

# 運動量共鳴条件をもつホイスラーモード に関する分散式の高温弱相対論的近似 によって導出された増幅率

池 田 慎

## 要約

筆者は、ブラジル磁気異常帯に降り込まれた放射線帯粒子の X 線の放射や人工衛星の故障などの原因を考えるために、相対論的粒子による不安定性の計算を行っている。方法として、内部プラズマ圏内のコールド電子と相対論的放射線帯電子の共存のプラズマの不安定性解析を、運動量表示を使って行っている。今回は、運動量共鳴条件を使ったプラズマ分散式と波動増幅率を導出し、ブラジル磁気異常帯への降り込みを検討した。速度を減少させる近似において、得られた式が非相対論的な結果と一致する事を検討し、又、今後は地球磁気圏外での適用も考えている。

## 1. 高温近似によるホイスラーモード波の弱相対論的分散式の導出 (以前の論文の紹介)

コールド電子と温度異方性をもつ相対論的電子を含むプラズマ内で生じる、相対論的電子ホイスラーモードサイクロトロン不安定性の分散式は、武蔵大学人文学会雑誌第 46 巻第 2 号の池田 (2014)<sup>1)</sup> と武蔵大学人文学会雑誌第 48 巻第 1 号の池田 (2016)<sup>2)</sup> により、既に与えられている。この論文に必要な武蔵大学人文学会雑誌第 48 巻第 1 号の結果は、次式等で与えられる。又、相対論的プラズマの熱的分布関数を使って、プラズマ分散関係を表現する方法は、Evangelidis

---

<sup>1)</sup> 池田 慎、武蔵大学人文学会雑誌、第 46 巻、第 2 号、裏 P1 (2014)

<sup>2)</sup> 池田 慎、武蔵大学人文学会雑誌、第 48 巻、第 1 号、裏 P49 (2016)

and Botha (2005)<sup>3)</sup> を参考にしている。更に、この論文ではホイスラーモードは沿磁力線伝搬をしていると仮定されている。 $m_0$  は電子の静止質量である。

$$\begin{aligned} \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \approx & 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega(\Omega - \omega)} - \pi \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \frac{1}{m_0} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{1}{2\pi m_0 T_1} \\ & \cdot \left\{ \left( 2m_0^2 T_1^2 - \frac{m_0 T_1^3}{C^2} \right) \left( 1 - \frac{P_R^2}{m_0 T_z} \right) - 2m_0^2 T_1^2 \left( \frac{T_z}{2m_0 C^2} + \frac{P_R^2}{2m_0^2 C^2} \right) \right\} \\ & - i\pi^2 \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \frac{1}{m_0} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{1}{2\pi m_0 T_1} \\ & \cdot \frac{P_R}{\sqrt{2\pi m_0 T_z}} \left( 2m_0^2 T_1^2 - 4m_0 \frac{T_1^3}{C^2} + T_1^2 \frac{P_R^2}{C^2} \right) \exp \left( -\frac{P_R^2}{2m_0 T_z} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、角振動数 $\omega$ は、次式で与えられる。ボルツマン定数 $k_B$ は、温度 $T$ に含めている。 $C$ は、光速度を表す。

$$\omega = \omega_k - i\gamma_k \quad (2)$$

又、増幅率 $\gamma_k$ は、

$$\omega_k \gg \gamma_k > 0 \quad (3)$$

の時、増幅として作用するように定義されている。又、共鳴運動量 $P_R$ は次の様に近似される。

$$P_R \equiv P_R(P_\perp) = m_0 \gamma V_R \approx m_0 \frac{\Omega k - \sqrt{\Omega^2 k^2 - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)(\Omega^2 - \omega^2)}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (4)$$

