株式銘柄間の相関係数予測モデルの比較

隅田　誠[a]

要　旨

株式投資のリスク推定に関して，ベイズ修正や James-Stein 推定量がベータ値，すなわち市場ポートフォリオの収益率に対する感応度の予測に適することが過去に示されてきた．シングルインデックスモデルのもとでは，銘柄間の相関係数がベータ値を利用して計算されるため，それらの修正を適用したベータ値を用いて計算される相関係数は，そうでないものに比べて優れた予測精度を示すことが予想される．同様に，マルチファクターモデルのもとであっても，すべての回帰係数を修正することで相関係数の予測精度が向上することが期待できる．本稿では，日本の取引所に上場する銘柄を対象にこの検証を行い，これらの予想を肯定するような結果を実証によって示す．また，通常の推定量によって推定される相関係数自体に対しても同様の修正が適用でき，それによって予測精度を向上させられることが予想できる．本稿では同時にこの検証も行い，肯定的な結果を示す．

JEL Classification Codes：G11，G17

キーワード：相関係数，ベイズ修正，James-Stein 推定量，3 ファクターモデル，フィッシャーの z 変換

1．はじめに

株式銘柄間の収益率の相関係数は，分散投資によるリスク分散効果を左右する重要なパラメータであるが，その予測には一般に少なからぬ誤差を伴う．過去の一定期間の情報，とくに株価だけに基いて将来の一定期間に実現する相関係数を予測する際に，その予測誤差を小さくすることが本稿の目的である．その予測モデルとしてファクターモデルやベイズ修正を検討する．

過去の株価から収益率の相関係数を予測するとき，最も単純な方法として相関係数の定義通りの方法で推定した値そのものでもって予測する方法が挙げられるが，これが予測誤差を最も小さくする予測方法であるとは言い難い．実際，この予測値にはファクターモデルのもとで存在しないと考えられる誤差項間の相関が含まれているし，真の相関係数（以下，これを母相関係数と呼ぶ）のクロスセクショナルな分布が何らかの単峰型の分布であると仮定するならば，その予測値はその仮定のもとにおける条件付期待値よりも分布の中心から離れた位置にある値となっている．つまり，前者はファクターモデルによる予測精度改善の可能性を，後者はベイズ修正よる予測精度改善の可能性を示唆している．これらの仮定が必ずしも正確に実際のデータの特徴を捉えているとはいえないが，本稿ではこれらの仮定に基づいて予測値を修正することで予測精度がいかに変化するかを検証する．

まず，ファクターモデルでは銘柄間の相関が各銘柄の各リスクファクターに対する感応度，すなわちベータ値，あるいは一般に回帰係数だけによって決定されると仮定するため，リスクファクターとして用いる変数によって推定される相関係数の値が異なる．これはこの仮定によって（一般の推定量によって推定される）標本相関係数から誤差項間の相関が除かれるためである．本稿ではいずれのリスクファクターを用いたファクターモデルが相関係数の予測精度の点において優れているのか，つまり，いずれのファクターモデルが銘柄間の相関部分のうちの経時的に不安定な部分を取り除き，安定した部分のみを抽出できるかを検証する．このときファクターモデルのもとでの相関係数の計算には回帰係数および各銘柄の分散の推定が必要となるが，これらの予測に関してベイズ修正が有効であることは過去の研究から示されている（隅田・今井（2016））．そこで，本稿ではこれらの修正がファクターモデルのもとでの相関係数の予測精度をいかに改善させるかについても検証する．

また，母相関係数が従う分布を仮定することで，相関係数に対してフィッシャーの z 変換（以下，単に z 変換と呼ぶ）を行った値についてもベイズ修正（あるいは James-Stein 推定量）を適用し得る．ベイズ修正に関しては，相関係数ではなくベータ値の予測に対して適用することで予測精度が少なからず向上することが，過去の多くの研究で示されており，隅田・今井（2016）ではベイズ修正がベータ値の他に平均や分散の予測に対しても

a　武蔵大学大学院　経済学研究科博士後期課程　〒176-0011 東京都練馬区豊玉上 1-26-1

有効であることを示した．これらの修正が相関係数の予測に用いられないのは，その推定量がベータ値の予測の場合に都合の良いような仮定が設けられているという点に一因があり，相関係数の予測の場合ではこれらの仮定はおよそ現実的でなくなる．しかし，とくに分布の正規性に関する仮定は，z 変換を行うことで近似的に満たすことができる．そこで，本稿では相関係数そのものに対してベイズ修正を適用するのではなく，z 変換を行ったものに対して修正を行い，修正後に逆変換を行うことで相関係数の修正値を得るという方法を取り，検証を行う[1]．これによって，ある程度論理的に妥当な方法として，相関係数の修正モデルを提案することができる．

2. 先行研究

相関係数の予測精度を比較した研究，あるいはベイズ修正や James-Stein 推定量の有効性を示した研究は過去にもいくつか行われており，本章では，そのうち本稿で参考にした数例を挙げる．

まず，ベイズ修正に関しては Vasicek (1973) においてベータ値を予測する際の推定量が示され（以下，この推定量を用いて予測するモデルを Vasicek モデルと呼び，第 4 章でその概要を述べる），それ以降ベータ値の予測における Vasicek モデルの有効性が多く検証される．Vasicek モデルの推定量は非常に簡単な形で表されるが，それはベータ値，すなわち回帰係数の観測値が従う分布に正規分布を仮定できるためであり，また，同時にベータ値の母数のクロスセクショナルな分布にも正規性を仮定することがそれほど非現実的でないためである．

Vasicek モデルはベータ値の母数がある正規分布に従うと仮定した上で，ある観測値が得られたときの条件付期待値によって予測するものとなっており，その意味でこのモデルがベイズ修正と呼ばれる．このとき，母数の分布（あるいは観測値の分布）を正規分布と仮定しなくとも，これらの分布を何らかの形で仮定した場合の条件付期待値として予測値を修正するならば，それはベイズ修正といえるだろう．

Eun and Resnick（1984）はベイズ修正を相関係数の予測に利用した一例であるが，これは相関係数そのものに対するベイズ修正の適用ではなく，Vasicek モデルによって修正されたベータ値を相関係数の計算に用いることで（ベータ値だけでなく）相関係数の予測精度を高められることを実証によって示したものである．つまり，ここで Vasicek モデルを用いたパラメータはあくまでベータ値であって，相関係数そのものではない．このとき Vasicek モデルを適用したベータ値とは，リスクファクターに 1 つの株価指数だけを用いたファクターモデル（いわゆる Single Index Model）におけるベータ値であって，他に複数のリスクファクターを用いたモデルも検証しているが，こちらの回帰係数には Vasicek モデルを適用していない．

