば、 $X(t)$ が自己相似過程であるといえるが、それは非常に限られた状況である。

グラフの次元の推定値はやはり樋口法による推定値がボックスカウント法による推定値よりも 0.05 ほど大きな値となっているが、いずれもハースト指数の推定値と強く相関しており、36 業種全体でみた DFA によるハースト指数の推定値と樋口法による次元の推定値の相関係数は -0.8089 となる。また、それらの和などの業種でも非常に 2 に近く、1.95 から 2.03 の間に含まれる。グラフの次元が $2 - H - 1/\alpha + 1/2$ であることから計算すれば、この結果は α が 1.8 以上であることを示唆する。ただし、樋口法による推定値は過大評価される傾向にあったため、実際には 1.8 よりも若干小さな α も許容されることになる。この樋口法によるグラフの次元と DFA によるハースト指数から計算される α が 1.9 を下回るような業種は商社、機械、自動車・自動車部品、電力、精密機器の 5 業種だけであり、少なくともこれらの業種に関しては $\alpha < 2$ であると考えることもできるが、反対に水産、鉄鋼業、その他輸送機器、空運、その他製造業、鉄道・バス、ガス、倉庫・運輸関連、通信の

9 業種では同様の方法で計算される α が 2 を上回るため、すなわち DFA によるハースト指数の推定値と樋口法によるグラフの次元の推定値の和が 2 を上回るため、これらの結果から $\alpha < 2$ であるとは判断し難い。しかし、それらの業種も含め、 α の推定値はグラフの次元とハースト指数から想定される値と大きく異なる。

実際、 α の推定値は 1.8 はおろか医薬品の 1.6158 が最大である。その中でも銀行と電力の推定値がとくに小さく、それぞれ 1.1614, 1.2944 であるが、このうち銀行はハースト指数の変動が激しい業種の一つでもある。図 59 から図 61 にはハースト指数とグラフの次元とパラメータ α の推定値の推移を示した。日経平均株価の場合と同様に、2521 個の標本からなる期間をデータの開始時点から 1 標本ずつ移動させながら推定したものであり、横軸はその期間の中間時点を示す。図 59 をみると、DFA による銀行のハースト指数の推定値は 1990 年以前に 0.6 を超えるほどに高い水準にあり、1990 年代後半に 0.5 を下回った後、2000 年以降には 0.5 に非常に近い水準を推移していることがわかる。なお、銀行は図 59 に示したハースト指数の推定値の分散が最も大きい。このハースト指数の激しい変動が α を過小評価させている一つの要因であると考えることができる。図 61 をみると、 α の推定値もハースト指数の推定値の変動が激しい時期に 1 を下回るほどに低下していることがわかる。 α の推定値が 1 を下回る例は 1980 年代前半の銀行においてのみである。しかし、同様にハースト指数の推定値の変動が激しい倉庫・運輸関連や通信、自動車・自動車部品における α の推定値は 1.5352, 1.5611, 1.5452 であり、むしろ全体の平均よりも大きい。しかも、そのハースト指数の変動がとくに激しい時期において α の推定値が低下する様子もほとんどみられない。したがって、これらの業種に関しては分布のスケール等がハースト指数以外の要因によって変動しているものと考えられる。

各パラメータの推定値の推移は業種ごとに大きく異なり、とくにハースト指数の推移は興味深い。変動の激しさの点でいえば、銀行や倉庫・運輸関連、通信、自動車・自動車部品等が大きく変動していたことと反対に、繊維や電気機器、石油、電力、陸運等の業種は比較的安定している。また、通信においては 1990 年代後半から 2000 年代前半にかけてハースト指数が上昇していることが特徴的であるが、これは IT バブルが影響していると考えられる。同様の傾向がサービス業や商社でも観察できる。典型的には対数株価の急激な上昇ないしは下落が生じたときにハースト指数が上昇しているようであるが、そのことを確認するために系列 $\{X_t\}$ をハースト指数の推定値によって色分けしたグラフを図 62 に示した。ただし、ハースト指数の変動と株価の変動のどちらが先に生じているのかを判断するために、横軸はハースト指数の推定に用いる期間の中間時点ではなく終了時点とした。つまり、各時点のハースト指数はそれよりも先のデータを使わずに推定された値である。通信におけるハースト指数のピークは 2000 年頃の暴落直後に生じていることがわかる。商社やサービス業等ほかの業種でも株価の暴落後にハースト指数が最大値に達していることが観察できる。しかし、とくに通信や商社等では暴落直前の株価が上昇し始める段階において既にハースト指数の上昇が始まっていることがわかる。それがその後の暴落につながるような危険な成長であることを示唆しているように思われる。大きなイベントの直後には投資視野の短い投資家が支配的になりハースト指数が低下するだろうと主張するフラクタル市場仮説とは一致しない結果ではあるが、このハースト指数が高いという状態は急激な上昇ないしは下落が連鎖的に生じやすい状況であることを意味しており、図 13 に示した非整数安定過程の見本関数のように、一度の大きな変動をきっかけに短期間で株価の水準が大きく変わってしまうという危険性をはらんでいることがわかる。また、図中の系列 $\{X_t\}$ の推移からはその様子が見分けづらいが、ハースト指数の変動が最も激しかった銀行においても 1990 年代の相次ぐ経営破綻よりも以前の段階から推定値が高い水準を推移しており、その頃の暴騰がそのような危険を伴うものであったことがわかる。

ちなみに、表 8 において日経平均株価に対する α の推定値は 1.2848 と上でみた結果よりも著しく小さいが、これは、図 57 からわかるように、推定される α が比較的大きい 1960 年代のデータが除外されているためである。また、表 8 においてハースト指数がとくに大きかった銀行、鉄道・バス、通信等の業種はいずれも継続的にハースト指数の水準が高かったわけではなく、図 59 のように、銀行や鉄道・バスであれば 1990 年代以前の、通信であれば 2000 年頃のハースト指数がとりわけ高かった時期の影響を強く受けたものである。ハースト指数の変動が安定している業種はどれも 1/2 付近を推移しているものであり、一定の高水準ないしは低水準を常に保っている業種はない。

表 8: 業種別日経平均の各パラメータの推定値

業種	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{H}_{DFA}	$\hat{H}_{R/S}$	\hat{H}_S	\hat{H}_{σ^2}	$\hat{d}\bar{m}_H$	$\hat{d}\bar{m}_{BC}$	$\hat{d}\bar{m}_{DFA}$	p_{DFA}	R_{DFA}^2	$R_{R/S}^2$	R_H^2	R_{BC}^2
水産	1.4830	0.1559	0.4857	0.5040	0.4526	0.4677	1.5144	1.4547	1.3400	0.6272	0.9887	0.9962	0.9999	0.9997
鉱業	1.5628	0.2219	0.4815	0.5075	0.5124	0.4882	1.5011	1.4401	1.3787	0.5198	0.9955	0.9979	0.9998	0.9996
建設	1.4685	0.1875	0.5203	0.5468	0.4792	0.4888	1.4723	1.4175	1.2988	0.4784	0.9905	0.9982	0.9997	0.9998
食品	1.5689	0.0319	0.5227	0.5397	0.4681	0.4984	1.4704	1.4197	1.3399	0.4336	0.9949	0.9970	1.0000	0.9997
繊維	1.5680	0.0562	0.5017	0.5338	0.4912	0.4925	1.4800	1.4228	1.3605	0.9521	0.9934	0.9953	1.0000	0.9997
パルプ・紙	1.5104	0.1485	0.4678	0.5204	0.4707	0.4638	1.5223	1.4459	1.3701	0.2637	0.9888	0.9928	0.9999	0.9997
化学工業	1.5128	-0.0563	0.4983	0.5301	0.4770	0.4922	1.4865	1.4322	1.3407	0.9532	0.9959	0.9972	0.9999	0.9995
医薬品	1.6158	0.1946	0.5052	0.5287	0.4648	0.4706	1.4947	1.4368	1.3759	0.8570	0.9911	0.9976	0.9999	0.9998
石油	1.5817	0.2243	0.4949	0.5244	0.4912	0.5036	1.4907	1.4327	1.3729	0.8619	0.9958	0.9980	0.9999	0.9996
ゴム	1.5580	0.0811	0.4761	0.5064	0.4731	0.4738	1.5238	1.4527	1.3820	0.4069	0.9960	0.9979	0.9999	0.9997
織業	1.5175	0.0150	0.5146	0.5326	0.4982	0.5164	1.4639	1.4190	1.3264	0.6133	0.9935	0.9952	0.9999	0.9996
鉄鋼業	1.5130	0.1064	0.5252	0.5467	0.5038	0.5055	1.4751	1.4180	1.3138	0.3780	0.9949	0.9976	1.0000	0.9998
非鉄金属および金属製品	1.5660	0.0041	0.5039	0.5236	0.4812	0.4990	1.4795	1.4273	1.3576	0.8950	0.9927	0.9951	0.9999	0.9995
機械	1.5012	0.0158	0.4864	0.5215	0.4747	0.4956	1.4758	1.4284	1.3475	0.6436	0.9917	0.9956	0.9999	0.9994
電気機器	1.5966	0.1430	0.5012	0.5310	0.4568	0.4987	1.4761	1.4284	1.3725	0.9681	0.9968	0.9964	0.9999	0.9995
造船	1.4589	0.1597	0.5129	0.5240	0.5011	0.5132	1.4641	1.4124	1.3017	0.6639	0.9933	0.9948	1.0000	0.9997
自動車・自動車部品	1.5452	0.0987	0.4657	0.5076	0.4544	0.4869	1.4982	1.4414	1.3871	0.2413	0.9793	0.9954	0.9999	0.9995
その他輸送機器	1.5543	0.0702	0.5086	0.5183	0.4782	0.4886	1.4942	1.4448	1.3481	0.7710	0.9940	0.9967	0.9999	0.9997
精密機器	1.6035	0.2204	0.4900	0.5074	0.4407	0.4888	1.4834	1.4388	1.3863	0.7297	0.9931	0.9955	0.9999	0.9995
その他製造業	1.5875	0.0438	0.5354	0.5520	0.4648	0.5017	1.4704	1.4215	1.3347	0.2186	0.9908	0.9934	0.9999	0.9998
商社	1.5291	0.0505	0.4969	0.5718	0.5147	0.5389	1.4549	1.4037	1.3492	0.9144	0.9629	0.9980	0.9998	0.9994
小売業	1.5007	0.0883	0.5382	0.5742	0.5144	0.5171	1.4516	1.3955	1.2955	0.1903	0.9958	0.9980	1.0000	0.9997
銀行	1.1614	0.0483	0.5639	0.5972	0.4839	0.5424	1.4241	1.3699	1.0750	0.0257	0.9918	0.9968	0.9999	0.9998
証券	1.4495	0.2048	0.5329	0.5624	0.5066	0.5327	1.4464	1.3962	1.2772	0.2565	0.9948	0.9960	0.9999	0.9997
保険	1.4178	0.1735	0.4839	0.5087	0.4472	0.4649	1.5038	1.4433	1.3108	0.5722	0.9915	0.9973	0.9999	0.9996

表8: (続き)

業種	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{H}_{DFA}	$\hat{H}_{R/S}$	\hat{H}_S	\hat{H}_{σ^2}	$\hat{d}\text{m}_H$	$\hat{d}\text{m}_{\text{BC}}$	$\hat{d}\text{m}_{\text{DFA}}$	p_{DFA}	R_{DFA}^2	$R_{R/S}^2$	R_{H}^2	R_{BC}^2
その他金融業	1.4793	0.0894	0.4985	0.5333	0.4625	0.5083	1.4780	1.4259	1.3255	0.9574	0.9950	0.9957	0.999	0.9996
不動産	1.4491	0.1771	0.5161	0.5297	0.4843	0.4973	1.4816	1.4292	1.2939	0.5727	0.9919	0.9972	1.0000	0.9997
鉄道・バス	1.4413	0.1445	0.5571	0.5757	0.4985	0.5199	1.4522	1.4055	1.2491	0.0469	0.9933	0.9977	0.9998	0.9999
陸運	1.5849	0.1637	0.4972	0.5301	0.4920	0.4902	1.4801	1.4293	1.3718	0.9203	0.9952	0.9953	0.999	0.9996
海運	1.5039	0.2345	0.4984	0.5216	0.4967	0.5075	1.4780	1.4272	1.3367	0.9580	0.9917	0.9966	1.0000	0.9997
空運	1.4080	0.0606	0.5419	0.5673	0.4721	0.5155	1.4616	1.4050	1.2479	0.1510	0.9862	0.9943	0.999	0.9998
倉庫・運輸関連	1.5352	0.1155	0.4991	0.4978	0.4701	0.4614	1.5163	1.4563	1.3495	0.9760	0.9903	0.9978	0.999	0.9997
通信	1.5611	0.1399	0.5907	0.5977	0.5335	0.5641	1.4349	1.3881	1.2687	0.0029	0.9952	0.9985	0.999	0.9998
電力	1.2944	0.0935	0.5187	0.5531	0.5068	0.5090	1.4481	1.3943	1.2087	0.5294	0.9938	0.9978	0.999	0.9998
ガス	1.5889	0.1079	0.5282	0.5452	0.5022	0.4827	1.4872	1.4243	1.3424	0.3346	0.9916	0.9977	0.999	0.9999
サービス業	1.5765	0.0884	0.5402	0.5657	0.4757	0.5279	1.4487	1.3983	1.3255	0.1609	0.9945	0.9978	0.999	0.9997
日経平均株価	1.2848	-0.0182	0.5582	0.5671	0.4992	0.5341	1.4497	1.4007	1.1634	0.0400	0.9899	0.9959	0.999	0.9997

