

要旨

経済学研究科博士後期課程

517D001 隅田誠

幾何ブラウン運動は株価の変動を表現するモデルとしてもっとも広く用いられる確率過程であるが、実際の株価の経験的な変動はそれによって説明できない部分が多い。とくに対数増分が独立に同一の正規分布に従うという幾何ブラウン運動の重要な性質からの逸脱はしばしば議論の対象となってきた。この正規分布に従うという性質は分散を用いてリスクを評価することの妥当性を与え、独立に同一の分布に従うという性質は通常の統計的分析の適用を正当化している。

幾何ブラウン運動とはその対数がブラウン運動の定数倍と時間の1次関数の和によって表されるような確率過程であるが、このブラウン運動という確率過程はもっとも代表的な自己相似過程である。つまり、ブラウン運動は、その増分が独立に同一の正規分布に従うだけでなく、時間領域の拡大縮小に対して値領域を適当に拡大縮小することで同一の統計的性質が得られるという特徴ももっている。本稿ではこの特徴だけを維持し、幾何ブラウン運動におけるブラウン運動の代わりに他の自己相似過程を当てはめ、実際の株価指数の変動をよりよく表現できるモデルを推定した。

ブラウン運動以外の自己相似過程としては非整数ブラウン運動や安定過程、非整数安定過程などが知られている。非整数ブラウン運動はブラウン運動から独立増分という性質を除外した確率過程であり、増分が同一の正規分布に従うものの独立ではない。一方で、安定過程はブラウン運動から正規分布に従うという性質を除外した確率過程であり、独立増分ではあるが正規分布に従わない。この両方の性質を除外した確率過程が非整数安定過程である。つまり、必ずしも増分が正規分布に従わず、独立でもないが、時間領域のスケールと値領域のスケールを関連付ける指数、すなわちスケーリング指数が存在するような確率過程である。

非整数ブラウン運動のスケーリング指数はハースト指数とよばれ、0から1の間の値をとるが、これはハースト指数が H であるとき1時点の値を t^H 倍したものと t 時点の値とが同一の分布に従うことを意味する。この性質と正規分布に従うという性質から、増分の自己相関等に関する様々な性質が得られる。とくに重要なことは増分の自己相関関数が指数 $2H - 2$ の冪乗則に従い、増分のパワースペクトル密度が $\omega \rightarrow 0$ で指数 $-2H + 1$ の冪乗則に従うという性質である。自己相関関数が指数 $2H - 2$ の冪乗則に従うということは、 $H \neq 1/2$ のとき、それがARMAモデルのような有限な次数をもつ線形モデルに比べて遥かに遅く減衰することを意味する。そして、とくに $H > 1/2$ のときには自己相関関数の和が収束しないことを示し、

それは長期記憶とよばれる非常に長く継続する自己相関が生じることを意味する。

このように非整数ブラウン運動のスケーリング指数は増分の自己相関関数の振る舞いに関係しているが、安定過程のスケーリング指数はその分布の形状に関係している。安定過程が従う分布は安定分布とよばれる正規分布を含むような大きな分布族に属するものであり、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の4つのパラメータを用いて定義される。その中でもとくに分布の裾の厚さを左右するパラメータである α が重要であり、パラメータ α に対して安定過程のスケーリング指数は $1/\alpha$ となる。 α は0から2の間の値をとるが、 $\alpha < 2$ の安定分布の累積分布関数の裾は指数 $-\alpha$ の冪乗則に従い、確率密度関数の裾は指数 $-\alpha - 1$ の冪乗則に従うことが知られており、このことはその分散が無限大であることを示す。したがって、対数株価がそのような確率過程に従うことは推定された分散によってリスクを評価すべきでないことを意味する。 $\alpha = 2$ の場合は正規分布であり、スケールの違いを除けば、そのとき安定過程はブラウン運動に等しい。

そして、非整数安定過程のスケーリング指数は、ハースト指数 H と安定分布のパラメータ α に対して $H + 1/\alpha - 1/2$ と与えられ、 H は非整数ブラウン運動におけるハースト指数と同様に自己相関関数の振る舞いを左右し、 α は安定過程と同様に分布の裾の厚さを定める。 $H = 1/2$ のとき安定過程に等しく、スケールの違いを除けば、 $\alpha = 2$ のとき非整数ブラウン運動に等しい。つまり、非整数安定過程は非整数ブラウン運動や安定過程を含む自己相似過程である。通常のブラウン運動がホワイトノイズの積分によって得られるように、そのような確率過程は安定過程に関する非整数階積分によって得ることができる。