Eun and Resnick（1984）では，ファクターモデルに従う場合には，ベータ値を修正しないよりはベイズ修正を適用したほうが相関係数の予測精度が高まることが示されているが，この研究で最も予測精度が高い結果となったモデルはそのようなファクターモデルに従うモデルではない．彼らは複数の国の銘柄を検証対象としており，最良の予測精度を示したモデルは，相関係数をその国ごとの平均でもって予測するという National Mean モデルと呼ばれるモデルであった．このモデルは相関係数そのものを平均化しているのであって，ベータ値に対する修正ではない．National Mean モデルのように全体の平均で予測するというモデル（以下，このようなモデルを Mean モデルと呼ぶ）は他の同様の研究でも多く用いられており，本稿でも比較対象とする．なお，Mean モデルは Vasicek モデル，あるいはベイズ修正の極端な例として表現することもできる．

Vasicek モデルを用いてはいないものの，Elton and Gruber（1973）も相関係数の予測に Mean モデルを用いることで予測精度が向上することを実証によって示している．彼らは Eun and Resnick（1984）のように国ごとの平均ではなく，業種や主因子分析を用いて擬似的に生成した業種ごとの平均，あるいはすべての平均によって予測するモデルを用いており，このいずれであっても予測精度が高まる結果を示している．これらのモデルはそれぞれ Traditional Mean モデル，Pseudo-Industry モデル，Overall Mean モデルと呼ばれており，このうち Traditional Mean モデルおよび Overall Mean モデルは本稿でも検証する．彼らの研究では，とりわけ Traditional Mean モデルが優れた予測精度を示している．

また，Elton and Gruber（1973）も Eun and Resnick（1984）と同様に，ファクターモデルによる相関係数の予測精度を検証している．その際，Eun and Resnick (1984) ではリスクファクターとして株価指数を用いたモデルだけを検証しているが，Elton and Gruber (1973) では収益率行列の主成分得点をリスクファクターとして用いるモデルも検証している．これを参考に，本稿でもこのようなファクターモデルを仮定するモデル（後述する P1, P3, P5 モデルとして）を検証する．しかし，このモデル

[1] この点に関しては武蔵大学経済学部徳永俊史教授のご助言によった．記して御礼申し上げたい．

は彼らの研究ではよい結果を示しておらず，株価指数を用いるモデルよりも予測精度が低い結果となっている．

Elton and Gruber（1978）には Elton and Gruber（1973）に続く研究がまとめられており，そこでは Eun and Resnick（1984）に先立って相関係数の予測におけるベータ値のベイズ修正の有効性が示されている．彼らは Vasicek モデルや Mean モデルを用いて修正したベータ値にもとづく相関係数の予測精度を比較して検証している．検証結果として，相関係数の予測に関しては，ベータ値の予測に Vasicek モデルを用いるよりも Mean モデルを用いたほうがよいということが示されているが，ベータ値そのものの予測についていえば，Vasicek モデルのほうが優れる結果を示した研究が多い．

金崎（1987）は日本市場を対象としてベータ値の予測におけるベイズ修正の効果を検証している．その際，Vasicek モデルとともに Mean モデルを検証しており，Mean モデルの予測精度が Vasicek モデルに匹敵しないことはおろか，修正しないベータ値よりも予測精度が悪いという結果を示している．

同様の結果を隅田・今井（2016）でも示しており，本稿ではこれらに基いて，ファクターモデルを仮定する場合に用いるベータ値に対して適用する修正として，Mean モデルではなく Vasicek モデルを用いることとする．また，隅田・今井（2016）ではベータ値だけでなく分散の予測においても Vasicek モデルが効果的に予測精度を高めることを示した．相関係数の計算には各銘柄のベータ値の他に分散も必要であるから，本稿ではベータ値と同時に各銘柄の分散の予測にも Vasicek モデルを適用することで，相関係数の予測精度がさらに高まるか否かを検証する．

相関係数の予測ではないが，共分散に関する同様の研究として，Chan et al.（1999）や Ledioit and Wolf（2003），Ledioit and Wolf（2004）などがある．

Chan et al.（1999）では，共分散の予測におけるファクターモデルや Mean モデルの効果に関して検証されており，とくに 1 つのリスクファクターだけを用いるシングルファクターモデルの予測精度が高いことが示されている．一方で，相関係数の場合とは異なり，Mean モデルでは予測精度がほとんど変わらないという結果を示している．

Ledioit and Wolf（2003）は，銘柄数が多い場合の共分散行列の正則性を得る方法として，一般的な推定量による推定値と，シングルファクターモデルによる推定値との加重平均によって共分散行列の予測値を得る方法を提案している．この手法は Vasicek モデルと同様に，推定値を何らかの値（Vasicek モデルの場合は推定値全体の平均）に近づける形となっており，その意味でこのようなモデルは一般に Shrinkage Estimator と呼ばれる．また，Ledioit and Wolf（2004）ではシングルファクターモデルによる推定値ではなく，Vasicek モデルと同じく推定値全体の平均との加重平均を用いるモデルについても紹介されている．

最後に，James-Stein 推定量に関する研究についてであるが，この推定量は James and Stein（1961）で示されたものである．James-Stein 推定量は多変量正規分布に従う確率ベクトルの観測値から母平均ベクトルを予測するための推定量として述べられており，とくにベータ値の予測が目的とはされてはいない．

金崎（1987）や吉原（1990）は Vasicek モデルとともにベータ値の予測における James-Stein 推定量の有効性に関して検証している．いずれの研究でも James-Stein 推定量による修正効果が認められてはいるものの，Vasicek モデルと同等かそれ以下という結果が示されている．

3. 検証概要

3.1 データ

本稿で用いる株価データは，1983 年 1 月 4 日から 2016 年 8 月 31 日までの 404 か月間の月次株価データである．ただし，月次株価として，その各月の最終取引日の（株式分割あるいは株式併合に関する）調整後終値を用いる．なお，取引が行われなかった取引日の値には直前の取引日の値を用いる．

検証対象とする銘柄は，2016 年 9 月 3 日時点で Yahoo! ファイナンスから日次株価データが取得可能であった日本市場に上場する 3631 銘柄のうち，次のすべての条件を満たす 2073 銘柄である．

1. 2006 年 8 月 31 日以前の日次データが少なくとも 1 件以上存在する．
2. 連続する 20 取引日の取引総額が常に 1,000,000 円以上である．ただし，取引額は出来高にその日の終値を乗じた値とする．
3. 連続する 60 ヶ月間の株価変化率の標準偏差が 0 でない．つまり，60ヶ月間間隔でみたとき，常に株価変化率は多少なりとも変動する．
4. 月次株価の対数変化率の絶対値が常に 1 以下である．

1 は検証に十分なデータが存在することを保証するための，2 は流動性の低い銘柄を排除するための，3 は相関係数が計算できることを保証するための，4 は異常な誤差を生じさせ，修正の効果の評価に大きな影響を及ぼすような銘柄を排除するための条件である．また，それら

とは別にファクターモデルにおけるリスクファクターに使用する変数として，野村スタイルインデックスの Total Market インデックス，Total Market Value インデックス，Total Market Growth インデックス，Small Cap インデックス，Large Cap インデックスについても，同じ期間の月次データを利用する．