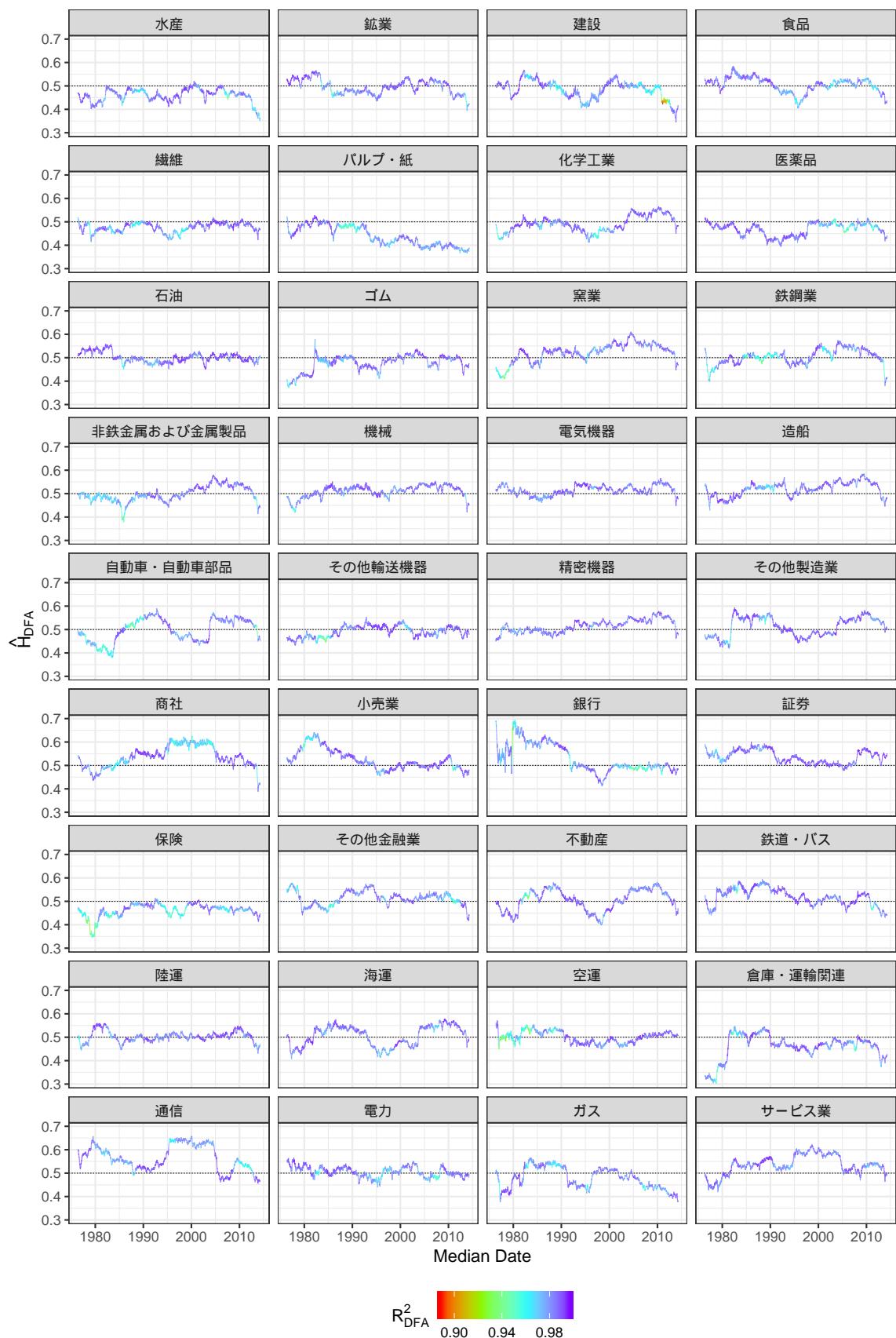


図 59 DFA による業種別日経平均のハースト指数の推定値の推移

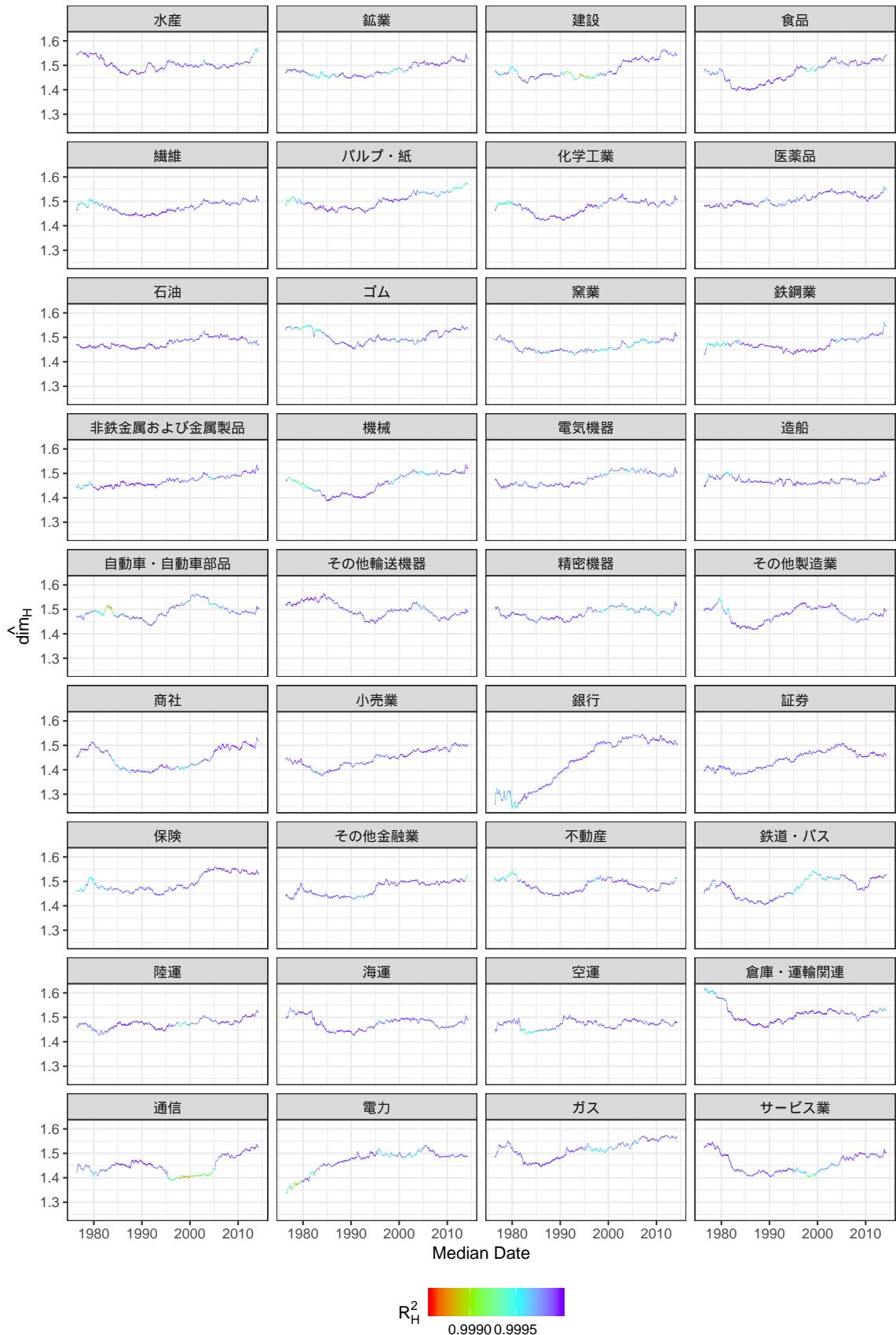


図 60 樋口法による業種別日経平均のグラフの次元の推定値の推移

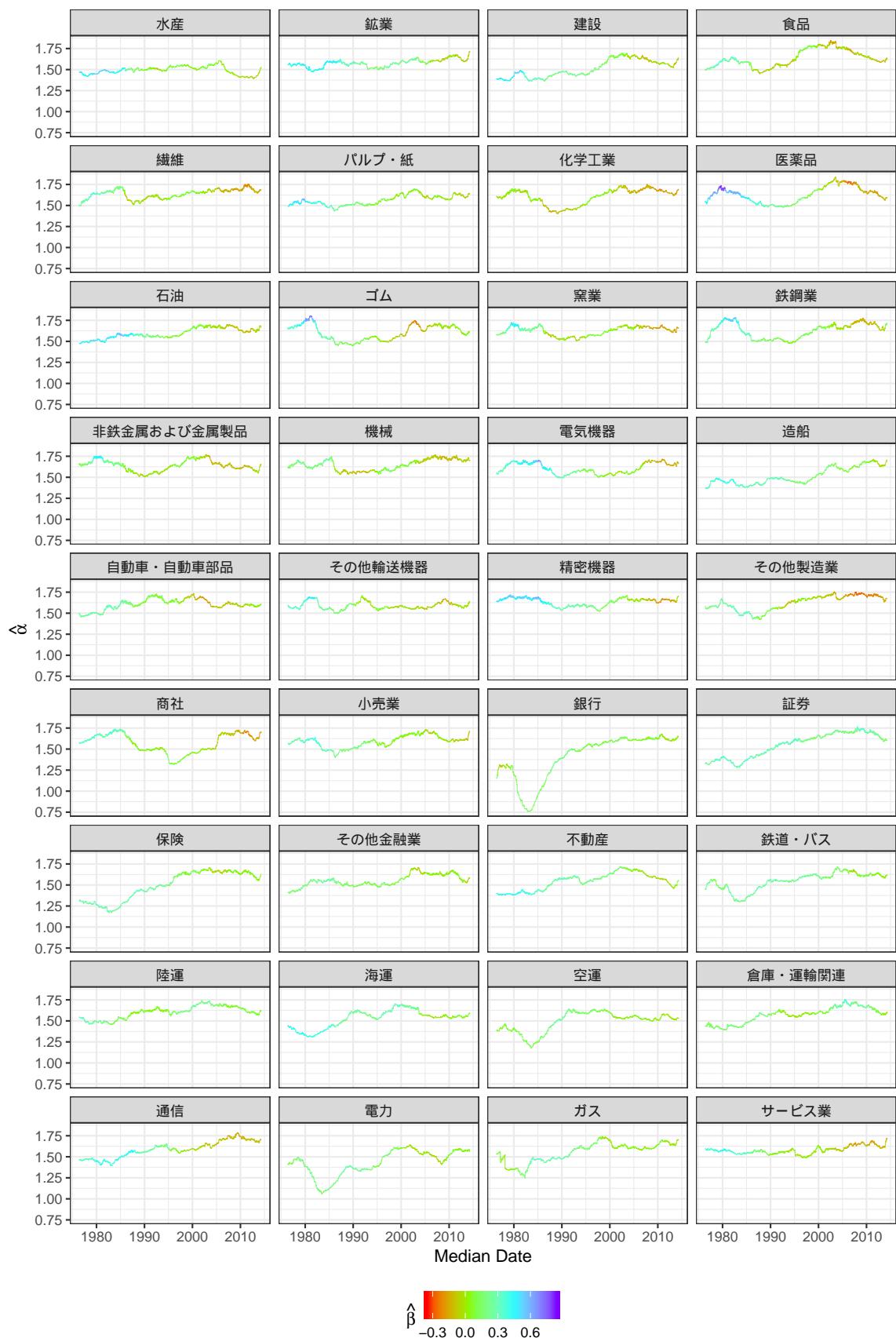


図 61 業種別日経平均のパラメータ α の推定値の推移

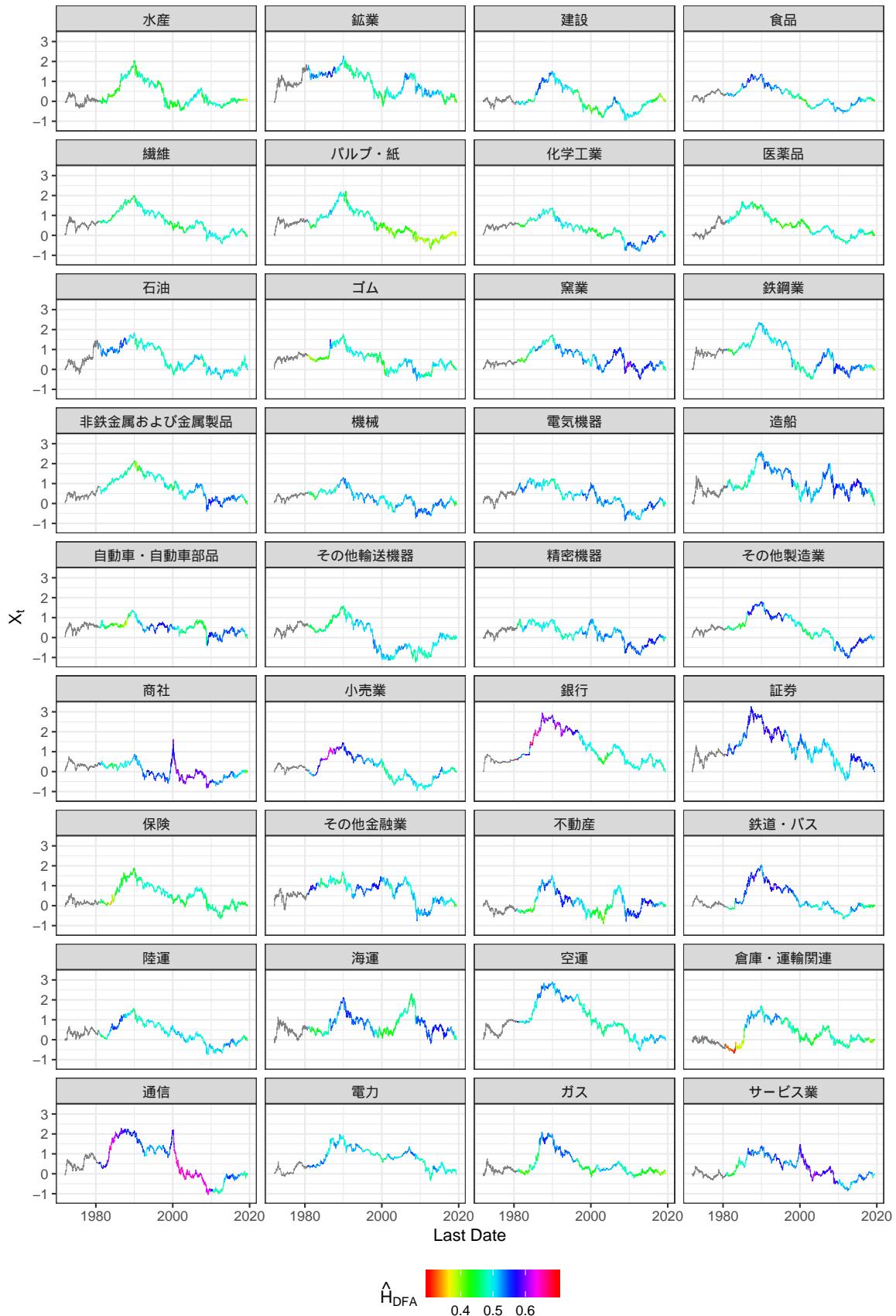


図 62 業種別日経平均の系列 $\{X_t\}$ とハースト指数の推定値

13 各国の株価指数を用いた分析

次に、各国の株価指数の各パラメータを推定する。業種別日経平均の場合と同様に、その結果のみを表9に示す。国による推定値の違いは業種別日経平均でみたときよりも大きく、とくにハースト指数は業種別日経平均の場合よりも幅広い値をとっている。表中の61カ国の中、20カ国はスクランブルテストの結果 p_{DFA} が0.05よりも小さく、ハースト指数が1/2であるとは言い難いケースが少なくない。それらのほとんどはいずれの推定方法においてもハースト指数の推定値が1/2よりも大きく、長期記憶を示す結果となっている。ただし、アイルランドとモロッコだけは、 $p_{DFA} < 0.05$ かつDFAによる推定値が1/2よりも大きいにもかかわらず、パワースペクトル密度に基づく推定値が1/2を下回っており、特殊な状況を示している。また、とくにハースト指数の推定値が大きな国はブルガリアであり、DFAによる推定値は0.7237であるが、これは2008年9月から同年11月にかけての連鎖的な暴落を反映したものであると考えられる。これは世界金融危機の影響であるが、同様の理由により株価が著しく下落したアイスランドもまたハースト指数が高い国の一例であり、DFAによる推定値はブルガリア、リトアニアに次いで3番目に大きい。市場規模の大きな中国においてもハースト指数の推定値が比較的大きくなっているが、中国の代表的な株価指数である上海総合指数は世界金融危機による暴落だけでなく、2006年頃や2014年後半頃等、連鎖的な暴騰や暴落が頻繁に生じており、これを反映した結果であると考えられる。一方で、同様に市場規模が大きいイギリスではハースト指数の推定値が極端に小さい。DFAとR/S分析と分散による推定では、61カ国の中で最小の推定値を記録しており、その水準は0.43程度である。さらに、 $p_{DFA} < 0.1$ かつDFAによる推定値が1/2を下回った国はイギリスだけである。ハースト指数が1/2よりも小さいため、対数増分に負の自己相関が生じていることになる。実際、イギリスの代表的な株価指数であるFTSE100は、変動幅は大きくないものの、世界金融危機も含めて激しく乱高下しており、短期的な傾向がほとんどみられない。これらの特徴を確認するために、中国の株価指数である上海総合指数とイギリスの株価指数であるFTSE100の実際の系列 $\{X_t\}$ を図63に示した。イギリスの場合は、とくに2010年代等、値が一定の水準を維持するような動きが目立つが、中国の場合は水準が大きく変動しており、継続的な暴落や暴騰が生じやすくなっていることがわかる。この特徴の違いがハースト指数の大きさの相違に現れている。

グラフの次元の推定値は、やはりハースト指数との関係が強い。DFAによるハースト指数の推定値と樋口法による次元の推定値の和が最も小さな国はスリランカであるが、それでもそれらの値は0.5872と1.3593であり和は1.9465である。これは非整数安定過程ならば α が $1/(2 - 1.9465 + 1/2) = 1.8067$ でなければならないことを示すが、 α の推定値は1.3619である。他のいずれの国においても α の推定値はハースト指数とグラフの次元の推定値から計算される値よりも小さく、分布のスケールが時間によって変動している可能性が考えられる。ハースト指数とグラフの次元から計算される α は2に近い値であることが多いが、スリランカのように2を明らかに下回る国もある。他にはチュニジアやモーリシャス、トルコ、アイスランド等がその例であり、DFAによるハースト指数の推定値と樋口法による次元の推定値から計算される α はそれぞれ1.8182、1.8914、1.9001、1.9102である。