博　士　学　位　論　文

内容の要旨および審査の結果の要旨

第33号

（令和2年3月授与分）

武　蔵　大　学

はしがき

本号は学位規則（昭和28年4月1日文部省令第9号）第8条の規定による公表を目的として、令和2年3月31日に本学において博士の学位を授与した者の論文内容の要旨および論文審査の結果の要旨を収録したものである。

学位記番号に付した甲は学位規則第4条第1項（いわゆる課程博士）によるものであり、乙は学位規則第4条第2項（いわゆる論文博士）によるものであることを示す。

目　　次

学位記番号	学位の種類	氏名	論文題目
甲第17号	博士（経済学）	隅田　誠	自己相似過程と対数株価の自己相似性について

氏名（本籍）	隅田　誠（栃木県）
学位の種類	博士（経済学）
学位記番号	甲　第 17 号
学位授与日	令和 2 年 3 月 31 日
学位授与の要件	学位規則(昭和 28 年 4 月 1 日文部科学省令第 9 号)第 4 条第 1 項該当
学位論文題目	自己相似過程と対数株価の自己相似性について

審査委員	主査	武蔵大学経済学部教授	下川　拓平
	副査	武蔵大学経済学部教授	安達　智彦
	副査	武蔵大学経済学部教授	今井　英彦
	副査	武蔵大学経済学部教授	茶野　　努

申請論文の要旨

株価の変動を表現するモデルとしてもっとも広く用いられる確率過程である幾何ブラウン運動は，実際の株価の経験的な変動はそれによって表現できない部分が多く，対数増分が独立に同一の正規分布に従うという幾何ブラウン運動の重要な性質からの逸脱がしばしば議論の対象となってきた．増分が正規分布に従うという性質は分散を用いてリスクを評価することの妥当性を与え，独立に同一の分布に従うという性質は通常の統計的分析の適用とファイナンス理論における平均・分散分析の利用を正当化している．

幾何ブラウン運動とは，その対数がブラウン運動の定数倍と時間の 1 次関数の和によって表されるような確率過程である．申請論文は，まずブラウン運動という確率過程は代表的な自己相似過程（定義は本文中式（2））である事，ブラウン運動は，その増分が独立に同一の正規分布に従うだけでなく，時間領域の拡大縮小に対して値領域を適当に拡大縮小することで同一の統計的性質が得られるという特徴ももっている事を説明する．申請論文ではこの特徴だけを維持し，幾何ブラウン運動におけるブラウン運動の代わりに他の自己相似過程

を当てはめ，実際の株価指数の変動をよりよく表現できるモデルを推定する．

申請論文は，まず利用する確率過程とそのパラメータ（母数）について以下のように詳細に説明と分析を行っている．

ブラウン運動以外の自己相似過程としては非整数ブラウン運動（本文中定義７）や安定過程，非整数安定過程（本文中定義２４）などが知られている．非整数ブラウン運動はブラウン運動から独立増分という性質を除外した確率過程であり，増分が同一の正規分布に従うものの独立ではない．一方で，安定過程はブラウン運動から正規分布に従うという性質を除外した確率過程であり，独立増分ではあるが正規分布に従わない．この両方の性質を除外した確率過程が非整数安定過程である．つまり，必ずしも増分が正規分布に従わず，独立でもないが，時間領域のスケールと値領域のスケールを関連付ける指数，すなわちスケーリング指数が存在するような確率過程である．

非整数ブラウン運動のスケーリング指数は所謂ハースト指数であり，0 から 1 の間の値をとるが，これはハースト指数が H であるとき 1 時点の値を t H 倍したものと t 時点の値とが同一の分布に従うことを意味する．この性質と正規分布に従うという性質から, 増分の自己相関等に関する様々な性質が得られる．とくに重要なことは増分の自己相関関数が指数 $2H-2$ の冪乗則に従い, 増分のパワースペクトル密度が $\omega \to 0$ で指数$-2H+1$ の冪乗則に従うという性質である．自己相関函数が指数 $2H-2$ の冪乗則に従うということは, $H \neq 1/2$ のとき, それが ARMA モデルのような有限な次数をもつ線形モデルに比べて遥かに遅く減衰することを意味する．そして，とくに $H>1/2$ のときには自己相関函数の和が収束しないことを示し，これは長期記憶とよばれる非常に長く継続する自己相関が生じることを意味する．