3.2　検証方法

本稿で結論付けるべきことは次の 4 点である．

1. ファクターモデルを仮定する場合，相関係数の予測誤差を小さくするリスクファクターはいずれか．
2. ファクターモデルを仮定する場合，相関係数の計算に必要な回帰係数および分散に対してベイズ修正を適用することで予測精度を高めることはできるか．
3. 相関係数の予測にベイズ修正等を適用することで予測誤差を小さくすることができるか．
4. ベイズ修正を適用する際に，業種の組によってグループ化して各々個別に修正を適用することは，相関係数の予測精度にどのような影響を及ぼすか．

本稿では複数のモデルによって相関係数を予測し，その予測精度を検証するが，その各モデルの予測精度はある時点を基準時点として，その基準時点で終わる一定期間（以下，これを事前期間と呼ぶ）のデータから得られる予測値と，基準時点から始まる一定期間（以下，これを事後期間と呼ぶ）のデータから得られる値（以下，これを事後の値と呼ぶ）との差の二乗平均，すなわち MSE によって評価する．以下，事前期間の長さを N_a か月間，事後期間の長さを N_p か月間，基準時点を T 時点と表すことにする．また，検証対象とする銘柄数は N_n とする．N_n の最大値は 2073 であるが，$T-N_a-1$ 時点で上場していない銘柄は検証対象に含むことができないため，常に $N_n=2073$ であるとは限らない．本稿では N_a として {60, 120, 180} のいずれかを，N_p として 60 を用いて検証する．

t 時点の銘柄 i の株価変化率を $R_{t,i}$ と表す．実際には，$R_{t,i}$ は時点 t の銘柄 i の株価に対する，時点 t から 1ヶ月前の時点 $t-1$ の銘柄 i の株価の比率から 1 を引いた値として計算する．

$R_{t,i}$ をそのように定義したうえで，事前期間のデータから得られる銘柄 i と銘柄 j との間の標本相関係数を次のように求め，${}^{a}\hat{\rho}_{i,j}$ と表す．

$$
{}^{a}\hat{\rho}_{i,j}=\frac{\sum_{t=T-N_a}^{T-1}(R_{t,i}-\overline{R_{.i}})(R_{t,j}-\overline{R_{.j}})}{\sqrt{\left(\sum_{t=T-N_a}^{T-1}(R_{t,i}-\overline{R_{.i}})^2\right)\left(\sum_{t=T-N_a}^{T-1}(R_{t,j}-\overline{R_{.j}})^2\right)}}
$$

ただし，

$$
\overline{R_{.i}}=\frac{1}{N_a}\sum_{t=T-N_a}^{T-1}R_{t,i}
$$

である（$\overline{R_{.j}}$ についても同様）．このように求めた ${}^{a}\hat{\rho}_{i,j}$ を予測値として用いるモデルを本稿では Historical モデルと呼び，検証対象とする．Historical モデルは修正等を行わないモデルであり，次章で述べる予測モデルが予測精度の点で優れているか否かを判断するための重要な基準となるモデルである．事後の値は $R_{T.}$ から $R_{T+N_p-1.}$ までの標本を用いて ${}^{a}\hat{\rho}_{i,j}$ と同様に Historical モデルによって計算し，これを ${}^{p}\hat{\rho}_{i,j}$ と表すことにする．また，銘柄 i と銘柄 j との間の母相関係数を $\rho_{i,j}$ と表す．

いずれの検証においても，予測精度は MSE によってのみ評価し，比較する．一般に MSE とは予測値と真の値との差の二乗平均であるが，真の値である $\rho_{i,j}$ は実際のデータからは得られないため，事後の値を真の値として評価する．つまり，予測値を ${}^{a}\hat{\rho}'_{i,j}$ としたとき，MSE は次式から得られる値となる．

$$
MSE=\frac{2}{N_n^2-N_n}\sum_{i=1}^{N_n-1}\sum_{j=i+1}^{N_n}({}^{a}\hat{\rho}'_{i,j}-{}^{p}\hat{\rho}_{i,j})^2
$$

この式からわかるように，検証対象とする銘柄組 (i, j) は $i<j$ を満たすものだけである．つまり，相関行列の上側ないしは下側三角成分のみである．

MSE は値が小さいほど予測精度が高いと判断できる．しかし，本稿では複数の時点で検証を行うため，MSE の大きさだけではある 1 時点での比較しか行えない．ゆえに，MSE の中央値や平均による比較とともに，Steel-Dwass 法を用いた MSE の有意差の検定を行う．その際，有意水準は 1% および 5% とする．しかし，Steel-Dwass 法では MSE の差が有意であるか否かを判断できるが，どちらが有意に小さいのかという結論は得られない．そこで，本稿では，MSE の差が有意であるとき，中央値による比較だけではなく，MSE が相対的に小さい時点の割合によってもモデル間の優劣を判断することにする．その割合がおよそ 90% を超えるならば，明らかにそのモデルのほうが優れているといえるだろうし，80% や 70% であっても，そう判断して差し支えないだろう．しかし，60% や 50% の水準であれば，たとえ検定結果が有意であっても，優劣を判断することは難しい．その場合でも，その割合が大きい方が多いほうが優れる

と判断せざるを得ないが，これは断言し難い．ただし，第5章で示すが，実際に検定結果が有意であって，なおかつこの割合が70％未満であるような例は非常に少ない．

ところで，$\{{}^a\hat{\rho}'_{i,j}\}$ の標本平均と標本標準偏差をそれぞれ $\overline{{}^a\hat{\rho}'}$ および $s_{{}^a\hat{\rho}'}$ とし，$\{{}^p\hat{\rho}_{i,j}\}$ の標本平均と標本標準偏差をそれぞれ $\overline{{}^p\hat{\rho}}$ および $s_{{}^p\hat{\rho}}$ とし，$\{{}^a\hat{\rho}'_{i,j}\}$ と $\{{}^p\hat{\rho}_{i,j}\}$ の標本共分散を $s_{{}^a\hat{\rho}',{}^p\hat{\rho}}$ とすると，つまり，

$$\overline{{}^a\hat{\rho}'}=\frac{2}{N_n^2-N_n}\sum_{i=1}^{N_n-1}\sum_{j=i+1}^{N_n}{}^a\hat{\rho}'_{i,j}$$

$$s_{{}^a\hat{\rho}'}=\sqrt{\frac{2}{N_n^2-N_n}\sum_{i=1}^{N_n-1}\sum_{j=i+1}^{N_n}({}^a\hat{\rho}'_{i,j}-\overline{{}^a\hat{\rho}'})^2}$$

$$s_{{}^a\hat{\rho}',{}^p\hat{\rho}}=\frac{2}{N_n^2-N_n}\sum_{i=1}^{N_n-1}\sum_{j=i+1}^{N_n}({}^a\hat{\rho}'_{i,j}-\overline{{}^a\hat{\rho}'})({}^p\hat{\rho}_{i,j}-\overline{{}^p\hat{\rho}})$$