## 2. 最も単純な場合として、実部と虚部で分散式の等式を作る仮定

この場合、高エネルギー電子のプラズマ角振動数 $\omega_H^2$ が、コールド電子のプラズマ角振動数 $\omega_0^2$ に比べて十分小さいと考え、(2)を(1)の左辺と右辺の第2項にのみに代入する。さらに、地球プラズマ圏内で、波動は磁力線に沿って、伝搬

<sup>3)</sup> E. A. Evangelidis and G. J. J. Botha, J. Geophys. Res. 110, A02216 (2005)

運動量共鳴条件をもつホイスラーモードに関する分散式の高温弱相対論的近似によって導出された増幅率 池田 愼  
 すると仮定される。この仮定は、ブラジル磁気異常帯及びその周辺域で、高エネルギー電子の降り込みが観測され、その結果、降下した電子が中性大気やイオンと衝突し、X線を放射する現象を想定しながら、計算を行っている。この地域では、放射線を励起させる高エネルギー粒子が多量に入射し、人工衛星に搭載されている測定機に様々な影響を与えていると言われている (巻田, 2007)<sup>4)</sup>。

$$\begin{aligned} \frac{c^2 k^2}{\omega^2} &= \frac{c^2 k^2}{(\omega_k - i\gamma_k)^2} \simeq \frac{c^2 k^2}{(\omega_k)^2} \left(1 - i\frac{\gamma_k}{\omega_k}\right)^{-2} \simeq \frac{c^2 k^2}{(\omega_k)^2} \left(1 + 2i\frac{\gamma_k}{\omega_k}\right) \\ &\simeq \frac{c^2 k^2}{\omega_k^2} + 2i\frac{c^2 k^2}{\omega_k^2} \frac{\gamma_k}{\omega_k} = \frac{c^2 k^2}{\omega_k^2} + 2i\frac{c^2 k^2}{\omega_k^3} \gamma_k \end{aligned} \quad (5-1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0^2}{\omega(\Omega - \omega)} &= \frac{\omega_0^2}{(\omega_k - i\gamma_k)(\Omega - \omega_k + i\gamma_k)} \simeq \frac{\omega_0^2}{\omega_k(\Omega - \omega_k)} \left\{1 + i\frac{\Omega - 2\omega_k}{\omega_k(\Omega - \omega_k)} \gamma_k\right\} \\ &= \frac{\omega_0^2}{\omega_k(\Omega - \omega_k)} + i\frac{\omega_0^2(\Omega - 2\omega_k)}{\omega_k^2(\Omega - \omega_k)^2} \gamma_k \end{aligned} \quad (5-2)$$

(5-1) を (1) の左辺に代入し、(5-2) を (1) の右辺に代入する。ただし、(3) を考慮して、 $\omega$  を  $\omega_k$  に変換する。

$$\begin{aligned} \frac{c^2 k^2}{\omega_k^2} + 2i\frac{c^2 k^2}{\omega_k^3} \gamma_k &\simeq 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_k(\Omega - \omega_k)} + i\frac{\omega_0^2(\Omega - 2\omega_k)}{\omega_k^2(\Omega - \omega_k)^2} \gamma_k - \pi\frac{\omega_H^2}{\omega_k^2} \frac{1}{m_0} \left(\frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z}\right) \\ &\cdot \frac{1}{2\pi m_0 T_\perp} \left\{ \left(2m_0^2 T_\perp^2 - \frac{m_0 T_\perp^3}{C^2}\right) \left(1 - \frac{P_R^2}{m_0 T_z}\right) - 2m_0^2 T_\perp^2 \left(\frac{T_z}{2m_0 C^2} + \frac{P_R^2}{2m_0^2 C^2}\right) \right\} \\ &- i\pi^2 \frac{\omega_H^2}{\omega_k^2} \frac{1}{m_0} \left(\frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z}\right) \frac{1}{2\pi m_0 T_\perp} \\ &\cdot \frac{P_R}{\sqrt{2\pi m_0 T_z}} \left(2m_0^2 T_\perp^2 - 4m_0 \frac{T_\perp^3}{C^2} + T_\perp^2 \frac{P_R^2}{C^2}\right) \exp\left(-\frac{P_R^2}{2m_0 T_z}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