これらのうち、スリランカ、チュニジア、モーリシャス、アイスランドは表4において尖度が上位5位以内に入る国であり、 $\alpha < 2$ であることによってそのように大きな尖度が観測されているともいえる。ただし、尖度が494.925と著しく大きかったヨルダンは同様の方法で計算される α が2.0165であり、 $\alpha < 2$ を示す結果となっておらず、このように計算された α が観測された尖度の大きさを単純に反映したものではないことがわかる。そのことは表9の α の推定値でも同様であり、必ずしも観測された尖度が大きかった国ほど α が小さいというような結果にはなっていない。とくに尖度が最も大きかったアイスランドの α の推定値は1.4793であり、これは昇順で数えて27番目の水準である。

図64から図66には地図上でみた各国の株価指数のパラメータの推定値を示した。図64をみると、ハースト指数の推定値が比較的高い国が東ヨーロッパに多いことがわかる。表9からわかるように、DFAによるハースト指数の推定値が0.6を上回るような国は15カ国であるが、そのうちウクライナ、エストニア、クロアチア、ブルガリア、ラトビア、リトアニア、ルーマニアの7カ国がヨーロッパ東部に属している。その他にも、

インド, 韓国, 台湾, トルコ, 日本, フィリピン, 香港を除くアジアにおいて比較的ハースト指数が高い傾向にあり, いずれも DFA による推定値が 0.54 を上回っている. そして, グラフの次元の推定値はこれと対照的であり, 推定値が比較的大きな国は西ヨーロッパや北ヨーロッパ, 南北アメリカ等に集中している. 実際, 極口法によるグラフの次元の推定値が 1.5 を上回るような国は 12 カ国であるが, そのうちイギリス, オランダ, スイス, スウェーデン, スペイン, ドイツ, フィンランド, フランスの 8 カ国がヨーロッパ西部ないしは北部に位置している. これらの地理的な位置関係からもわかるように, グラフの次元が大きくハースト指数が小さい国は古くから証券市場が発達していた国に多い. たとえば, これらの他にも, インドはアジアの中では比較的ハースト指数が小さい部類に入るが, インドの証券取引所の歴史は日本よりも古く, 1875 年にはボンベイ証券取引所が設立されている. また, 南アフリカやブラジルの証券市場も長い歴史をもち, ヨハネスブルグ証券取引所は 1887 年に, サンパウロ証券・商品先物取引所は 1890 年に設立されている. 一方で, ヨーロッパでハースト指数が 0.6 を上回っていた上記の 7 カ国はいずれも証券取引所が 1990 年代以降に設立されたか, あるいは冷戦時に取引が停止されていた国々である. たとえば, クロアチアのザグレブ証券取引所やブルガリアのブルガリア証券取引所はそれぞれ 1907 年と 1914 年に設立されたが, 1945 年, 1947 年には取引を停止し, それが再開されたのはいずれも 1991 年のことである⁴². また, DFA によるハースト指数の推定値の下位 3 カ国はイギリス, ドイツ, フランスであり, いずれも推定値が $1/2$ を下回っているが, これらは世界有数の長い歴史をもつ証券取引所がある国々である. 業種別日経平均でみたように, ハースト指数は重大な影響を及ぼすイベントの前後に一時的に上昇する傾向があったが, それと同時に, ある程度発達した市場においては低い水準を記録する傾向にあるようである. ハースト指数の水準が低いことは, 発生したイベントの影響が長期間にわたって少しずつ生じるのではなく, 短期間のうちに大部分が価格に反映されることを意味する. また, 表 7 でみたように, 日経平均株価のハースト指数は 1970 年頃まで比較的高い水準にあり, それ以降 0.5 程度にまで低下してきたが, それもこの傾向を反映しているということができる.

⁴² ザグレブ証券取引所の歴史については「About ZSE (Zagreb Stock Exchange, <https://zse.hr/default.aspx?id=64274>)」より. ブルガリア証券取引所の歴史については「About BSE (Bulgarian Stock Exchange, <https://www.bse-sofia.bg/en/history>)」より.