このようにハースト指数とパラメータ α およびそれらによって定まるスケーリング指数は自己相似過程の性質を左右する重要なパラメータであり、本稿ではこれらの推定を行ったが、その他にもグラフのフラクタル次元の推定を行った。フラクタル次元はスケーリング指数と深く関連しており、 $\alpha > 1$ の非整数安定過程のグラフのフラクタル次元は確率1で $2 - H - 1/\alpha + 1/2$ となる。この関係から、ハースト指数と α とグラフの次元のいずれか2つが推定できれば、残りの1つを計算することができる。パラメータ α の推定には最尤法に基づいて安定分布のパラメータを推定する R 言語 (ver. 3.6.1) libstableR パッケージ (ver. 1.0.2) の `stable_fit_mle2d` 関数を用いたが、 $H \neq 1/2$ のときに観測されるデータが独立に同一の分布に従う標本ではなくなるなど、推定に必要な仮定が必ずしも満たされないため、随時ハースト指数とグラフの次元の推定値から計算される値と比較した。ハースト指数の推定には分散やパワースペクトル密度を用いた簡単な方法のほかに、R/S 分析や DFA とよばれる推定方法を用いた。また、グラフの次元の推定にはボックスカウント法や樋口法を用いた。

パラメータ推定の対象とした株価指数は日経平均株価のほか、業種別日経平均や各国の代表的な株価指数、そして TOPIX の秒間隔データである。それぞれ過去約 70 年間、47 年間、17 年間、9 年間程度のデータであり、TOPIX の秒間隔データ以外は日次の終値を用いた。業種別日経平均は日経 500 種平均株価を 36 業種に分類して計測し公表されるものである。また、各国の株価指数は主要な 61 カ国の株価指数を 1 つずつ選んだものである。

日経平均株価に対する推定結果は、ハースト指数が $1/2$ よりもわずかに大きく、長期記憶

をもつことを示すものであった。また、グラフの次元の推定結果から α を計算すると1.8から2程度の値であった。しかし、これらの水準には経時的な変動がみられ、とくに1970年頃まではハースト指数が比較的大きかったものの、それ以降は1/2であると判断しても差し支えないような水準で推移していた。

業種別日経平均に対する推定結果では、日経平均株価よりもデータ期間が短いこともあり、多くの業種においてハースト指数の推定値は1/2に近い値であった。しかし、その経時的な変動を見ると、バブル景気やITバブルのように、その市場に大きな影響を波及的に与えるようなイベントが生じた時期にハースト指数の推定値が一時的に大きくなる傾向がみられた。

また、各国の株価指数に対する推定結果では、主に自由な証券市場が開かれていた歴史の長さ、あるいは社会主義体制をとっていた時代の有無がハースト指数やグラフの次元に関係していることがわかった。とくにヨーロッパの東西でハースト指数の水準は大きく異なり、ウクライナやエストニア、クロアチア、ブルガリア、ラトビア、リトアニア、ルーマニアのような東ヨーロッパに属する国々はハースト指数の推定値が0.6よりも大きく、証券市場の歴史が古いイギリスやドイツ、フランス等の国々は推定値が0.4よりも小さかった。このことから、発達した証券市場ではハースト指数が小さくなり、発生したイベントの影響が短期間のうちに株価に反映されるようになる傾向があることがわかる。

TOPIXの秒間隔データからはいくつか不可解な推定結果が得られた。業種別日経平均でも観察されたように、2011年までは為替介入のような大きなイベントが生じたときなどに高いハースト指数を記録する傾向がみられたが、それ以外にも12月から1月にかけてハースト指数が低下し、グラフの次元が上昇するという傾向も観察できた。また、2014年中盤頃を境にハースト指数やグラフの次元の変動の仕方が大きく変化しており、2014年中盤以降にはやや高いハースト指数と低い次元で比較的安定的に推移するようになっている。とくにグラフの次元の推定値の推移からはその境界が明確に観察できるにも関わらず、その日にはそれほど大きなイベントが生じておらず、さらに詳細に結果を分析する必要がある。

いずれのデータにおいても α の推定値はハースト指数とグラフの次元から計算される値よりも著しく小さな値であった。この原因としてはハースト指数やグラフの次元の推定値が誤っていることなどが考えられるが、分布のスケールが経時的に変動しているということも考えられる。最後に、それを確かめるために対数株価の増分の絶対値のハースト指数を推定したところ、いずれのデータでも推定値が1/2を大きく上回り、長期記憶をもつことを示す結果が得られた。TOPIXの秒間隔データでは、この対数増分の絶対値のハースト指数においても奇妙な結果を示し、前場と後場とで明らかに異なる水準で推移していることが観察された。

この対数増分の絶対値がもつ長期記憶という性質を考慮したモデルの分析に加え、TOPIXの秒間隔データから観察されたハースト指数やグラフの次元の振る舞いを説明するような要因の特定が今後の課題となる。