非整数ブラウン運動のスケーリング指数は増分の自己相関関数の振る舞いに関係しているが，安定過程のスケーリング指数はその分布の形状に関係してい

る．安定過程の従う分布は安定分布とよばれる正規分布を含むような大きな分布族に属するものであり, α, β, γ, δ の 4 つのパラメータを用いて定義される. その中でもとくに分布の裾の厚さを左右するパラメータである α が重要であり, パラメータ α に対して安定過程のスケーリング指数は 1/α となる．α は 0 から 2 の間の値をとるが，α<2 の安定分布の累積分布関数の裾は指数-α の冪乗則に従い，確率密度関数の裾は指数 -α-1 の冪乗則に従うことが知られており，つまり分散が無限大であることを示す．故に対数株価がそのような確率過程に従うことは推定された分散によってリスクを評価すべきでないことを意味する. α＝２の場合は正規分布であり，スケールの違いを除けば，そのとき安定過程はブラウン運動に等しい.

一方，非整数安定過程のスケーリング指数は，ハースト指数 *H* と安定分布のパラメータ α に対して *H+1/α-1/2* と与えられ，*H* は非整数ブラウン運動におけるハースト指数と同様に自己相関関数の振る舞いを左右し，α は安定過程と同様に分布の裾の厚さを定める. H=1/2 のとき安定過程に等しく, スケールの違いを除けば，α=2 のとき非整数ブラウン運動に等しい．つまり，非整数安定過程は非整数ブラウン運動や安定過程を含む自己相似過程である．通常のブラウン運動がホワイトノイズの積分によって得られるように，そのような確率過程は安定過程に関する非整数階積分によって得ることができる.

このようにハースト指数とパラメータ α およびそれらによって定まるスケーリング指数は自己相似過程の性質を左右する重要なパラメータであり，申請論文ではこれらの推定に加えてグラフのフラクタル次元の推定を行っている．フラクタル次元はスケーリング指数と深く関連しており，α>1 の非整数安定過程のグラフのフラクタル次元は確率 1 で *2H-1/α+1/2* となる．この関係から，ハースト指数と α とグラフの次元のいずれか 2 つが推定できれば，残りの 1 つを計算することができる．ハースト指数の推定には分散やパワースペクトル密度を

用いた簡単な方法のほかに，R/S 分析や DFA とよばれる推定方法を用いている．またグラフの次元の推定にはボックスカウント法や樋口法を採用している．

つづいて，実証部分に入る．

申請論文がパラメータ推定の対象とした株価指数は日経平均株価のほか，業種別日経平均や各国の代表的な株価指数，そして TOPIX の秒間隔データである．それぞれ過去約 70 年間，47 年間，17 年間，9 年間程度のデータであり，TOPIX の秒間隔データ以外は日次の終値を用いている．業種別日経平均は日経 500 種平均株価を 36 業種に分類して計測し公表されるものである．また，各国の株価指数は主要な 61 ヵ国の株価指数を 1 つずつ選んだものである．

日経平均株価に対する推定結果は，ハースト指数が 1/2 よりもわずかに大きく，長期記憶をもつことを示すことが明示され，また，グラフの次元の推定結果から α を計算すると 1.8 から 2 程度の値であった．しかし，これらの水準には経時的な変動がみられ，とくに 1970 年頃まではハースト指数が比較的大きかったものの，それ以降は 1/2 であると判断しても差し支えないような水準で推移という結論を得ている．

業種別日経平均に対する推定結果では，日経平均株価よりもデータ期間が短いこともあり，多くの業種においてハースト指数の推定値は 1/2 に近い値であること，しかし，その経時的な変動を見ると，バブル景気や IT バブルのように，その市場に大きな影響を波及的に与えるようなイベントが生じた時期にハースト指数の推定値が一時的に大きくなる傾向がみられることを指摘している．