とすると（$\{{}^p\hat{\rho}_{i,j}\}$ についても同様），MSE は次のように分解できる．

$$MSE=(\overline{{}^a\hat{\rho}'}-\overline{{}^p\hat{\rho}})^2+(s_{{}^a\hat{\rho}'}-s_{{}^p\hat{\rho}})^2+2(s_{{}^a\hat{\rho}'}s_{{}^p\hat{\rho}}-s_{{}^a\hat{\rho}',{}^p\hat{\rho}})$$

本稿では，この右辺第1項を「平均の誤差」，右辺第2項を「標準偏差の誤差」，右辺第3項を「相関の誤差」と呼び，区別する．つまり，MSE は，$\{{}^a\hat{\rho}'_{i,j}\}$ と $\{{}^p\hat{\rho}_{i,j}\}$ の平均の差，$\{{}^a\hat{\rho}'_{i,j}\}$ と $\{{}^p\hat{\rho}_{i,j}\}$ のばらつきの違い，$\{{}^a\hat{\rho}'_{i,j}\}$ と $\{{}^p\hat{\rho}_{i,j}\}$ との相関の度合いといった3つの要素からなっているといえる．これらを個別に確認することで，どのような要素が予測精度に強く影響しているのかを確認することができる．

とくに，平均の誤差は予測値全体の平均を変化させることで個別に縮小ないしは拡大させることが容易にできる．たとえば，平均の誤差だけが著しく小さなモデルがあるならば，ほかのモデルの予測値の平均をそのモデルの平均に合わせることで，そのモデルの平均の誤差が小さくなり，結果として MSE 自体も小さくすることができる．Elton and Gruber（1973）では，Historical モデルの平均の誤差が小さいことを前提して，このような調整が行われている．

4. 予測モデル

本章では，ファクターモデルを仮定したもとでの相関係数の推定方法，およびベイズ修正等の予測モデルの概要と，フィッシャーの z 変換について述べる．

4.1 ファクターモデル

まず，本節ではファクターモデルの概要を述べる．

ファクターモデルとは，各銘柄の期待収益率が特定のリスクファクター，すなわち説明変数に対する感応度によって定まるものと仮定するモデルである．ゆえに，ファクターモデルのもとでは，個別銘柄間の相関がそれらの説明変数を介してのみ生じるものだと仮定することになる．

説明変数の数を N_f，説明変数行列を（$N_a\times N_f$）の行列 $\mathbf{F}$，被説明変数行列，すなわち各銘柄の変化率を並べた行列を（$N_a\times N_n$）の行列 ${}^a\mathbf{R}$ としたとき[2]，回帰係数行列の推定値は最小二乗法によって次式から得られ，これを $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ と表す（$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ は（$N_f+1\times N_n$）の行列である）．

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=((\mathbf{1},\mathbf{F})^{\mathrm{T}}(\mathbf{1},\mathbf{F}))^{-1}(\mathbf{1},\mathbf{F})^{\mathrm{T}}\,{}^a\mathbf{R}$$

ただし，$\mathbf{1}$ はすべての成分が1である列ベクトルを示す．また，行列 $\mathbf{A}$ および $\mathbf{B}$ に対して，$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の行数が同じとき行列 $\mathbf{A}$ の右側に行列 $\mathbf{B}$ をならべた行列を（$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$）と表し，$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の列数が同じとき行列 $\mathbf{A}$ の下側に行列 $\mathbf{B}$ をならべた行列を $\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$ と表すことにする．

誤差項行列は次式から得られ，これを $\hat{\mathbf{u}}$ と表す．

$$\hat{\mathbf{u}}={}^a\mathbf{R}-(\mathbf{1},\mathbf{F})\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

加えて，以降の表記を簡単にするため，$\mathbf{F}$ をセンタリングした行列，すなわち各列から各列の標本平均を引いた行列を $\check{\mathbf{F}}$ と表すことにする．つまり，

$$\check{\mathbf{F}}=\mathbf{F}-N_a^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$$

である．同様に ${}^a\mathbf{R}$ をセンタリングした行列を ${}^a\check{\mathbf{R}}$ と表すことにする．

このとき，個別銘柄間の標本相関係数 ${}^a\hat{\rho}_{i,j}$ は次のように表せる．

$${}^a\hat{\rho}_{i,j}=\frac{\sum_{k=1}^{N_f}\sum_{l=1}^{N_f}\hat{\beta}_{k+1,i}\hat{\beta}_{l+1,j}(\check{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}}\check{\mathbf{F}})_{k,l}+(\hat{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{u}})_{i,j}}{\sqrt{({}^a\check{\mathbf{R}}^{\mathrm{T}}\,{}^a\check{\mathbf{R}})_{i,i}({}^a\check{\mathbf{R}}^{\mathrm{T}}\,{}^a\check{\mathbf{R}})_{j,j}}}$$

さらに，ファクターモデルでは次の仮定を加えていることになる[3]．

・E［$\hat{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{u}}$］が対角行列である．すなわち，相異なる銘柄の誤差項は無相関である．

この仮定に従うならば，${}^a\hat{\rho}_{i,j}$ は次のように書き換えられる．

[2] 基準時点を T とすれば ${}^a\mathbf{R}_{t,i}$ は $R_{T-N_a+t-1,i}$ に対応する．

[3] この点に関しては武蔵大学経済学部山本零准教授のご助言によった．記して御礼申し上げたい．

$$ {}^{a}\hat{\rho}_{i,j} = \frac{\sum_{k=1}^{N_f}\sum_{l=1}^{N_f}\hat{\boldsymbol{\upbeta}}_{k+1,i}\hat{\boldsymbol{\upbeta}}_{l+1,j}(\check{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}}\check{\mathbf{F}})_{k,l}}{\sqrt{({}^{a}\check{\mathbf{R}}^{\mathrm{T}}\,{}^{a}\check{\mathbf{R}})_{i,i}({}^{a}\check{\mathbf{R}}^{\mathrm{T}}\,{}^{a}\check{\mathbf{R}})_{j,j}}} $$

これは次式から得られる行列 $\hat{\boldsymbol{\rho}}$（いわゆる相関行列）の i 行 j 列（あるいは j 行 i 列）成分に等しい．ただし，以下，正方行列 $\mathbf{A}$ に対して対角成分以外の成分を 0 で置き換えた行列を diag（ $\mathbf{A}$ ）と表すものとする．

$$ \hat{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{S}\hat{\boldsymbol{\upbeta}}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & \check{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}}\check{\mathbf{F}} \end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\upbeta}}\mathbf{S} $$

ただし，

$$ \mathbf{S} = \sqrt{\mathrm{diag}({}^{a}\check{\mathbf{R}}^{\mathrm{T}}\,{}^{a}\check{\mathbf{R}})^{-1}} $$