表 9: 各国の株価指数の各パラメータの推定値

国	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{H}_{DFA}	$\hat{H}_{R/S}$	\hat{H}_S	\hat{H}_{σ^2}	$\hat{\dim}_H$	$\hat{\dim}_{BC}$	$\hat{\dim}_{DFA}$	p_{DFA}	R_{DFA}^2	$R_{R/S}^2$	R_H^2	R_{BC}^2
アイスランド	1.4793	-0.0290	0.6823	0.6495	0.5543	0.6021	1.2942	1.2475	1.1417	0.0020	0.9782	0.9968	0.9986	0.9996
アイルランド	1.5191	-0.1464	0.6009	0.5990	0.4695	0.5127	1.4619	1.3870	1.2408	0.0119	0.9764	0.9905	0.9995	0.9998
アメリカ	1.3679	-0.1186	0.4900	0.5237	0.4698	0.4534	1.5341	1.4391	1.2790	0.7797	0.9868	0.9948	1.0000	0.9996
アラブ首長国連邦	1.3886	-0.0144	0.6360	0.6092	0.5495	0.5893	1.3907	1.3323	1.1438	0.0008	0.9903	0.9960	0.9998	0.9997
アルゼンチン	1.4986	-0.0603	0.5070	0.5439	0.5229	0.4896	1.4853	1.4189	1.3257	0.8587	0.9926	0.9962	0.9999	0.9995
イギリス	1.4867	-0.0571	0.4308	0.4725	0.4295	0.4358	1.5591	1.4632	1.3966	0.0810	0.9815	0.9936	0.9999	0.9996
イスラエル	1.5135	-0.0646	0.5429	0.5573	0.5241	0.5194	1.4642	1.3991	1.2964	0.2720	0.9871	0.9958	0.9999	0.9996
イタリア	1.4745	-0.1081	0.5022	0.5416	0.4760	0.4868	1.4982	1.4245	1.3197	0.9563	0.9891	0.9959	0.9999	0.9997
インド	1.5554	-0.1120	0.5323	0.5445	0.5068	0.5146	1.4667	1.4106	1.3248	0.4093	0.9844	0.9961	0.9999	0.9994
インドネシア	1.4966	-0.1441	0.5620	0.5625	0.5051	0.5373	1.4406	1.3851	1.2698	0.1190	0.9847	0.9958	0.9997	0.9994
ウクライナ	1.2672	0.0046	0.6802	0.6558	0.6324	0.6431	1.3164	1.2772	1.0307	0.0000	0.9945	0.9945	0.9998	0.9995
エストニア	1.3187	0.0319	0.6408	0.6655	0.6358	0.6239	1.3536	1.3009	1.1008	0.0006	0.9830	0.9980	0.9999	0.9996
オーストリア	1.5555	-0.1637	0.5155	0.5339	0.4918	0.4872	1.5054	1.4313	1.3417	0.6895	0.9809	0.9975	0.9999	0.9996
オーストリア	1.5668	-0.2530	0.5908	0.5838	0.5144	0.5374	1.4370	1.3753	1.2709	0.0238	0.9906	0.9961	0.9995	0.9998
オマーン	1.4066	0.0275	0.6446	0.6317	0.5482	0.6051	1.3424	1.2865	1.1445	0.0001	0.9826	0.9947	0.9996	0.9996
オランダ	1.4473	-0.0983	0.5059	0.5282	0.4611	0.5074	1.5145	1.4300	1.3031	0.8812	0.9856	0.9972	1.0000	0.9996
カタール	1.3048	0.0075	0.5719	0.5819	0.5389	0.5595	1.4103	1.3564	1.1617	0.0734	0.9910	0.9955	0.9999	0.9994
カナダ	1.4738	-0.2188	0.5103	0.5386	0.4693	0.4951	1.4919	1.4136	1.3112	0.8001	0.9830	0.9853	0.9999	0.9995
韓国	1.4468	-0.1052	0.4868	0.5340	0.4969	0.4854	1.4943	1.4228	1.3220	0.7419	0.9892	0.9954	0.9999	0.9996
クロアチア	1.4037	0.0347	0.6372	0.6295	0.6080	0.6238	1.3781	1.3234	1.1503	0.0006	0.9910	0.9978	0.9999	0.9994
サウジアラビア	1.2607	-0.1261	0.5747	0.5928	0.5974	0.5412	1.4111	1.3425	1.1321	0.6224	0.9849	0.9861	1.0000	0.9997
シンガポール	1.4986	-0.0305	0.5560	0.5841	0.5329	0.5348	1.4543	1.3839	1.2767	0.1588	0.9755	0.9923	0.9999	0.9994
イスズ	1.5321	-0.1372	0.4840	0.5402	0.4034	0.4509	1.5139	1.4165	1.3633	0.6816	0.9813	0.9928	0.9997	0.9997
スウェーデン	1.5037	-0.1042	0.4810	0.5232	0.4578	0.4782	1.5204	1.4407	1.3539	0.6262	0.9804	0.9914	0.9998	0.9997
スペイン	1.4780	-0.1192	0.4863	0.5126	0.4544	0.4634	1.5094	1.4300	1.3372	0.7290	0.9876	0.9965	0.9999	0.9996

表9: (続き)

国	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{H}_{DFA}	$\hat{H}_{R/S}$	\hat{H}_S	\hat{H}_{σ^2}	\hat{d}_{mH}	\hat{d}_{mBC}	\hat{d}_{mDFA}	p_{DFA}	R_{DFA}^2	$R_{R/S}^2$	R_{H}^2	R_{BC}^2
スリランカ	1.3619	0.1186	0.5872	0.5947	0.5763	0.5708	1.3593	1.3100	1.1786	0.0308	0.9911	0.9974	0.9999	0.9994
タイ王国	1.5232	-0.0616	0.5527	0.5834	0.4890	0.5362	1.4508	1.3984	1.2907	0.1853	0.9844	0.9973	0.9999	0.9992
台湾	1.4639	-0.1326	0.4950	0.5177	0.4744	0.5108	1.4890	1.4202	1.3219	0.8999	0.9608	0.9931	1.0000	0.9994
チエコ	1.5131	-0.1232	0.5626	0.5548	0.5315	0.5273	1.4578	1.3853	1.2765	0.1071	0.9858	0.9976	0.9998	0.9996
中国	1.4326	-0.0273	0.5894	0.6152	0.5002	0.5549	1.4175	1.3659	1.2125	0.0261	0.9793	0.9938	0.9998	0.9996
チュニジア	1.5377	0.1534	0.5968	0.5990	0.5440	0.5373	1.3532	1.2925	1.2528	0.0243	0.9928	0.9959	1.0000	0.9996
チリ	1.6306	-0.0544	0.5284	0.5638	0.4847	0.5080	1.4586	1.3871	1.3584	0.4725	0.9920	0.9965	0.9999	0.9995
デンマーク	1.5238	-0.0712	0.5348	0.5668	0.4875	0.5088	1.4794	1.4044	1.3089	0.3825	0.9861	0.9952	0.9997	0.9996
ドイツ	1.4348	-0.0917	0.4671	0.5294	0.4325	0.4708	1.5143	1.4316	1.3359	0.4171	0.9836	0.9927	1.0000	0.9997
トルコ	1.6186	-0.0885	0.4888	0.5094	0.5046	0.4907	1.4849	1.4234	1.3934	0.7723	0.9921	0.9958	1.0000	0.9994
日本	1.5747	-0.1374	0.5155	0.5045	0.4651	0.4841	1.4959	1.4279	1.3495	0.6972	0.9944	0.9971	0.9999	0.9997
ニュージーランド	1.6728	-0.2440	0.5639	0.5568	0.5502	0.5284	1.4578	1.4003	1.3383	0.1100	0.9884	0.9953	1.0000	0.9995
ノルウェー	1.5130	-0.1155	0.5298	0.5549	0.4926	0.5195	1.4931	1.4127	1.3093	0.4468	0.9844	0.9905	0.9999	0.9995
パキスタン	1.4133	-0.1192	0.5661	0.6063	0.5839	0.5702	1.4252	1.3512	1.2264	0.0949	0.9892	0.9932	0.9999	0.9994
ハンガリー	1.6032	-0.0522	0.5480	0.5618	0.5192	0.5271	1.4794	1.4041	1.3282	0.2313	0.9870	0.9957	0.9999	0.9995
フィリピン	1.6726	0.0001	0.5178	0.5493	0.4556	0.5098	1.4764	1.4051	1.3843	0.6474	0.9834	0.9927	0.9999	0.9996
フィンランド	1.5666	-0.1055	0.5224	0.5484	0.4583	0.4851	1.5007	1.4303	1.3393	0.5724	0.9808	0.9926	0.9999	0.9997
ブラジル	1.6672	-0.1703	0.5225	0.5465	0.4499	0.4911	1.4861	1.4156	1.3777	0.5670	0.9916	0.9985	0.9999	0.9995
フランス	1.4931	-0.0938	0.4777	0.5060	0.4111	0.4525	1.5351	1.4530	1.3526	0.5799	0.9880	0.9950	0.9999	0.9997
ブルガリア	1.3820	0.0029	0.7237	0.7110	0.6535	0.6656	1.3032	1.2603	1.0528	0.0000	0.9898	0.9949	0.9992	0.9997
ベトナム	1.3604	0.0283	0.6086	0.6163	0.6621	0.6243	1.3872	1.3354	1.1563	0.0063	0.9811	0.9955	1.0000	0.9992
ペルー	1.4476	0.0335	0.6419	0.6491	0.6198	0.6028	1.3476	1.3127	1.1673	0.0004	0.9923	0.9981	0.9996	0.9994
ベルギー	1.4839	-0.0984	0.5514	0.5790	0.4640	0.5058	1.4878	1.3966	1.2747	0.1974	0.9834	0.9954	0.9998	0.9997
ポーランド	1.5909	-0.0123	0.5219	0.5379	0.4867	0.4763	1.5068	1.4324	1.3496	0.5876	0.9834	0.9965	0.9999	0.9996
ポルトガル	1.4918	-0.1028	0.5403	0.5486	0.5038	0.5170	1.4411	1.3891	1.2894	0.3034	0.9892	0.9953	0.9998	0.9996

表9: (続き)

国	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{H}_{DFA}	$\hat{H}_{R/S}$	\hat{H}_S	\hat{H}_{σ^2}	$\hat{\dim}_H$	$\hat{\dim}_{BC}$	$\hat{\dim}_{DFA}$	p_{DFA}	R_{DFA}^2	$R_{R/S}^2$	R_H^2	R_{BC}^2
香港	1.4916	-0.1082	0.4960	0.5478	0.4890	0.5040	1.4819	1.4089	1.3336	0.9222	0.9794	0.9942	0.9999	0.9995
マレーシア	1.4961	-0.0291	0.5511	0.5538	0.5032	0.5457	1.4431	1.3869	1.2805	0.1951	0.9792	0.9954	1.0000	0.9993
南アフリカ	1.6416	-0.1562	0.5013	0.5300	0.4330	0.4659	1.5318	1.4487	1.3895	0.9698	0.9847	0.9942	0.9998	0.9996
メキシコ	1.5523	-0.1455	0.5253	0.5518	0.4473	0.4704	1.4876	1.4122	1.3305	0.5196	0.9776	0.9932	0.9999	0.9995
モーリシャス	1.3512	0.1595	0.6574	0.6558	0.5862	0.6350	1.3139	1.2717	1.1025	0.0001	0.9828	0.9964	0.9998	0.9995
モロッコ	1.4835	0.0496	0.5933	0.6207	0.4810	0.5584	1.3997	1.3376	1.2327	0.0200	0.9860	0.9928	0.9999	0.9995
ヨルダン	1.3583	0.0333	0.6200	0.5573	0.5106	0.5054	1.3841	1.3288	1.1437	0.0054	0.9825	0.9935	0.9996	0.9993
ラトビア	1.4021	0.0214	0.6440	0.6563	0.5952	0.5681	1.3922	1.3335	1.1427	0.0005	0.9857	0.9950	0.9990	0.9998
リトニア	1.3589	0.0090	0.6973	0.6745	0.6515	0.6722	1.3229	1.2846	1.0668	0.0000	0.9905	0.9973	0.9998	0.9994
ルーマニア	1.4036	0.0230	0.6096	0.6002	0.5427	0.5944	1.4062	1.3437	1.1779	0.0057	0.9862	0.9971	0.9999	0.9996
ロシア	1.5658	-0.1859	0.5604	0.5443	0.5688	0.5440	1.4600	1.3961	1.3009	0.1270	0.9906	0.9978	1.0000	0.9994