また，各国の株価指数に対する推定結果では，主に自由な証券市場が開かれていた歴史の長さ，あるいは社会主義体制をとっていた時代の有無がハースト指数やグラフの次元に関係していることを指摘．とくにヨーロッパの東西でハースト指数の水準は大きく異なり，ウクライナやエストニア，クロアチア，ブルガリア，ラトビア，リトアニア，ルーマニアのような東ヨーロッパに属する国

々はハースト指数の推定値が 0．6 よりも大きく，証券布場の歴史が古いイギリスやドイツ，フランス等の国々は推定値が 0．4 よりも小さい事を指摘．このことから，発達した証券市場ではハースト指数が小さくなり，発生したイベントの影響が短期間のうちに株価に反映されるようになる傾向があることを発見，言及している．

TOPIX の秒間隔データからはいくつか先行研究と両立しない推定結果を得ている．業種別日経平均でも観察されたように，2011 年までは為替介入のような大きなイベントが生じたときなどに高いハースト指数を記録する傾向を指摘，それ以外にも 12 月から 1 月にかけてハースト指数が低下し，グラフの次元が上昇するという傾向の観察も提示．また，2014 年中盤頃を境にハースト指数やグラフの次元の変動の仕方が大きく変化しており，2014 年中盤以降にはやや高いハースト指数と低い次元で比較的安定的に推移，とくにグラフの次元の推定値の推移からはその境界が明確に観察できるにも関わらず，その日にはそれほど大きなイベントが生じておらず，さらに詳細に結果を分析する必要性に言及している．

いずれのデータにおいても α の推定値はハースト指数とグラフの次元から計算される値よりも著しく小さな値であることが示され，この原因としてはハースト指数やグラフの次元の推定値が誤っている可能性，分布のスケールが経時的に変動しているという可能性に言及．最後に，それを確かめるために対数株価の増分の絶対値のハースト指数の推定がなされる．いずれのデータでも推定値が 1/2 を大きく上回り，長期記憶をもつことを示す結果を得ている．TOPIX の秒間隔データでは，この対数増分の絶対値のハースト指数においても奇妙な結果を示し，前場と後場とで明らかに異なる水準で推移しているという観察結果が提示されている．

この対数増分の絶対値がもつ長期記憶という性質を考慮したモデルの分析に

加え，TOPIX の秒間隔データから観察されたハースト指数やグラフの次元の振る舞いを説明するような要因の特定が今後の課題となる旨言い添えて，論文は完結する．

申請論文審査の要旨

(注意) 以下，フラクタル幾何学／確率過程論／函数解析のテクニカルタームが多用される．本ドキュメントの性格上，厳密さを犠牲にせざるを得ぬ点，注意を要する．

(論文構成)　申請論文は，おおよそ，前半は理論，後半は実証分析を構成する．前半，理論においては利用する確率過程モデルの詳細かつ広範囲にわたる性質の詳解である．非整数ブラウン運動，非整数安定過程，複素空間における非整数回積分の概念説明と定義（Cauchy反復積分公式からの自然な拡張）とそれを利用した自己相似過程の積分表示，フラクタル次元およびその推定の理論，安定分布のパラメータ（母数）およびその推定の理論，所謂ARFIMAモデルとの比較，が論じられ，厳密な定義，および必要な性質とその証明がなされている．後半，実証分析においては，日経平均株価データを用いた分析で，安定分布母数推定，ハースト指数推定，フラクタル次元推定，それらの推移が数値計算を基軸として論じられる．あとは，データを業種別日経平均，各国株価指数，秒間隔，対数株価絶対値などにフォーカスした上での分析を実行，考察を与えている．

(特徴および成果) まず，申請者の研究の方法論は，顕著な特徴を有する．すなわち，現実を妥当に表現する確率過程モデルの分析と不可分である，数学の基礎的原理的諸概念(位相空間論，測度論，という基礎および Lebesgue積分，複素函数論，フラクタル次元)の理解，および（瞠目に値する）強靭な計算能力と，それらとシームレスに結びついた，正確かつ非常に迅速なコーディング(ツール開発)能力をもって，独自に開発した新しい切り口による，統計的実証研究等の応用の考究を，手早く実現してゆく，というものである．加えて，申請論文における数値計算の開発環境：R内の分析ツール／パッケージを杓子定規に適用する危険性をもすべてサーベイし，誤差等，評価が水準に満たぬと