実部と虚部で、それぞれ等式を作る。まず、実部を考える。

<sup>4)</sup> 巻田和男、拓殖大学研究叢書 (自然科学) 7、「地磁気ホールの研究—地球磁場変動に伴う環境変動—」(2007)

$$\begin{aligned}
 \frac{c^2 k^2}{\omega_k^2} &\simeq 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_k(\Omega - \omega_k)} - \pi \frac{\omega_H^2}{\omega_k^2} \frac{1}{m_0} \left( \frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z} \right) \\
 &\cdot \frac{1}{2\pi m_0 T_\perp} \left\{ \left( 2m_0^2 T_\perp^2 - \frac{m_0 T_\perp^3}{C^2} \right) \left( 1 - \frac{P_R^2}{m_0 T_z} \right) - 2m_0^2 T_\perp^2 \left( \frac{T_z}{2m_0 C^2} + \frac{P_R^2}{2m_0^2 C^2} \right) \right\} \\
 &\simeq 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_k(\Omega - \omega_k)} - \pi \frac{\omega_H^2}{\omega_k^2} \left( 1 - \frac{T_\perp}{T_z} \right) \\
 &\cdot \left\{ \left( 1 - \frac{T_\perp}{2m_0 C^2} \right) \left( 1 - \frac{P_R^2}{m_0 T_z} \right) - \left( \frac{T_z}{2m_0 C^2} + \frac{P_R^2}{2m_0^2 C^2} \right) \right\} \quad (7)
 \end{aligned}$$

上式は、磁力線方向に伝搬する温度異方性高温ホイスラーモードの分散式を与える。

次に、(6) より、虚部同志で等式を作り、増幅率  $\gamma_k$  を求める。

$$\begin{aligned}
 2i \frac{c^2 k^2}{\omega_k^3} \gamma_k &\simeq +i \frac{\omega_0^2(\Omega - 2\omega_k)}{\omega_k^2(\Omega - \omega_k)^2} \gamma_k - i\pi^2 \frac{\omega_H^2}{\omega_k^2} \frac{1}{m_0} \left( \frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{1}{2\pi m_0 T_\perp} \\
 &\cdot \frac{P_R}{\sqrt{2\pi m_0 T_z}} \left( 2m_0^2 T_\perp^2 - 4m_0 \frac{T_\perp^3}{C^2} + T_\perp^2 \frac{P_R^2}{C^2} \right) \exp\left(-\frac{P_R^2}{2m_0 T_z}\right) \quad (8)
 \end{aligned}$$

(8) から、増幅率  $\gamma_k$  を求める。従って、

$$\begin{aligned}
 \left[ 2 \left( \frac{ck}{\omega_k} \right)^2 - \frac{\omega_0^2(\Omega - 2\omega_k)}{\omega_k(\Omega - \omega_k)^2} \right] \gamma_k &\approx -\pi^2 \frac{\omega_H^2}{\omega_k^2} \frac{1}{m_0} \left( \frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{1}{2\pi m_0 T_\perp} \frac{P_R}{\sqrt{2\pi m_0 T_z}} \\
 &\cdot \left( 2m_0^2 T_\perp^2 - 4m_0 \frac{T_\perp^3}{C^2} + T_\perp^2 \frac{P_R^2}{C^2} \right) \exp\left(-\frac{P_R^2}{2m_0 T_z}\right) \quad (9)
 \end{aligned}$$