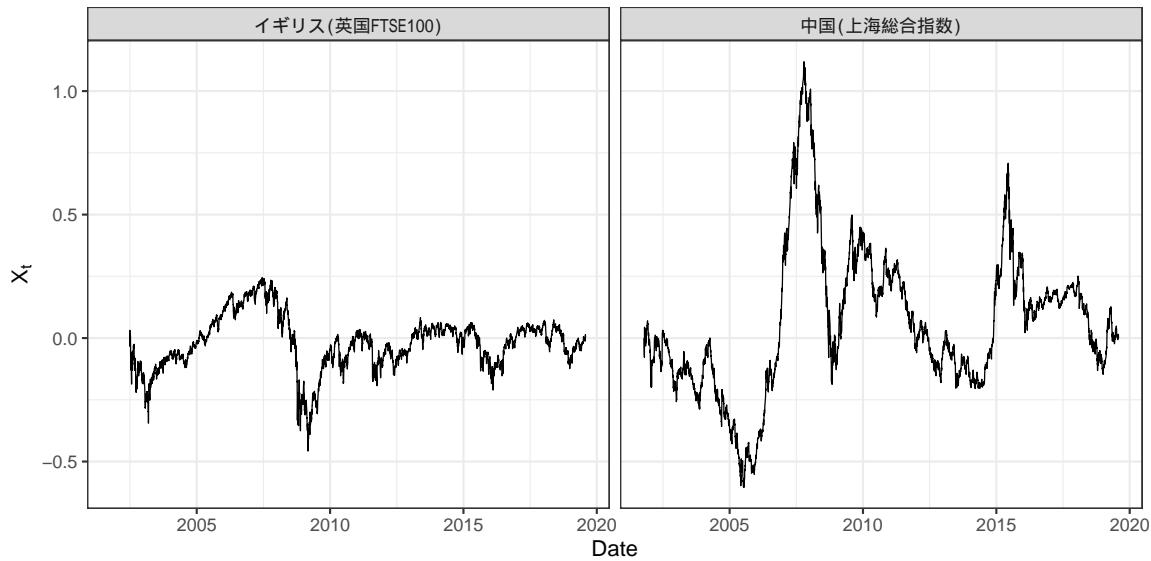


図 63 イギリスの株価指数（FTSE100）と中国の株価指数（上海総合指数）の系列 $\{X_t\}$

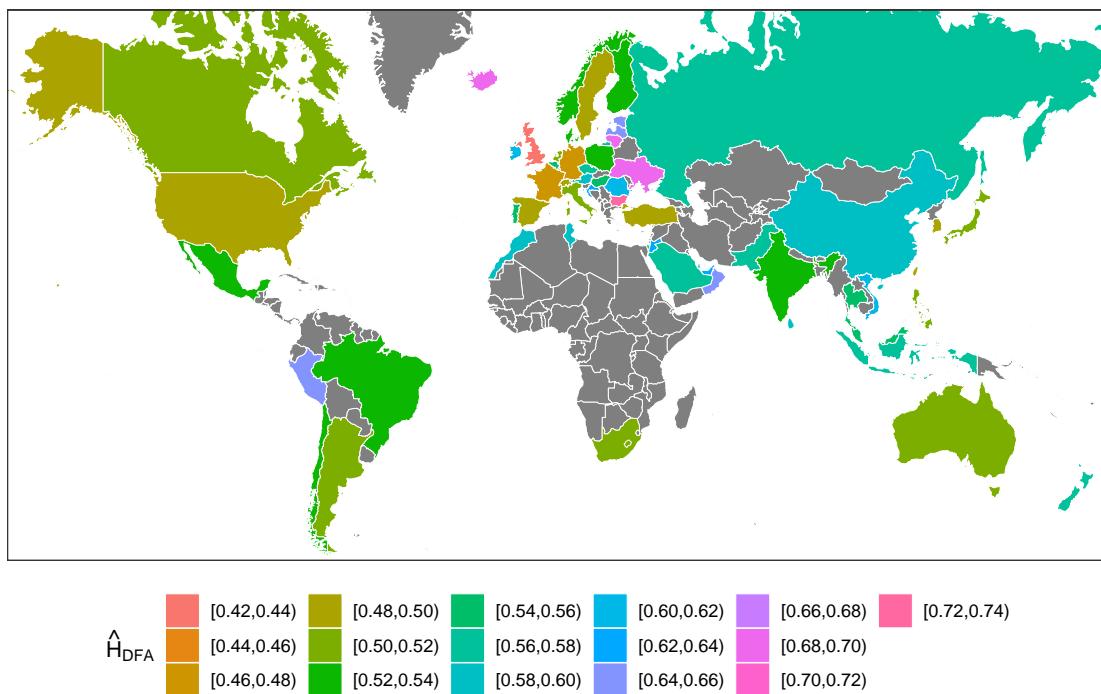


図 64 DFA による各国の株価指数のハースト指数の推定値

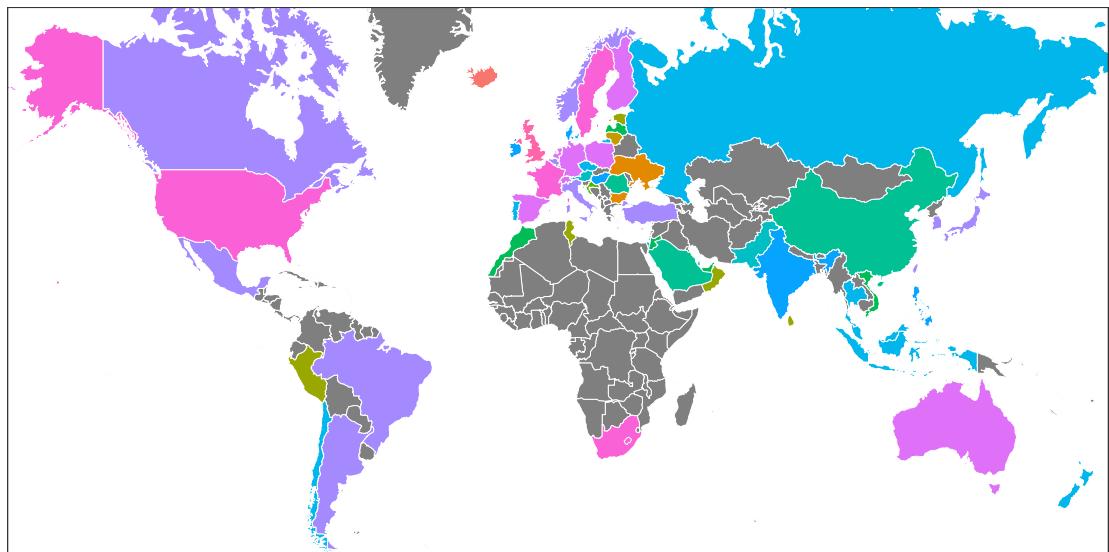


図 65 樋口法による各国の株価指数のグラフの次元の推定値

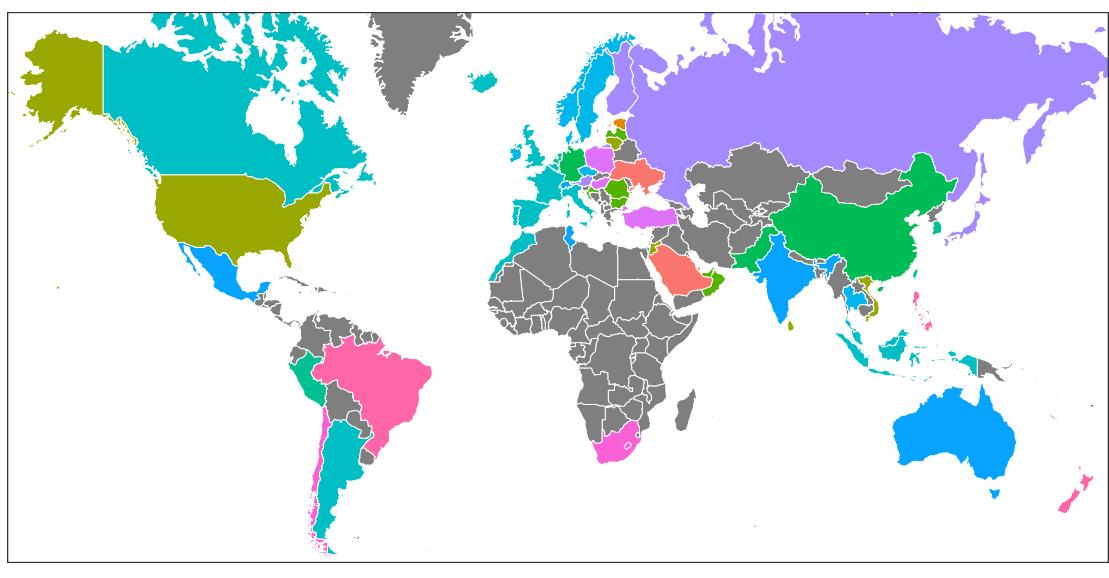


図 66 各国の株価指数のパラメータ α の推定値

14 秒間隔データを用いた分析

最後に、TOPIX の秒間隔データを用いたパラメータの推定を行う。上に述べたように、秒間隔データは大量のデータが利用できる反面、前場と後場の間あるいは翌日までの間に大きなラグが生じるため、とくに今回のように自己相関を考える場合にはすべてのデータを結合することができない。したがって、日ごとに推定を行うことにしたが、その結果、各推定方法に対して 4350 個の推定値が得られる。これをすべて数値として書き出すことは現実的でないため、重要な推定値のみを図によって示すことにする。すなわち、図 67 の DFA によるハースト指数の推定値の推移と図 68 の樋口法によるグラフの次元の推定値の推移である。上述のように、TOPIX は小数点以下第 3 位を四捨五入して算出されるため、秒間隔データに対してその対数増分は非常に離散的な値をとることになってしまう。これによって α の推定が正しく行えなくなるため、その推定値は示していない。

ハースト指数とグラフの次元のいずれの推定値も前場と後場による大きな違いはみられない。前場後場とともに、ハースト指数は 2013 年頃までは 0.5 付近を推移していたが、それ以降は 0.55 程度を中心に推移している。一方で、グラフの次元は 2014 年頃までは 1.4 から 1.5 程度を中心に大きな変動を伴いながら推移していたが、それ以降は 1.3 程度を中心に比較的安定的に推移している。これらのおおまかな水準の変動は対照的であるが、グラフの次元のほうが明確な変動を示している。とくに 2014 年中盤以前と以後とで変動の仕方が大きく異なる点は最も注目に値する。具体的には 2014 年 7 月 18 日が境界となっており、それ以前のグラフの次元の推定値の平均は 1.4553 であるが、翌取引日である 2014 年 7 月 22 日以降での平均は 1.3185 である。また、推定値の標準偏差もそれぞれ 0.0751 と 0.0304 であり、大きく異なる。グラフの次元の水準が低下したことは、TOPIX がより滑らかに変動するようになったことを示す。それは自己相関を生じさせるようなハースト指数の上昇が原因であるともいえるが、急激な変動を頻繁に生じさせるような α の低下が生じたためだと考えることもできる。図 67 からハースト指数の上昇は確認できるが、実はその上昇幅よりもグラフの次元の低下幅が大きく、 α の低下が伴っているものと考えられる。実際にハースト指数の推定値とグラフの次元の推定値から計算される α の推移を図 69 に示した。図中ではその α を $\hat{\alpha}_{\text{DFA}}$ と表している。確かに同じ頃を境界にその水準が著しく低下していることがわかる。しかし、TOPIX の算出要領や提供間隔、立会時間等の変更を含め、このような影響を与えることが想像される具体的なイベントは明らかではない。さらに、これ以降のハースト指数の推定値は 0.55 程度と比較的高い水準を推移しているが、図 51 等でみた日経平均株価の最近のハースト指数は、0.5 程度かそれを下回る水準であった。対象の系列や期間の相違による部分もあるが、同じ期間内であっても 1 日内の短い間隔だけでみたハースト指数と日を跨ぐような長い間隔だけでみたハースト指数とが異なるということは、自己相関構造がある間隔を境に変化していることを意味する。

ハースト指数の推定値は 0.2 程度の広い幅をもって極めて不規則に変動しているが、図 70 には参考として DFA によるハースト指数の推定値が最大値を記録した日と最小値を記録した日の系列 $\{X_i\}$ を示した。それぞれ 2010 年 9 月 15 日の前場と 2010 年 12 月 24 日の後場であり、ハースト指数の推定値は 0.7015, 0.2609 である。明らかに前者の変動には短期的な傾向が強くみられ、後者の変動は直前の変動と反対の動きをする様子が目立つ。同じ株価指数のたかが 100 日後の推移であるとは思えないほど、その様相が大きく異なっている。ちなみに、2010 年 9 月 15 日には為替介入が実施されており、ハースト指数が 3 番目に大きかった 2011 年 10 月 31 日には過去最大規模の為替介入が行われている⁴³。業種別日経平均の結果からも観察されたように、ハースト指数がとくに高い時期には、このように影響が波及的に広がる大きなイベントが生じており、株価の変動に自己相関を与えているものと考えられる。一方で、2010 年 12 月 24 日にはとくに目立ったイベントが生じていないと思われるが、全体的な傾向としてハースト指数が低い日は 12 月と 1 月に多いという特徴がみられる。実際、ハースト指数の推定値が 0.4 を下回るようなケースは前場と後場を別々に数えて合計 57 回存在し

⁴³ 外国為替平衡操作の実施状況（財務省、<https://www.mof.go.jp/international-policy/reference/feio/index.htm>）より。