判断した場合，即座にツールを独自開発し運用，それによる成果を出している．

申請論文の，業績としての重要な成果は，実は前半の理論部分にもまず複数存在し，それらは純粋数学（確率過程論，フラクタル幾何学，函数解析学）の先行研究において（審査委員会が走査した範囲では）現状見あたらぬものが多い．たとえば，論文中「5.2 非整数安定過程」において，まず非整数安定過程 $L\alpha,\beta,H(t)$ がKolmogorov の意味で連続であるための十分条件を示し，更にその条件下の指数γ（$0<\gamma<H+1/\alpha-1/2-1/a$） において局所 Hoelder 連続であることを「証明」している（おそらく先行研究では未発見）．それに基づき，非整数安定過程の増分を多変量安定分布と見て，代数的にパラメータ函数（β，γ，δ）の式およびその非整数安定過程としての制約条件を導出，離散測度に制限した離散多変量安定分布の確率密度函数の数値計算を実行，プロットしている．つづいて，分散が発散するような確率変数X,Yについての相関係数に該当する概念R[X,Y]（式（４１））を提示し，安定分布するX,YについてのR[X,Y]の値が収束する条件を見定め，上記の確率密度函数を利用してR[X,Y]をも数値計算，プロットしている．この R[X,Y] は，本来分散が発散するような分布では定義が不能であった「相関係数」の代替として，ある条件下で意味をもつことを見出している．この発見は，確率過程論，自己相関函数の理論における新たな知見であると，審査委員会は判断する．もう一点は，本文中，定理３２：「$1<\alpha\leqq 2$ の非整数安定過程 $L\alpha,\beta,H(t)$ の見本関数（審査委員会報告中ではサンプル函数）を[0,1] に制限したとき，そのグラフのハウスドルフ次元およびボックス次元は確率１で $2-H-1/\alpha+1/2$」なる結果である．これは，ブラウン運動（やはり 0-1 区間に制約したサンプル函数）のハウスドルフ次元が高々 $2-H$ という比較的有名な結果に追記されてしかるべき形式的結果であって，後述するような，純粋数学へのフィードバックという条件にかなう，重要な結果と考えられる．

数学への貢献という意味では，更にもう一点，付録A：不完全Γ函数の漸近挙動についての，申請者による厳密な正当化も興味深いものがある．これは，通常の不完全Γ函数の利用（申請論文では，後の実証計算にて重要な役割をになう，パワースペクトル密度計算に利用）の際，式（２３）という一般的な近似がなんら評価なく採用されている事（一種直感に合致する故と思われる）に対し，申請者は極めて精緻な証明を与えている．申請者は，合流型超幾何函数の引数z(複素数）の絶対値が大の領域における挙動（漸近展開）を利用した正

当化を行っており，これも確認できる範囲では知られていなかった結果である.

強調すべきは，これら以外にも，大量の代数／積分／数値計算の結果が論文中に展開，言及されている点であって，(あまりの量であるから)一度別途，トピックごとに再編した上で，数学へのコントリビューションとして世に問う事を著者に勧告すべきかと審査委員会は思料する.

後半部，実証研究において，申請論文は，上記理論において定義をのべ数学的性質を考究した，安定分布の4つのパラメータのうちの一つ：αと，ハースト指数についての推定，更にフラクタル次元(ハウスドルフ次元)の推定へとすすむ．分析対象は日経平均株価データであり，このデータに対し上記α，ハースト指数，フラクタル次元の推定をおこなう．業種別，各国株価指数，秒間隔データ，対数株価の絶対値の分析，と非常に多岐，多様，広範囲にわたる．手法も，最新，高度かつ多様性を有している．日経平均株価の増分系列について，正規分布と安定分布の前提のもとでのKullback-Leibler 情報量を評価，後者の性能が上である事を目視できる形で提示し，これに依拠しての母数推定という，重要な意義をもつと思われる仕事である．非整数安定分布を前提とした仕事自体が未だ稀な状態下にもかかわらず，一から定式化し，一種膨大な量の数値計算を敢行，まずハースト指数については分散とパワースペクトル密度，R/S分析，DFAすべてを利用し推定，その比較論を展開している．つづいて，フラクタル次元の推定は，ボックスカウント法，樋口法の計算結果およびその比較論が提示される.