である．

この $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ の各成分を相関係数の予測値として用いるモデルを，本稿ではファクターモデルと総称することにする．このように相関係数を予測することによる予測精度の変化については，Elton and Gruber（1973）でも同様の手法によって検証されている．

リスクファクターとしては，株価指数の変化率あるいは ${}^{a}\mathbf{R}$ の主成分得点を用いる．

株価指数の変化率としては，野村スタイルインデックスの Total Market インデックスの変化率を用いるモデルと，3 ファクターモデル（Fama and French（1993））に基づき各リスクファクターの簡単な代理変数として野村スタイルインデックスの Total Market インデックスの変化率，Total Market Value インデックスの変化率と Total Market Growth インデックスの変化率の差，Small Cap インデックスの変化率と Large Cap インデックスの変化率の差の 3 系列を用いるモデルを検証する．本稿では，このうち前者を M1 モデル，後者を M3 モデルと呼ぶ．

また，主成分得点としては，第 1 主成分得点から第 1，第 3，第 5 主成分得点までを用いるモデルをそれぞれ検証する．本稿ではそれぞれを P1 モデル，P3 モデル，P5 モデルと呼ぶ．

ファクターモデルでは推定値の絶対値が 1 を上回ることがある．しかし，事後の値の絶対値は必ず 1 以下であるため，その場合は予測値を 1 あるいは－1 のうちの近い方に修正することによって予測精度が必ず向上する．ゆえに，本稿ではそのように修正を行ったうえで検証する．

$\hat{\boldsymbol{\rho}}$ の計算には $\hat{\boldsymbol{\upbeta}}$ や diag（${}^{a}\check{\mathbf{R}}^{\mathrm{T}}\,{}^{a}\check{\mathbf{R}}$）を用いる．それぞれ回帰係数の推定値，個別銘柄の偏差積和，すなわち推定される不偏分散を N_a-1 倍した値であるが，回帰係数と分散の予測に際して，次節に述べるベイズ修正，とくに Vasicek モデルを適用することで，予測精度が一般的な推定方法よりも高まることが示されている．そこで，本稿ではファクターモデルを仮定したもとでの相関係数の予測に対しても，これらの修正を行うことで予測精度が向上するか否かについて検証する．

回帰係数と分散をともに（一般的な推定量を用いるモデルである）Historical モデルで予測するものを BH-VH モデル，ともに Vasicek モデルで予測するものを BV-VV モデル，回帰係数を Historical モデル，分散を Vasicek モデルで予測するものを BH-VV，回帰係数を Vasicek モデル，分散を Historical モデルで予測するものを BV-VH モデルと呼ぶことにする．

4.2　ベイズ修正

本節ではベイズ修正の概要を述べる．

まず，$\tilde{X}$ を真の値が θ であるような分布に従う確率変数とし，さらに，θ 自身も確率変数であるとする．以下，θ および $\tilde{X}$ の推定値あるいは観測値を，それぞれ $\hat{\theta}$，$\hat{x}$ と表し[4]，θ が従う分布の確率密度関数を $f(\hat{\theta})$，$\theta=\hat{\theta}$ であると仮定した場合に $\tilde{X}$ が従う分布の（条件付）確率密度関数を $g(\hat{x},\ \hat{\theta})$ とする．このとき，θ の $\tilde{X}=\hat{x}$ という条件付き期待値は，

$$ \mathrm{E}[\theta|\tilde{X}=\hat{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} z(\hat{\theta},\hat{x})\,\hat{\theta}\,d\hat{\theta} $$

$$ = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(\hat{\theta})\,g(\hat{x},\hat{\theta})\,\hat{\theta}\,d\hat{\theta}}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\hat{\theta})\,g(\hat{x},\hat{\theta})\,d\hat{\theta}} $$

である．任意の $\tilde{X}=\hat{x}$ に対する θ の推定値 $\hat{\theta}$ として，この $\mathrm{E}[\theta|\tilde{X}=\hat{x}]$ を用いるような修正をベイズ修正と呼ぶ．

ベイズ修正において，$f(\hat{\theta})$ を平均 $\mathrm{E}[\theta]$，分散 $\mathrm{Var}[\theta]$ の正規分布の確率密度関数と仮定し，$\mathrm{Var}[\tilde{X}|\theta=\hat{x}]$ を $\theta=\hat{x}$ であるときの $\tilde{X}$ の分散，すなわち $\hat{x}$ の標準誤差の 2 乗として[5]，$g(\hat{x},\ \hat{\theta})$ を平均 $\hat{\theta}$，分散 $\mathrm{Var}[\tilde{X}|\theta=\hat{x}]$ の正規分布の確率密度関数と仮定するとベイズ修正の修正値は非常に簡単に求められる．実際，Vasicek（1973）で示

4　相関係数の予測では，θ および $\hat{x}$ は，それぞれ任意の銘柄間の母相関係数 ρ と標本相関係数 ${}^{a}\hat{\rho}$ に対応する．

5　$\hat{x}$ の標準誤差が必ずしも θ によって決定されるとは限らない．たとえば，ベータ値の場合，真のベータ値が既知であっても標準誤差を求めることはできない．ただし，相関係数を z 変換したものの標準誤差は標本数によって定まる．その推定量については後述する．

されるように，このときの $\mathrm{E}[\theta|\tilde{X}=\hat{x}]$ は次式から得られる．

$$\mathrm{E}[\theta|\tilde{X}=\hat{x}]=\frac{\mathrm{Var}[\theta]\hat{x}+\mathrm{Var}[\tilde{X}|\theta=\hat{x}]\mathrm{E}[\theta]}{\mathrm{Var}[\theta]+\mathrm{Var}[\tilde{X}|\theta=\hat{x}]}$$

ここで，$\mathrm{E}[\theta]$ および $\mathrm{Var}[\theta]$ は未知であるから，実際にこの推定量を用いるためには，先にこれらを推定する必要がある．

これらの推定のために，λ^2 を定数として，任意の $\hat{x}$ に対して $\mathrm{Var}[\tilde{X}|\theta=\hat{x}]=\lambda^2$ であり，なおかつ $\tilde{X}$ が独立であると仮定する．このとき，θ の条件がない場合の $\tilde{X}$ の期待値と分散は，それぞれ $\mathrm{E}[\theta]$，$\mathrm{Var}[\theta]+\lambda^2$ に等しい．

この事実に基づき，$\mathrm{E}[\theta]$ および $\mathrm{Var}[\theta]$ の推定値を次のように計算することとする．ただし，以下では複数の（p 個の）$\tilde{X}$ を観測する場合を考え，その i 番目の観測値を $\hat{x}_i$ と表すものとする[6]．

まず，$\mathrm{E}[\theta]$ は，

$$\mathrm{E}[\theta]=\bar{x}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\hat{x}_i$$

として推定する．つまり，$\{\hat{x}_i\}$ の標本平均である．そして，$\mathrm{Var}[\theta]$ は，$\{\hat{x}_i\}$ の不偏分散 u^2 を

$$u^2=\frac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{p}(\hat{x}_i-\bar{x})^2$$