たが、そのうち 22 回が 12 月、8 回が 1 月であり、半分以上が 12 月または 1 月となっている。このことはグラフの次元でも顕著にみられ、その推定値が 1.6 を上回ったケースは 76 回あるが、そのうちの約 63% にあたる 48 回が 12 月または 1 月に生じている。反対に 4 月から 10 月の間ではわずか 2 回しか生じていない。もっとも、2016 年 5 月 24 日の前場にハースト指数の推定値が 0.3987 を記録した例外を除けば、ハースト指数の推定値が 0.4 を下回るか、あるいはグラフの次元の推定値が 1.6 を上回るようなケースは 2013 年以前にしか生じていない。

ちなみに、図 39 でみたように、TOPIX が変動しない確率から推定されたスケーリング指数は 0.7 程度であったが、 $2 - 0.7 = 1.3$ であるからこの水準は 2014 年中盤以降のグラフの次元から推定されるスケーリング指数に近いといえる。一方で、それ以前の時期では、グラフの次元が 1.3 よりも大きな水準をとっているため、スケーリング指数は 0.7 よりも小さいことになる。

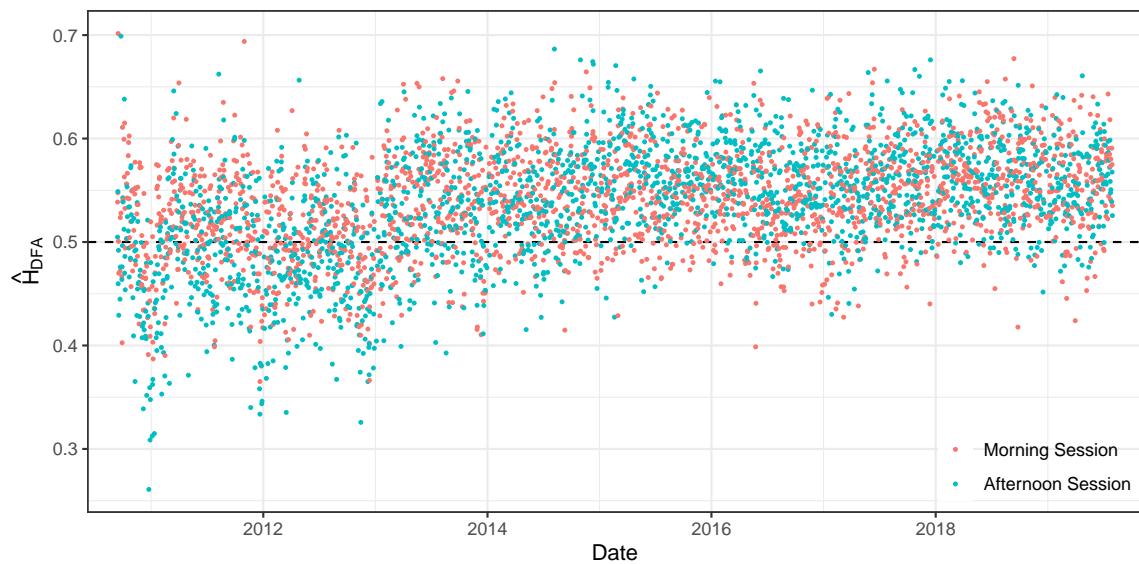


図 67 DFA による秒間隔データのハースト指数の推定値の推移

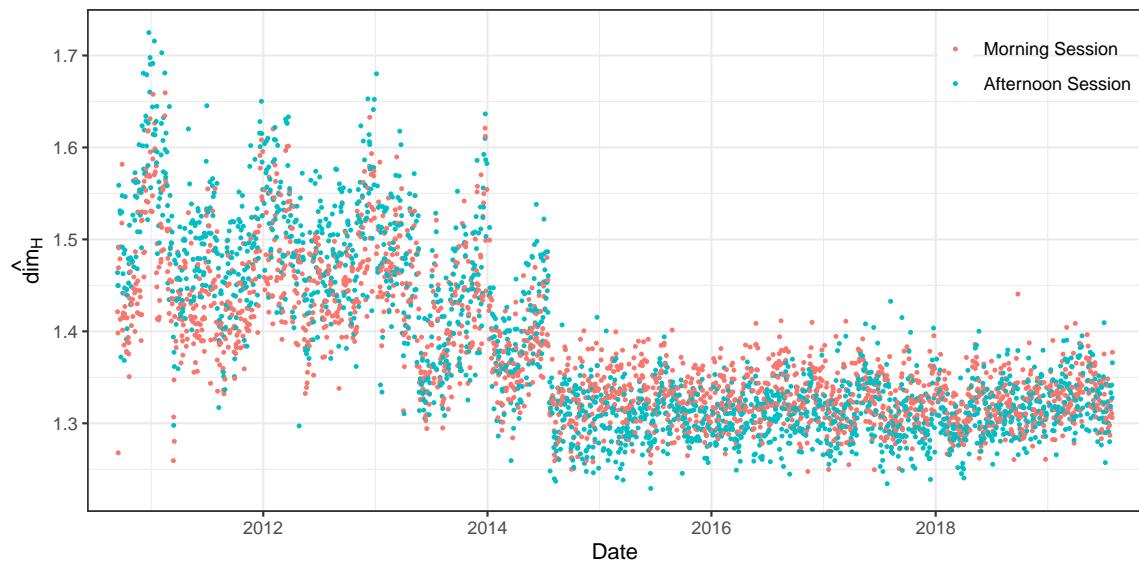


図 68 樋口法による秒間隔データのグラフの次元の推定値の推移

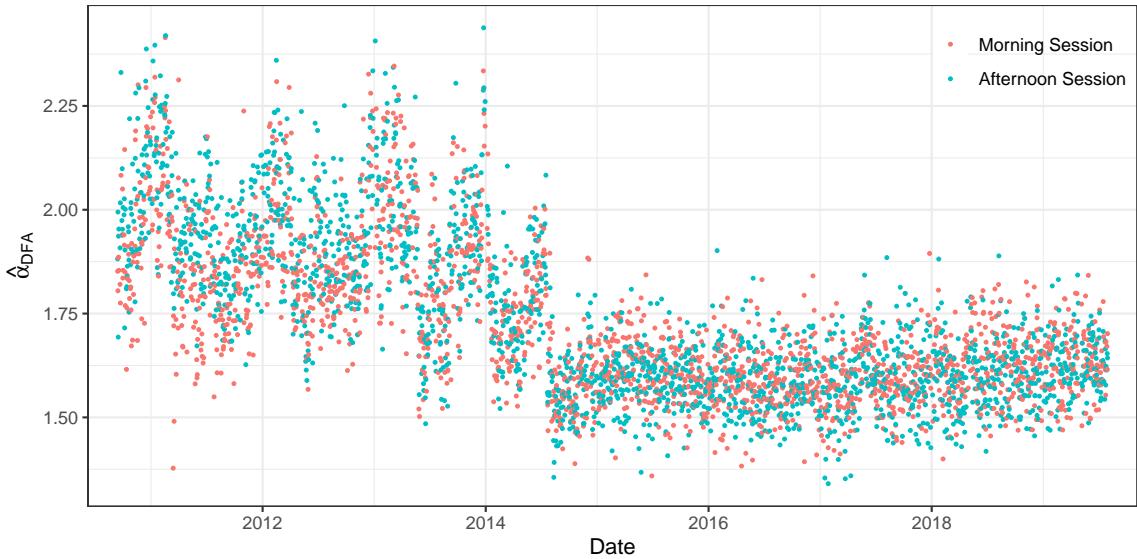


図 69 \hat{H}_{DFA} と $\hat{\dim}_H$ から計算される α の推移

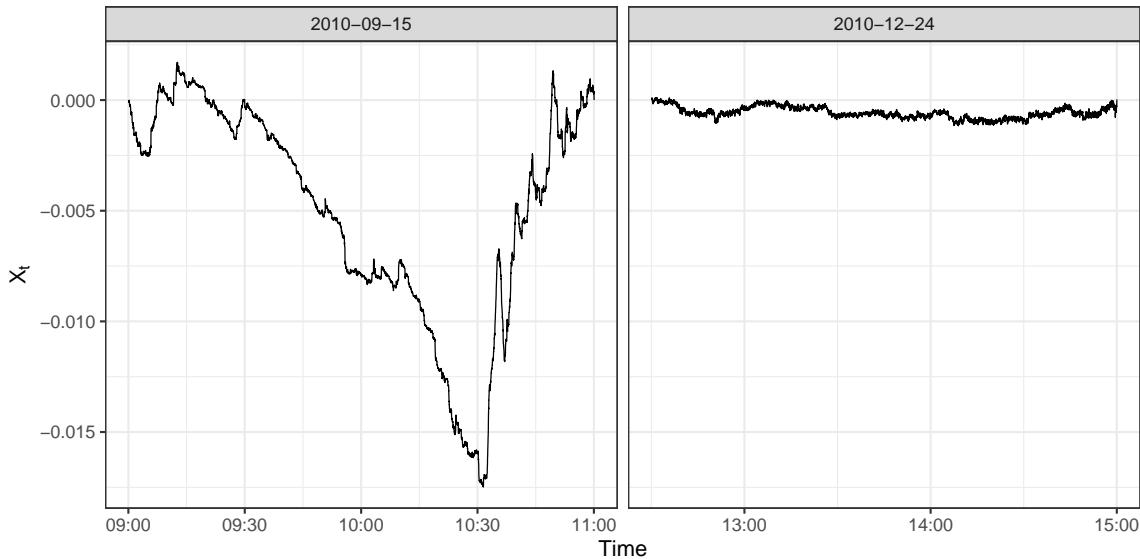


図 70 \hat{H}_{DFA} が最大の日（2010 年 9 月 15 日前場）と最小の日（2010 年 12 月 24 日後場）の系列 $\{X_t\}$

15 対数株価の絶対値を用いた分析

ここまで日経平均株価をはじめ、業種別日経平均や各国の代表的な株価指数、そして TOPIX の秒間隔データを用いてパラメータの推定を行ってきた。秒間隔データについては α の推定値を示していないが、他のいずれにおいてもハースト指数やグラフの次元の推定値に比べて小さな α が推定された。上述の通り、この原因としては分布のスケールが経時的に安定していない可能性が考えられる。そこで、最後に系列 $\{X_t\}$ の増分 $\{Y_t\}$ の絶対値 $\{|Y_t|\}$ のハースト指数の推定を行う。日経平均株価に対する同様の分析は松葉 (2007) でも行われており、そのハースト指数が明らかに $1/2$ よりも大きいという結果が示されているが、ここではすべてのデータを用いてそのことを確認しておく。

表 10 と表 11、そして図 71 がその結果である。日経平均株価に関する結果は表 10 にまとめており、表中で日経平均株価 S としたものが業種別日経平均と同じ期間に合わせたデータから推定された値であり、日経平均

株価 A としたものがデータ全体を使用して推定された値である。表 11 のチュニジアの推定値が 0.6 程度と他と比べてやや小さいことを除けば、それ以外の業種や国では 0.8 から 1 程度の水準となっている。つまり、株価の対数増分の絶対値は明確な長期記憶であり、極めて強い自己相関構造をもつ。とくに DFA による推定結果は 1 を超えるケースがみられるが、それは系列が定常ではない可能性を示唆する。たとえば、ブラウン運動に従う系列そのものに DFA を適用すると 1.5 に近い推定値が得られるが、一般に非定常過程に対する推定値は大抵の場合 1 を超える。もちろん、定常であるならば推定値が常に 1 未満であるわけではなく、非常に強い自己相関を伴う定常過程であるならば、推定の誤差によって 1 をわずかに上回ることもある。表中の 1 よりもわずかに大きな推定値はそのようなケースであると考えられる。いずれにしてもハースト指数の推定値は明らかに $1/2$ よりも大きく、増分の絶対値に強い正の自己相関が生じていることがわかる。また、図 71 の通り、秒間隔のデータではハースト指数の水準が 0.6 から 0.7 程度と若干小さくなるものの、やはり $1/2$ よりは明らかに大きい。これらの結果は極端な変動の後には大きな変動が続きやすくなることを意味し、それはマルチフラクタルブラウン運動のような局所自己相似な確率過程においても観測されるほか、いわゆる ARCH モデル等によって表されるような状況であることを示す。しかし、表中の決定係数がそれほど小さくないことから、その自己相関関数が幂乗則に従っていることがわかり、ARCH モデルとは別のモデルが必要である可能性が示唆される。それは、ARIMA モデルを ARFIMA モデルに拡張したときと同様に、IGARCH モデルの和分の次数を実数に拡張した Baillie, Bollerslev and Mikkelsen (1996) による FIGARCH (Fractionally Integrated Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) モデルとよばれるようなモデルである。もちろん、絶対値をとらない元の系列のハースト指数も $1/2$ ではないようなケースを考慮するとモデルはさらに複雑なものになる。