上式を整理すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{\gamma_k}{\omega_k} &\approx -\frac{\pi^2}{2 \left( \frac{ck}{\omega_k} \right)^2 - \frac{\omega_0^2(\Omega - 2\omega_k)}{\omega_k(\Omega - \omega_k)^2}} \frac{\omega_H^2}{\omega_k^2} \frac{1}{m_0} \left( \frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{1}{2\pi m_0 T_\perp} \\
 &\cdot \frac{P_R}{\sqrt{2\pi m_0 T_z}} \left( 2m_0^2 T_\perp^2 - 4m_0 \frac{T_\perp^3}{C^2} + T_\perp^2 \frac{P_R^2}{C^2} \right) \exp\left(-\frac{P_R^2}{2m_0 T_z}\right) \\
 &= \frac{\pi}{2} \frac{\left( \frac{\omega_H}{\omega_k} \right)^2}{2 \left( \frac{ck}{\omega_k} \right)^2 - \frac{\omega_0^2(\Omega - 2\omega_k)}{\omega_k(\Omega - \omega_k)^2}} \left( \frac{T_\perp}{T_z} - 1 \right) \cdot \frac{P_R}{\sqrt{2\pi m_0 T_z}} \left( 2 - 4 \frac{T_\perp}{m_0 C^2} + \frac{P_R^2}{m_0^2 C^2} \right) \\
 &\cdot \exp\left(-\frac{P_R^2}{2m_0 T_z}\right) \quad (10)
 \end{aligned}$$

運動量共鳴条件をもつホイスターモードに関する分散式の高温弱相対論的近似によって導出された増幅率 池田 慎

ブラジル磁気異常帯では、電子のドリフト軌道に沿って、地球磁場が減少する過程で、電子が降り込むという予想であるが、一つは、磁気モーメントが保存する過程で、磁力線に垂直方向の速度が減り、磁力線に平行方向の速度が相対的に増し、ピッチ角が小さくなると云う想定で、降り込みを予想している。しかしながら、いつも降り込みがあるのではないという問題点もあり、この問題が、重要であると予想している。しかしながら、ロスコーンに入るためには、波動によるピッチ角拡散が常に機能し、ブラジル磁気異常帯に近づく以前に、ピッチ角拡散による垂直方向の速度の減少が必要と思われる。プラズマ圏内のいたるところで頻繁に発生する ELF 波動がそのために必要であると、筆者は想像している。(10) で明らかのように、

$$\frac{T_{\perp}}{T_z} - 1 > 0 \quad (11)$$

が波動生成の必要条件であるが、プラズマ圏内の広い範囲で、その条件が満たされている可能性を、筆者は強調したい。

その ELF 波動を発生させる増幅率が、(10) によって示されており、ブラジル異常帯での降り込みが機能するには、プラズマ圏内の有効な波動の生成が、プラズマ圏の広い範囲でなされる必要を、筆者は強調したい。その時、ブラジル異常帯での降り込みが、一層有効になるとと思われる。

## 謝辞

この研究は、筆者が武蔵大学の教員として、1985 年度から 2017 年度の 33 年間、お世話になり、更に今年度の特任教授としての、最後の、心ばかりの御礼として、人文学会雑誌に報告させて頂きました。その間、様々な方たちに、親身にお世話になりましたが、特に、武蔵学園関係では、自然科学と教職課程の教職員を含む、基礎教育センターの先輩・後輩・同僚の皆様、そして、1984 年度と 1999 年度、武蔵高校でお世話になりました教職員の皆様、大活躍したスケート部の皆様、私自身はあまり貢献ができませんでしたが、頑張った天文同好会の皆

様には、心から御礼申し上げます。学外では、特に、拓殖大学巻田名誉教授には、ブラジル磁気異常帯の研究に導いて頂いた事に、私自身、心から、御礼申し上げます。それから、多くのお力添えを頂きながらも、何も御返しができなかった非常勤講師の高野先生を始め、武蔵学園の多くの皆様には、申し訳ない気持ちだけが残っております。でも、皆様のご厚意にお応えするためにも、少しでも、私なりの御礼を、これからもさせて頂ければと思っております。本当に、皆様、有難うございました。