として計算し，これを用いて，

$$\mathrm{Var}[\theta]=u^2-\lambda^2$$

として推定する．ただし，$\mathrm{Var}[\theta]$ は正でなければならないから，$u^2\leq\lambda^2$ ならば $\mathrm{Var}(\theta)\to+0$ とする．また，λ^2 は実際には未知であるから，その推定値 $\hat{\lambda}^2$ を次式から得る．

$$\hat{\lambda}^2=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\mathrm{Var}[\tilde{X}|\theta=\hat{x}_i]$$

つまり，$\mathrm{Var}[\theta]$ は $\{\hat{x}_i\}$ の不偏分散から標準誤差の2乗の平均を引いた値として計算する．吉原（1990）では，$\mathrm{Var}[\theta]$ をこのように推定することが明示されている．

これらを用いて，$\hat{x}_i$ の修正値として次式から得る ${}^{B}\hat{\theta}_i$ を用いるモデルを，本稿では Vasicek モデルと呼び，検証対象とする．

$$\begin{aligned}{}^{B}\hat{\theta}_i&=\frac{\mathrm{Var}[\theta]\hat{x}_i+\mathrm{Var}[\tilde{X}|\theta=\hat{x}_i]\bar{x}}{\mathrm{Var}[\theta]+\mathrm{Var}[\tilde{X}|\theta=\hat{x}_i]}\\&=\begin{cases}\dfrac{(u^2-\hat{\lambda}^2)\hat{x}_i+\mathrm{Var}[\tilde{X}|\theta=\hat{x}_i]\bar{x}}{u^2-\hat{\lambda}^2+\mathrm{Var}[\tilde{X}|\theta=\hat{x}_i]} & (u^2>\hat{\lambda}^2)\\ \bar{x} & (u^2\leq\hat{\lambda}^2)\end{cases}\end{aligned}$$

Vasicek モデルは最も一般的なベイズ修正であり，相関係数の予測に限らなければ，第2章で述べたように，過去にも Elton and Gruber（1973）や Eun and Resnick（1984），金崎（1987），吉原（1990）など，多くの研究でその予測精度の高さが示されている．なお，これらの研究はいずれもベータ値の予測に Vasicek モデルを用いたものである．これは，もちろんベータ値が投資リスクの重要な評価指標であるためでもあるが，Vasicek モデルにおける仮定，すなわち推定値 $\hat{x}$ が正規分布に従うという仮定が，ベータ値の予測に適合しているためでもあるといえる．また，隅田・今井（2016）では，ベータ値の他に平均や分散の予測に Vasicek モデルを適用し，その有効性を示した．

ところで，Vasicek モデルでは $\mathrm{E}[\theta]$ および $\mathrm{Var}[\theta]$ の計算方法の導出にだけ，すべての i について $\mathrm{Var}[\tilde{X}|\theta=\hat{x}_i]=\lambda^2$ と仮定しているが，Vasicek モデルの修正値の計算自体にこれを仮定するならば，${}^{B}\hat{\theta}_i$ は次のように改められる．ただし，λ^2 は $\hat{\lambda}^2$ として推定するものとする．

$${}^{B}\hat{\theta}_i=\begin{cases}\hat{x}_i-(\hat{x}_i-\bar{x})\dfrac{\hat{\lambda}^2}{u^2} & (u^2>\hat{\lambda}^2)\\ \bar{x} & (u^2\leq\hat{\lambda}^2)\end{cases}$$

これは $u^2\geq\hat{\lambda}^2$ ならば，p の増大にともなって後述する James-Stein 推定量に近づく．実際，相関係数を z 変換した値に関しては，すべての i について $\mathrm{Var}[\tilde{X}|\theta=\hat{x}_i]=\lambda^2$ と仮定できるため，本稿の検証において Vasicek モデルと James-Stein 推定量はおよそ等しい．ゆえに，次節で James-Stein 推定量を紹介するが，James-Stein 推定量を Vasicek モデルと区別して検証することはしない．

次に Mean モデルと Historical モデルをベイズ修正の特殊なケースとして定義する[7]．そのためにまず，ディラックのデルタ関数 δ を用いて，次の（確率密度）関数 f_D および g_D を定義する．

$$f_D(\hat{\theta})=\delta(\hat{\theta}-E[\theta])$$

6　本稿においては，$\hat{x}_k$ はある銘柄組 (i,j) 間の母相関係数 $\rho_{i,j}$ を z 変換したものに対応する．また，p は $\dfrac{N_n^2-N_n}{2}$ に対応する．

7　Historical モデルはファクターモデルの特殊なケースとして定義することもでき，リスクファクターの数が $\min\{N_a-1, N_n\}$ である場合の相関係数の推定値は（誤差項がすべて0となるため）Historical モデルに一致する．

$g_D(\hat{x}, \hat{\theta}) = \delta(\hat{x} - \hat{\theta})$

このとき，$f = f_D$ と仮定でき，なおかつ g が g_D のような関数でないならば，

$\mathrm{E}[\theta | \tilde{X} = \hat{x}] = \mathrm{E}[\theta]$

である．本稿ではこれを Mean モデルと呼び，検証対象とする．ただし，E［θ］は上で定義した x によって推定するものとする．つまり，Mean モデルはすべての観測値の平均で予測するモデルである．また，Mean モデルをベイズ修正の一種として考える場合，正規性の仮定は必要ないため，Mean モデルに関しては z 変換を行わない値，すなわち標本相関係数そのものに対して適用するモデルも検証することとする．そのため，とくに区別が必要な場合，z 変換した値に対して適用するものを Mean z モデル，標本相関係数に対して適用するものを Mean rho モデルと呼ぶこととする．

一方で，$g = g_D$ と仮定でき，なおかつ f が f_D のような関数でないならば，

$\mathrm{E}[\theta | \tilde{X} = \hat{x}] = \hat{x}$

である．本稿ではこれを Historical モデルと呼び，検証対象とする．

なお，Mean モデルは Vasicek モデルにおいて Var［$\tilde{X} | \theta = \hat{x}$］→∞としたときの，Historical モデルは Vasicek モデルにおいて Var［$\tilde{X} | \theta = \hat{x}$］→＋0 としたときの極限値に等しい．

Mean モデルは Elton and Gruber（1973）や Eun and Resnick（1984），Chan et al.（1999）などでも検証されており，その計算の単純さに反した高い予測精度が示されている．隅田・今井（2016）では，株価変化率の平均の予測において，とくに効果的であることを示したが，この場合ほとんどの時点で $u^2 \leq \hat{\lambda}^2$ と推定されたため，Vasicek モデルが優れていたともいえる．また，Historical モデルは修正を加えないモデルであるから，他のモデルが Historical モデルよりも予測精度の点において優れているかが，そのモデルの有効性を判断する重要な評価基準となる．