また、秒間隔データに対する結果である図 71 では、前場と後場とでハースト指数の水準が反対の動きをしている点が目立つ。それらの大小関係は、ちょうど図 67 や図 68 で元の系列のハースト指数やグラフの次元の変動の仕方が大きく変化していた 2013 年ないしは 2014 年頃を境に逆転している。2013 年頃までは明らかに後場の方が前場よりも高い水準にあるが、2014 年頃以降には前場の方が推定値が大きくなっている。

表 10: 業種別日経平均の対数増分の絶対値のハースト指数の推定値⁴⁴

業種	\hat{H}_{DFA}	$\hat{H}_{R/S}$	\hat{H}_S	\hat{H}_{σ^2}	p_{DFA}	R^2_{DFA}	$R^2_{R/S}$
水産	0.8685	0.8783	0.7925	0.8110	0.0000	0.9941	0.9966
鉱業	0.8826	0.8768	0.7702	0.8195	0.0000	0.9956	0.9975
建設	0.8857	0.8761	0.8265	0.8221	0.0000	0.9960	0.9962
食品	0.8567	0.8666	0.7880	0.8059	0.0000	0.9972	0.9981
繊維	0.8750	0.8854	0.7935	0.8142	0.0000	0.9951	0.9949
パルプ・紙	0.9040	0.8942	0.7880	0.8271	0.0000	0.9968	0.9977
化学工業	0.8737	0.8729	0.8164	0.8240	0.0000	0.9935	0.9951
医薬品	0.7728	0.7831	0.7642	0.7712	0.0000	0.9834	0.9884
石油	0.7792	0.8021	0.7887	0.7747	0.0000	0.9830	0.9872
ゴム	0.9375	0.9199	0.7606	0.8458	0.0000	0.9953	0.9967
窯業	0.9063	0.9040	0.8418	0.8502	0.0000	0.9925	0.9953
鉄鋼業	0.9033	0.8966	0.8396	0.8374	0.0000	0.9941	0.9936
非鉄金属および金属製品	0.8747	0.8765	0.8117	0.8253	0.0000	0.9931	0.9963
機械	0.8955	0.8941	0.8060	0.8502	0.0000	0.9896	0.9930
電気機器	0.8594	0.8493	0.8097	0.8101	0.0000	0.9956	0.9986
造船	0.9049	0.9057	0.8200	0.8345	0.0000	0.9949	0.9984
自動車・自動車部品	0.8994	0.8840	0.8312	0.8374	0.0000	0.9956	0.9987
その他輸送機器	0.8810	0.8817	0.7822	0.8099	0.0000	0.9920	0.9930

表 10: (続き)

業種	\hat{H}_{DFA}	$\hat{H}_{R/S}$	\hat{H}_S	\hat{H}_{σ^2}	p_{DFA}	R_{DFA}^2	$R_{R/S}^2$
精密機器	0.8567	0.8426	0.7910	0.8053	0.0000	0.9952	0.9959
その他製造業	0.8673	0.8707	0.7663	0.8121	0.0000	0.9934	0.9965
商社	0.9641	0.8946	0.8262	0.8706	0.0000	0.9971	0.9967
小売業	0.8877	0.8894	0.7657	0.8337	0.0000	0.9915	0.9953
銀行	0.9232	0.9263	0.7913	0.8783	0.0000	0.9845	0.9904
証券	0.9132	0.9111	0.7717	0.8388	0.0000	0.9911	0.9948
保険	0.9266	0.8970	0.8001	0.8512	0.0000	0.9957	0.9961
その他金融業	0.9159	0.8937	0.7695	0.8360	0.0000	0.9949	0.9982
不動産	0.9227	0.9080	0.7909	0.8512	0.0000	0.9922	0.9909
鉄道・バス	0.8844	0.8959	0.7777	0.8222	0.0000	0.9904	0.9947
陸運	0.8352	0.8583	0.7566	0.7892	0.0000	0.9952	0.9976
海運	0.8835	0.8659	0.7993	0.8132	0.0000	0.9973	0.9984
空運	0.8748	0.8957	0.7278	0.8087	0.0000	0.9903	0.9930
倉庫・運輸関連	0.8335	0.8505	0.7475	0.7869	0.0000	0.9929	0.9950
通信	0.8768	0.8634	0.7569	0.8064	0.0000	0.9959	0.9974
電力	0.9098	0.9036	0.7984	0.8517	0.0000	0.9868	0.9917
ガス	0.8766	0.8644	0.7709	0.8053	0.0000	0.9952	0.9971
サービス業	0.8558	0.8423	0.8061	0.8056	0.0000	0.9974	0.9994
日経平均株価 S	1.0097	1.0019	0.8444	0.9057	0.0000	0.9891	0.9912
日経平均株価 A	0.8906	0.9034	0.8210	0.8492	0.0000	0.9945	0.9950

表 11: 各国の株価指数の対数増分の絶対値のハースト指数の推定値

国	\hat{H}_{DFA}	$\hat{H}_{R/S}$	\hat{H}_S	\hat{H}_{σ^2}	p_{DFA}	R_{DFA}^2	$R_{R/S}^2$
アイスランド	0.7449	0.7383	0.5766	0.6520	0.0001	0.9773	0.9951
アイルランド	0.9955	0.9696	0.9019	0.8637	0.0000	0.9910	0.9942
アメリカ	1.0120	0.9512	0.9401	0.8821	0.0000	0.9927	0.9960
アラブ首長国連邦	0.8856	0.9107	0.8088	0.8152	0.0000	0.9878	0.9947
アルゼンチン	0.8169	0.8371	0.8080	0.7766	0.0000	0.9878	0.9893
イギリス	0.9738	0.9484	0.9171	0.8654	0.0000	0.9943	0.9949
イスラエル	0.9543	0.9405	0.8604	0.8474	0.0000	0.9936	0.9960
イタリア	0.9686	0.9880	0.8760	0.8459	0.0000	0.9954	0.9969
インド	0.9533	0.9209	0.8519	0.8475	0.0000	0.9888	0.9952
インドネシア	0.8383	0.8303	0.8043	0.7912	0.0000	0.9905	0.9956
ウクライナ	0.8240	0.8292	0.8002	0.7986	0.0000	0.9849	0.9922
エストニア	0.9292	0.9174	0.7671	0.8402	0.0000	0.9885	0.9873
オーストラリア	1.0062	0.9682	0.8793	0.8646	0.0000	0.9944	0.9973
オーストリア	0.9946	0.9403	0.8924	0.8677	0.0000	0.9939	0.9940

⁴⁴ 日経平均株価 S は業種別日経平均と同じ期間、すなわち 1972 年 1 月 4 日から 2019 年 6 月 14 日までの 12321 個のデータを用いたものを示し、日経平均株価 A は全期間、すなわち 1949 年 5 月 16 日から 2019 年 8 月 1 日までの 19153 個のデータを用いたものを示す。

表 11: (続き)

国	\hat{H}_{DFA}	$\hat{H}_{R/S}$	\hat{H}_S	\hat{H}_{σ^2}	p_{DFA}	R_{DFA}^2	$R_{R/S}^2$
オマーン	0.9652	0.8945	0.9029	0.8621	0.0000	0.9916	0.9949
オランダ	0.9879	0.9367	0.9040	0.8661	0.0000	0.9896	0.9919
カタール	0.9399	0.9245	0.8307	0.8472	0.0000	0.9927	0.9967
カナダ	1.0415	0.9594	0.9262	0.8925	0.0000	0.9909	0.9979
韓国	0.9625	0.9300	0.8813	0.8553	0.0000	0.9951	0.9937
クロアチア	0.9522	0.9004	0.8016	0.8517	0.0000	0.9863	0.9916
サウジアラビア	0.9131	0.9078	0.9037	0.8465	0.0000	0.9927	0.9964
シンガポール	0.9893	0.9524	0.8749	0.8647	0.0000	0.9940	0.9977
スイス	0.9346	0.9069	0.9093	0.8532	0.0000	0.9900	0.9895
スウェーデン	0.9842	0.9450	0.8649	0.8496	0.0000	0.9921	0.9935
スペイン	0.9389	0.9536	0.8664	0.8397	0.0000	0.9943	0.9957
スリランカ	0.8030	0.8370	0.8031	0.7926	0.0000	0.9833	0.9888
タイ王国	0.8736	0.8748	0.7983	0.8115	0.0000	0.9951	0.9974
台湾	0.9631	0.9453	0.7861	0.8286	0.0000	0.9925	0.9953
チェコ	0.9186	0.8975	0.8791	0.8424	0.0000	0.9911	0.9949
中国	0.9771	0.9587	0.7648	0.8265	0.0000	0.9903	0.9925
チュニジア	0.6090	0.6877	0.5649	0.6405	0.0040	0.9752	0.9878
チリ	0.8236	0.8237	0.8297	0.7860	0.0000	0.9948	0.9979
デンマーク	0.9225	0.9074	0.8628	0.8306	0.0000	0.9930	0.9958
ドイツ	0.9748	0.9290	0.8689	0.8595	0.0000	0.9838	0.9853
トルコ	0.8437	0.8430	0.7829	0.7841	0.0000	0.9911	0.9895
日本	0.8772	0.8692	0.8663	0.8112	0.0000	0.9915	0.9964
ニュージーランド	0.9146	0.8746	0.8074	0.8067	0.0000	0.9907	0.9959
ノルウェー	1.0192	0.9605	0.9027	0.8823	0.0000	0.9946	0.9972
パキスタン	0.8083	0.8129	0.8430	0.8097	0.0000	0.9719	0.9907
ハンガリー	0.9168	0.8836	0.7855	0.8250	0.0000	0.9927	0.9945
フィリピン	0.8116	0.7996	0.8040	0.7535	0.0000	0.9930	0.9962
フィンランド	0.9870	0.9690	0.8516	0.8460	0.0000	0.9926	0.9948
ブラジル	0.9103	0.8640	0.8374	0.8225	0.0000	0.9911	0.9976
フランス	0.9520	0.9321	0.8797	0.8456	0.0000	0.9934	0.9960
ブルガリア	0.8955	0.8633	0.8776	0.8163	0.0000	0.9923	0.9948
ベトナム	0.9359	0.9257	0.8512	0.8563	0.0000	0.9863	0.9914
ペルー	0.9094	0.9241	0.9073	0.8427	0.0000	0.9874	0.9892
ベルギー	0.9508	0.9410	0.9236	0.8494	0.0000	0.9927	0.9957
ポーランド	0.9589	0.9099	0.8247	0.8238	0.0000	0.9911	0.9966
ポルトガル	0.9128	0.9507	0.7924	0.8219	0.0000	0.9912	0.9900
香港	0.9855	0.9739	0.8606	0.8593	0.0000	0.9928	0.9976
マレーシア	0.8793	0.8810	0.7812	0.7884	0.0000	0.9901	0.9956
南アフリカ	0.9739	0.8908	0.8003	0.8493	0.0000	0.9959	0.9975
メキシコ	0.9302	0.8653	0.8586	0.8352	0.0000	0.9935	0.9956
モーリシャス	0.9153	0.8976	0.6926	0.8235	0.0000	0.9606	0.9717

表 11: (続き)

国	\hat{H}_{DFA}	$\hat{H}_{R/S}$	\hat{H}_S	\hat{H}_{σ^2}	p_{DFA}	R_{DFA}^2	$R_{R/S}^2$
モロッコ	0.8226	0.8182	0.7948	0.7689	0.0000	0.9878	0.9930
ヨルダン	0.8309	0.8268	0.6259	0.7542	0.0000	0.9681	0.9878
ラトビア	0.9038	0.8952	0.7825	0.8066	0.0000	0.9803	0.9919
リトアニア	0.8723	0.8572	0.8262	0.8224	0.0000	0.9863	0.9819
ルーマニア	0.9251	0.8881	0.8074	0.8343	0.0000	0.9900	0.9908
ロシア	0.9325	0.9065	0.8453	0.8487	0.0000	0.9889	0.9964