まず注目されるのは，株価指数の対数増分（の絶対値）に，所謂「長期記憶」の存在を明確に実証した点と思料される．これは，ファイナンスの研究分野における，通常利用されるブラウン運動を相対化／一般化した，非整数ブラウン運動や，非整数安定過程としてデータの分析を「再構築」する，という営為のなかでのみ可能な考究であって，審査委員会は申請論文についてこの点をまず高く評価する．ブラウン運動は，非整数安定過程の母数α=2，かつハースト指数=1/2の特殊な過程であり，申請論文は，たとえば日経平均株価が過去70年で1/2より大である事を実証(ただし近年では1/2に近い)，ハースト指数についても同様な分析結果を提示している．各国の株価指数の分析，秒間隔データの分析についても同様に，複数の手法による分析結果として，既存研究の依拠する前提を反証する結果をきわめて妥当かつ明快に提示している．つまり，暗に

ブラウン運動という制約条件が妥当性を欠いている可能性があるという含意があり，市場の実証研究への大きな貢献とおもわれる．さらには，高頻度データにおける株価の奇妙な振舞の発見や，自己相似過程以外のモデルの検証の必要性等現状の成果の客観化，にも，言及されている．

このように，数理ファイナンスにおいて恐らく未発見の成果に到達しそれを世に問う形となっている本申請論文の実証分析の成果は，その価値が疑いようがないと審査委員会は判断した．

自然／社会科学内の各フレームワークの位置付けにおいて，それが所謂「数理科学」である事の必要条件の一つは，純粋数学へのフィードバックの存在である，という見方がなされる場合がある．確率過程論へのフィードバック(実証研究とは直接関連しないが明らかにその基礎づけを与える)が上記のごとく豊潤である本申請論文は，数理科学としての貢献の，このような基準をも満たしている．

申請論文の完遂能わなかった点は，以下の 2 点かと考えられる．すなわち，
一点目：数理ファイナンスへの貢献として，確率過程論という道具立てを，いわば相対化できていない，という点である．無論ファイナンス理論における重要な視座ではあるが，他の基礎理論（たとえばカオス力学や，内部モデル，マイクロアーキテクチャ）の応用との比較論への言及に至らずに完結したこと．
二点目：たとえば非整数安定過程のサンプル函数全体の集合が，どういった空間を構成し，そこに自然な σ 代数および測度（できれば確率測度）が入るかどうか，という，数理的手法を標榜するトレーディングの現場からすると非常に興味あるであろう点に触れなかったこと．審査委員会は本申請論文を十分評価できるものとするが，これへの言及があれば一層スケールの大きいものになったかと思量している．

最終試験の結果

本審査委員会は 2020 年 2 月 11 日，隅田氏に対して武蔵大学学位規則第 8 条第 2 項に定められている口頭による最終試験を本学において実施した．すべての質問，指摘に対し，正確かつ妥当な返答と説明を確認した．氏の能力が疑いようのないものであるとし，よって，合格と判定した．

結論

申請論文の審査および最終試験の結果，上記のように，隅田氏の研究能力は，いくつかの点において傑出した様相があり，独自性，正確さ，実質をそなえていると本審査委員会は判断した．本審査委員会は武蔵大学学位規則第 3 条第 3 項による博士（経済学）の学位を申請者に授与することができると全員一致で判断し，その旨，武蔵大学学位規則第 10 条にもとづき経済学研究科委員会に報告するものである．

令和2年5月　発行

発行　武蔵大学
編集　武蔵大学 運営部大学庶務課
〒 176-8534　東京都練馬区豊玉上1-26-1
TEL.　03(5984)3713