本稿で検証するベイズ修正は，いずれも修正対象となるすべての観測値を用いて，それに適した関数 f を決定している．つまり，その観測値の期待値は，すべて同一の分布に従うことを前提としなければならない．しかし，とくに株価変化率の相関係数の予測の場合，同一業種に属する銘柄間の相関係数は，そうでないものに比べて大きくなる傾向にあることが容易に想像できる．つまり，同業銘柄間の母相関係数の分布と，異業銘柄間の母相関係数の分布とは，同一ではないと考えられる．これが正しいならば，たとえば Mean モデルによってすべての銘柄間の相関係数を，そのすべての平均で予測するよりも，2 銘柄の業種が同じものは同業銘柄間の相関係数の平均で，異なるものは異業銘柄間の相関係数の平均で予測したほうが，予測精度が高まるはずである．この後者のような予測方法は，観測値を業種に基いていくつかのグループに分類し，そのグループごとに Mean モデルを適用していることになる．同様のことが Vasicek モデルでもいえる．

本稿では，業種によって推定値を複数のグループに分類し，そのグループごとにベイズ修正を適用することで予測精度が向上するか否かについても同時に検証する．具体的には，東証 33 業種分類による業種の組が同じ銘柄組ごとにグループを作るものである．なお，この分類では，同一グループに属する標本数が極端に少ないグループが生じ得る．その場合，f の決定には不十分であると考えられるため，標本数が 10 以下であるならば，その対応する修正値に限って，グループごとではなく，全体を対象にして同様のモデルを適用した場合の修正値を用いるものとする．

これを区別するため，銘柄を分類しないものを All モデル，業種によって分類するものを Sector モデルと呼ぶことにする．Elton and Gruber（1973）では，この Sector モデルを本稿でいうところの Mean モデルとともに適用したモデルを Traditional Mean モデルとして比較対象のモデルに取り入れている．

4.3　James-Stein 推定量

本節では James-Stein 推定量の概要を述べる．ただし，上述の通り，相関係数を z 変換した値に対して適用するかぎり，その共分散を無視すれば，この推定量は結果的に Vasicek モデルにおよそ等しい．

まず，$\tilde{\mathbf{X}}$を平均ベクトル $\boldsymbol{\theta}$，共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の p 変量正規分布に従う p 変量確率ベクトルとする．すなわち，

$\tilde{\mathbf{X}} \sim N(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$

である．$\tilde{\mathbf{X}}$の観察値を$\hat{\mathbf{x}}$としたとき[8]，適当な p 次ベクトル $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ に対して，次の（$\hat{\mathbf{x}}$ から計算される $\boldsymbol{\theta}$ の）推定量 ${}^{J}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ を James-Stein 推定量と呼ぶ．

[8] 相関係数の予測では，$\boldsymbol{\theta}$ および $\hat{\mathbf{x}}$ の各成分は，それぞれ任意の銘柄間の母相関係数 ρ と標本相関係数 ${}^{a}\hat{\rho}$ に対応する．

$$ {}^{J}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{x}} - (p-2)\frac{\hat{\mathbf{x}}-\hat{\boldsymbol{\theta}}}{(\hat{\mathbf{x}}-\hat{\boldsymbol{\theta}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}-\hat{\boldsymbol{\theta}})} $$

この推定量 ${}^{J}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ について，$p \geq 3$ のとき，

$$ \mathrm{E}[({}^{J}\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}({}^{J}\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta})] < \mathrm{E}[(\hat{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\theta})] $$

であることが James and Stein（1961）で示されている．${}^{J}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ や $\hat{\mathbf{x}}$ に対する上式のような値は，この文脈でリスクと呼ばれる．

つまり，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ がどのような値であっても，${}^{J}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ のリスクは $\hat{\mathbf{x}}$ のリスクより小さい．また，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ が $\boldsymbol{\theta}$ に近いほど ${}^{J}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ のリスクは小さくなる．金崎（1987）や吉原（1990）では，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ として $\hat{\mathbf{x}}$ の標本平均を用いている．つまり，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ を次のように推定している．

$$ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{p}\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{1} $$

この場合，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ が $\hat{\mathbf{x}}$ の関数となるため，${}^{J}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ のリスクが若干異なり，上述の ${}^{J}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ の推定量が最適なものではなくなる．計算は省略するが，次の推定量に改めることで，$p \geq 4$ において上のリスクに関する不等式を満たすことができる．なお，この場合では $p=3$ の場合，等式として満たされる．

$$ {}^{J}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{x}} - (p-3)\frac{\hat{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{x}}}{(\hat{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{x}})} $$

さらに，λ^2 を適当な定数として，$\boldsymbol{\Sigma}=\lambda^2\mathbf{E}$ と仮定することができるならば，リスクは MSE の期待値の $\frac{p}{\lambda^2}$ 倍に一致するため，${}^{J}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ のような推定量は MSE の期待値を小さくする推定量であるといえることになる．相関係数を z 変換した値の予測において，この仮定は $\boldsymbol{\Sigma}$ の対角成分に関して妥当である．金崎（1987）や吉原（1990）では，λ^2 として $\hat{\mathbf{x}}$ の標準誤差の 2 乗の平均を用いている．つまり，この推定値を $\hat{\lambda}^2$ とすれば，

$$ \hat{\lambda}^2 = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\mathrm{Var}[\tilde{\mathbf{X}}_i|\boldsymbol{\theta}_i=\hat{\mathbf{x}}_i] $$

である．

これらのことから，この場合の ${}^{J}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ は次のように改められる．

$$ \begin{aligned} {}^{J}\hat{\boldsymbol{\theta}} &= \hat{\mathbf{x}} - (p-3)\frac{\hat{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{x}}}{(\hat{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}(\hat{\lambda}^2\mathbf{E})^{-1}(\hat{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{x}})} \\ &= \hat{\mathbf{x}} - (p-3)\frac{(\hat{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{x}})\hat{\lambda}^2}{\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}-p\bar{\mathbf{x}}^2} \end{aligned} $$

James-Stein 推定量は金崎（1987）や吉原（1990）でベータ値の予測に対して用いられており，Vasicek モデルと同等の予測精度が示されている．

4.4　フィッシャーの z 変換

本節では z 変換について述べるが，これは相関係数の予測モデルではない．この変換を行った値に関して，上に述べたベイズ修正や James-Stein 推定量を用いて予測し，修正後に逆変換することで相関係数を予測する方法を考える．これは z 変換によって，ベイズ修正や James-Stein 推定量における仮定の一部を妥当なものにすることができるためである．ただし，上述の通り，Mean モデルに関しては z 変換を行わない値に対しても適用し，それを Mean rho モデルと呼び検証する．

z 変換とは標本相関係数 $\hat{\rho}_{i,j}$ に対する次のような変換 z である．

$$ z(\hat{\rho}_{i,j}) = \tanh^{-1}(\hat{\rho}_{i,j}) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\hat{\rho}_{i,j}}{1-\hat{\rho}_{i,j}}\right) $$