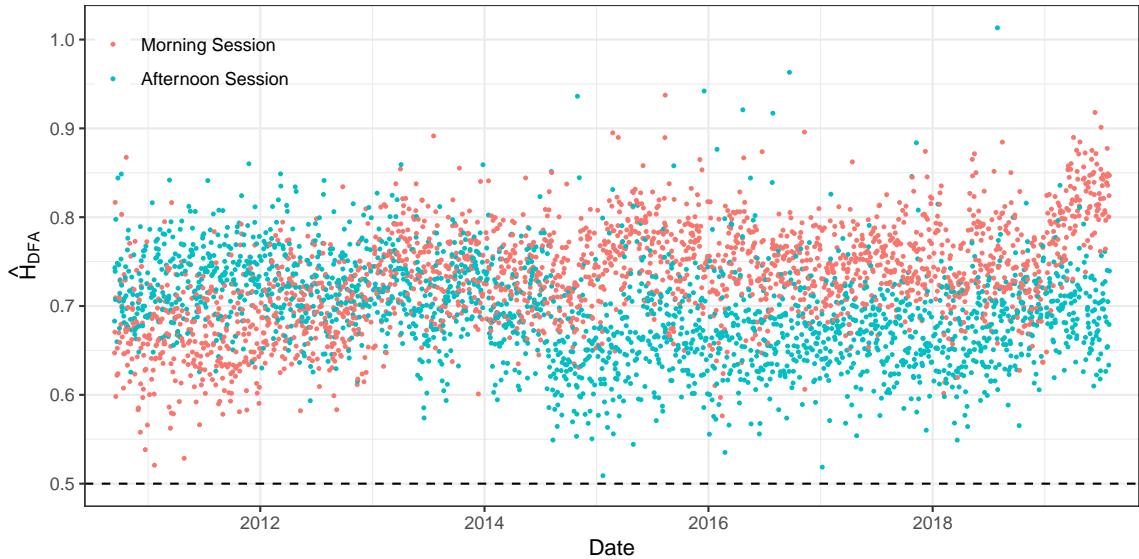


図 71 DFA による秒間隔データの対数増分の絶対値のハースト指数の推定値の推移

16 おわりに

本稿では非整数ブラウン運動や非整数安定過程といった自己相似過程の定義や性質、そしてパラメータの推定方法を整理し、対数株価の自己相似過程としての性質を調べた。推定したパラメータはハースト指数とグラフの次元、そして安定分布のパラメータ α, β であるが、このうちハースト指数は自己相関関数の振る舞いを定めるものであり、自己相似過程のハースト指数が $1/2$ よりも大きいことは、その増分が長期記憶とよばれる減衰の遅い自己相関関数をもち、パワースペクトル密度が $\omega \rightarrow 0$ で発散することを示していた。そして、グラフの次元が低いことはスケーリング指数が大きいこと、すなわちハースト指数が大きいか、あるいは分布の裾が非常に厚いことを示しており、その分布の裾の厚さは安定分布のパラメータである α によって定まっていた。安定分布は $\alpha < 2$ のときに分散が無限大であるが、 $\alpha = 2$ の場合には正規分布であり、その過程は非整数ブラウン運動となる。さらに、 $\alpha = 2$ であってなおかつハースト指数が $1/2$ であるケースが、対数株価の変動をモデル化するときに広く用いられる通常のブラウン運動であった。

実際に推定された日経平均株価のハースト指数は過去約 70 年間を通して推定する場合には $1/2$ よりもやや大きく、長期記憶であることを示唆するものであったが、短期間ごとに推定するとハースト指数が $1/2$ よりも大きかったのは 1970 年頃までであり、近年のデータでは $1/2$ に近い水準であることがわかった。また、 α の水準は観測された値から推定する場合には 1.5 程度となるが、これはハースト指数や分布のスケールの変動による影響が大きく、グラフの次元とハースト指数の推定値から計算する場合には 1.8 から 2 程度の水準であつ

た。とくに近年のデータでは 2 に近い値が得られ、ハースト指数とグラフの次元から判断して自己相似過程として当てはめる場合には、ブラウン運動を用いることがそれほど非現実的ではなくなっているようである。

業種別日経平均をみると、銀行や通信等の一部の業種ではデータ全体としてハースト指数が $1/2$ よりも大きいという結果が得られたが、いずれの業種も継続的にハースト指数が高水準であったわけではなく、1980 年代のバブル景気や IT バブル前後のように情勢が大きく異なる時期に一時的に高いハースト指数が記録されていただけである。一方で、そのようにハースト指数が高い時期は、連鎖的な暴落や暴騰が生じやすい状況であることを示し、株価の水準が短期間で大きく変動するようなリスクにつながるため、注意が必要である。

各国の代表的な株価指数では、データ期間がそれほど長くないため経時的な変動は観察していないが、地域による差がみられた。とくに東ヨーロッパは西ヨーロッパに比べてハースト指数が高く、グラフの次元が低い傾向にあった。この地理的な特徴からも推察されるように、ハースト指数やグラフの次元は証券市場の歴史の長さに関係しているようである。世界金融危機のような極端に深刻なイベントの前後を除けば、自由な取引が行われる発達した市場ではハースト指数が小さくなる傾向にあることがわかった。これは効率的市場仮説で仮定されるように、発生したイベントがもつ情報が直ちに株価に反映されていることを意味する。

TOPIX の秒間隔データでは、とくに 2014 年頃以降には安定してハースト指数が $1/2$ よりも大きな水準を推移しており、日次でみた日経平均株価の結果とは異なるものであった。一方で、それ以前の傾向としては、業種別日経平均のハースト指数が IT バブル等の影響を一時的に受けることと同様に、為替介入等の大きなイベントが生じた日にハースト指数の推定値の上昇が観察できたほか、12 月から 1 月にかけてハースト指数が低下し、グラフの次元が上昇するという傾向がみられた。そのように季節によって推定値の水準が異なることや、2014 年頃を境にそれらの推移の様子が大きく変化したことなどは原因が明確ではなく、このような高頻度データに対しては推定結果のさらなる詳細な分析が必要である。

いずれのデータにおいても、推定された α はハースト指数とグラフの次元から計算される値よりも小さなものであったが、それを説明するように対数株価の増分の絶対値のハースト指数は非常に大きく、長期記憶の性質を示すことが確認できた。そのことを考慮すれば、 α は実際に推定された値ほど小さくなく、日次データの場合にはハースト指数とグラフの次元から計算された 1.8 から 2 程度という値が妥当であると考えられる。また、TOPIX の秒間隔データに関しては対数株価の増分の絶対値のハースト指数が前場と後場とで明らかに異なる変動をしていることが確認できたが、その原因も明らかではない。

以上のように、本稿では対数株価を自己相似過程と仮定してその性質を調べてきたが、最後に株価指数の対数増分の絶対値に明確な長期記憶が観察されたことから、今後はそれを生じさせるような自己相似過程以外のモデル、すなわち FIGARCH モデルやマルチフラクタルブラウン運動のような、より複雑なモデルに関する分析を詳しく行っていかなければならない。また、TOPIX の秒間隔データにみられたハースト指数やグラフの次元に関する不可解な振る舞いの原因の追求も今後の課題となる。

参考文献

- 熊谷善彰 (2002) 『金融時系列データのフラクタル分析』、多賀出版株式会社.
- 佐藤健一 (2011) 「レビィ過程による確率積分と無限分解可能分布」、『数学』、第 63 卷 第 2 号 pp.161-181.
- 杉本信正 (2016) 「整数階でない微積分法について」、『数学通信』、第 21 卷 第 4 号 pp.5-22.
- 松葉育雄 (2007) 『長期記憶過程の統計 -自己相似な時系列の理論と方法-』、共立出版株式会社.
- 宮原孝夫 (2003) 『株価モデルとレビィ過程』、朝倉書店.
- Anderson, Nicola and Noss, Joseph (2013) "The Fractal Market Hypothesis and its Implications for the Stability of Financial Markets," *Bank of England Financial Stability Paper*, No.23.
- Anis, A. A. and Lloyd, E. H. (1976) "The Expected Value of the Adjusted Rescaled Hurst Range of Independent Normal Summands," *Biometrika*, Vol.63, No.1, pp.111-116.
- Baillie, R. T., Bollerslev, T. and Mikkelsen, H. O. (1996) "Fractionally Integrated Generalized Autoregressive

- Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, Vol.74, No.1, pp.3-30.
- Bayraktar, Erhan, Poor, H. Vincent and Sircar, K. Ronnie (2004) "Estimating the Fractal Dimension of the S&P 500 Index using Wavelet Analysis," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol.7, No.5, pp.613-643.
- Bell, Jordan (2015) "The Kolmogorov Continuity Theorem, Hölder Continuity, and the Kolmogorov-Chentsov Theorem," Online: <https://individual.utoronto.ca/jordanbell/notes/kolmogorovcontinuity.pdf>.
- Biagini, Francesca, Hu, Yaozhong, Øksendal, Bernt and Zhang, Tusheng (2008) *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*, Springer.
- Burlaga, L. F. and Klein, L. W. (1986) "Fractal Structure of the Interplanetary Magnetic Field," *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, Vol.91, No.A1, pp.347-350.
- Falconer, Kenneth (2014) *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons Ltd..
- Fallahgoul, Hasan A., Focardi, Sergio M. and Fabozzi, Frank J. (2016) *Fractional Calculus and Fractional Processes with Applications to Financial Economics: Theory and Application*, Academic Press.
- Granger, C. W. J. (1980) "Long Memory Relationships and the Aggregation of Dynamic Models," *Journal of Econometrics*, Vol.14, No.2, pp.227-238.
- Higuchi, T. (1988) "Approach to an Irregular Time Series on the Basis of the Fractal Theory," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol.31, No.2, pp.277-283.
- Hosking, J. R. M. (1981) "Fractional Differencing," *Biometrika*, Vol.68, No.1, pp.165-176.
- Huang, Zhiyuan and Li, Chujin (2007) "On Fractional Stable Processes and Sheets: White Noise Approach," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.325, No.1, pp.624-635.
- Hurst, H. E. (1951) "The Long-Term Storage Capacity of Reservoirs," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Vol.116, pp.770-799.
- Kolmogorov, A. N. (1940) "The Wiener Spiral and Some Other Interesting Curves in Hilbert Space," *Doklady Akademii Nauk SSSR*, Vol.26, pp.115-118.
- Laskin, N., Lambadaris, I., Harmantzis, F. and Devetsikiotis, M. (2001) "Fractional Lévy Motion and Its Application to Network Traffic Modeling," *Teletraffic Science and Engineering*, Vol.4, pp.457-470.
- Lo, Andrew W. (1991) "Long-Term Memory in Stock Market Prices," *Econometrica*, Vol.59, No.5, pp.1279-1313.
- Mandelbrot, Benoit B. (1963) "New Methods in Statistical Economics," *Journal of Political Economy*, Vol.71, No.5, pp.421-440.
- Mandelbrot, Benoit B. and Hudson, Richard L. (2008) *The (Mis)Behaviour of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin and Reward*, Profile Books Ltd.
- Mandelbrot, Benoit B. and van Ness, John W. (1968) "Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications," *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol.10, No.4, pp.422-437.
- Mishura, Yuliya S. (2008) *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*, Springer.
- Nolan, John P. (2008) "An Overview of Multivariate Stable Distributions," Online: <http://fs2.american.edu/jpnolan/www/stable/overview.pdf>.
- Nolan, John P. (2018) "Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data," Birkhauser, In progress, Chapter 1 online at <http://fs2.american.edu/jpnolan/www/stable/stable.html>.
- Peltier, Romain-François and Véhel, Jacques Lévy (1995) "Multifractional Brownian Motion: Definition and Preliminary Results," Research Report 2645, INRIA.
- Peng, C. K., Buldyrev, S. V., Havlin, S., Simons, M., Stanley, H. E. and Goldberger, A. L. (1994) "Mosaic Organization of DNA Nucleotides," *Physical Review E*, Vol.49, No.2, pp.1685-1689.
- Peters, Edgar E. (1989) "Fractal Structure in the Capital Markets," *Financial Analysts Journal*, Vol.45, No.4,

pp.32-37.

Peters, Edgar E. (1991) "A Chaotic Attractor for the S&P 500," *Financial Analysts Journal*, Vol.47, No.4, pp.55-62+81.

Peters, Edgar E. (1994) *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*, John Wiley & Sons Inc..

Peters, Edgar E. (1996) *Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility*, John Wiley & Sons Inc..

Pipiras, Vladas and Taqqu, Murad S. (2017) *Stable Non-Gaussian Self-Similar Processes with Stationary Increments*, Springer.

Royuela-del-Val, Javier, Simmross-Wattenberg, Federico and Alberola-López, Carlos (2017) "libstable: Fast, Parallel, and High-Precision Computation of α -Stable Distributions in R, C/C++, and MATLAB," *Journal of Statistical Software*, Vol.78, No.1, pp.1-25.

Shintani Masaru and Umeno Ken (2018) "Super Generalized Central Limit Theorem: Limit Distributions for Sums of Non-identical Random Variables with Power-laws," *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol.87, No.4.