ゆえに，逆変換 z^{-1} は，

$$ z^{-1}(\hat{z}) = \tanh(\hat{z}) = \frac{\exp(\hat{z})-\exp(-\hat{z})}{\exp(\hat{z})+\exp(-\hat{z})} $$

である．

母相関係数が $\rho_{i,j}$，標本数が N_a のとき，$z(\hat{\rho}_{i,j})$ は平均 $z(\rho_{i,j})$，分散 $(N_a-3)^{-1}$ の正規分布に近似的に従う．このことを利用すれば，Vasicek モデルや James-Stein 推定量における仮定の不都合をいくらか解消できる．すなわち，観測値 $\hat{x}$（あるいは $\hat{\mathbf{x}}$ の各成分）が正規分布に従うという仮定と，それらの標準誤差が真の値 θ（あるいは $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ の各成分）によらずに定まるという仮定である．

さらに，観測値が正規分布に従うため，真の値が従う分布の確率密度関数 f が正規分布の確率密度関数であるという Vasicek モデルの仮定も，それほど非現実的なものではなくなるだろう．また，標準誤差が観測値や真の値によらず常に $\sqrt{(N_a-3)^{-1}}$ で一定であるため，$u^2 > \hat{\lambda}^2$ であるかぎり，すなわち観測値の分散が標準誤差の 2 乗 $(N_a-3)^{-1}$ よりも大きいかぎり，Vasicek モデルの予測値は James-Stein 推定量とほとんど同じ値となる．

5. 検証結果

5.1　ファクターモデル

5.1.1　回帰係数自体の修正効果

本節ではファクターモデルにおいていずれのリスクファクターを用いる場合が最も予測精度が高くなるかを検証する．その際，回帰係数や分散の修正は考慮しない

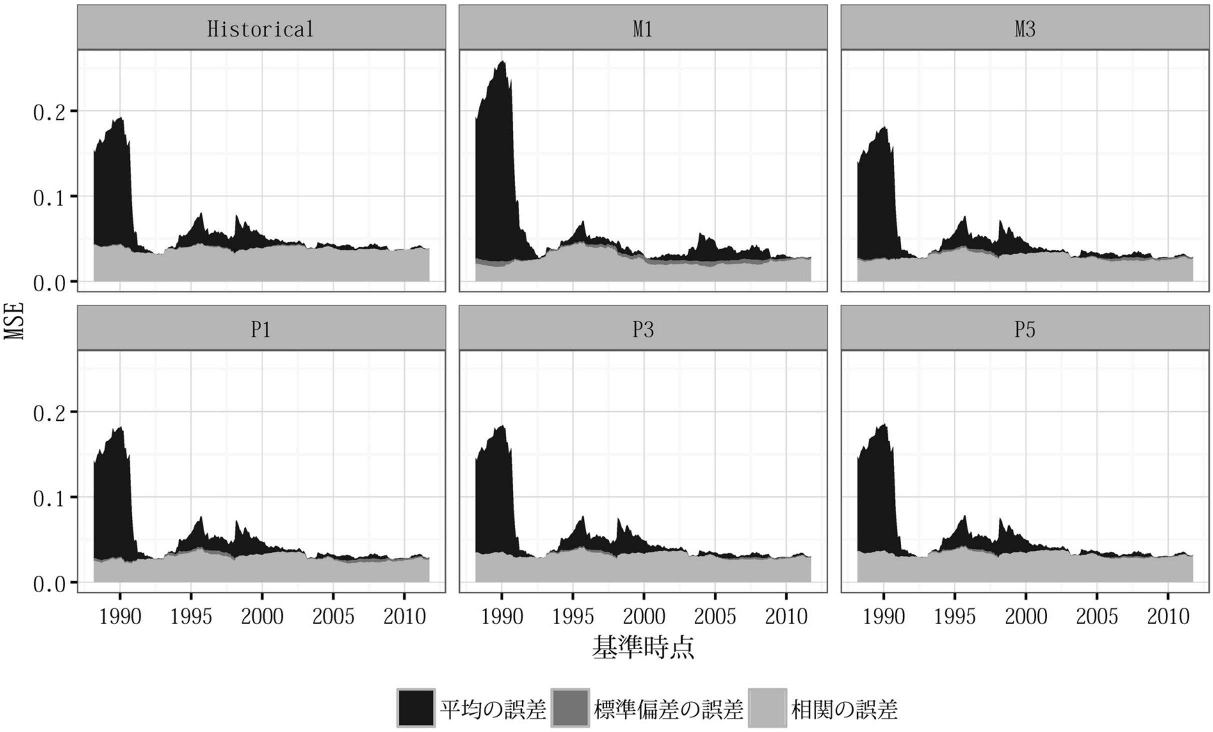

図 1　N_a＝60 のときの MSE の各成分の推移（ファクターモデル）

ため，本節中においてはとくに明記しないかぎり，すべて BH-VH モデルを指す．

図 1 は N_a＝60 のときの各ファクターモデルの MSE の推移を「平均の誤差」，「標準偏差の誤差」，「相関の誤差」ごとに示したものである．これらの成分の和は MSE に等しいため，図は MSE 自体の推移も示している．

いずれのモデルでも，相関の誤差が MSE の大部分を占めており，一方で標準偏差の誤差は極めて小さい．とくに Historical モデルでは標準偏差の誤差が常にほとんど 0 である．ただし，MSE の値の変動は平均の誤差によるところが大きいようである．平均の誤差は他に比較して明らかに変動が激しい．平均の誤差はいずれのモデルでも 1980 年代末から 1990 年代初頭にかけて著しく大きい．これは，この時期に市場全体の相関係数の水準に大きな変化が生じたことを意味する．その大きさは，M3，P1，P3，P5 モデルではモデル間に大きな差はみられず，いずれも Historical モデルと同程度であるが，M1 モデルは明らかに Historical モデルよりも大きい．その他の時期であっても，M3，P1，P3，P5 モデルは Historical モデルと似た推移をしているが，M1 モデルはやや異なる変動をしている．M1 モデルの平均の誤差は 2000 年代全体を通して比較的大きい傾向にあるが，他のモデルではこの傾向がみられない．

M1 モデルの平均の誤差は，1990 年代後半を除いて，おおむね他のモデルよりも大きいようであるから，予測値全体の平均を調整するような修正は，M1 モデルにおいて最も効果的であると思われる．

図 2 には Historical モデルに対する MSE の比率の推移を示した．

M3，P1，P3，P5 モデルは非常によく似た変動をしており，いずれのモデルであっても常に 1 を下回っている．すなわち，少なくとも Historical モデルよりは予測精度が高い．その中でも M3 モデルは，他よりわずかながら小さい水準を推移している時期が目立つ．一方で M1 モデルは変動が非常に激しく，1 を大きく上回る時期もあれば，大きく下回る時期もある．この意味で M1 モデルが相関係数の予測の点において優れているとは言い難い．

P1，P3，P5 モデルは似た推移をしているものの，とくに N_a が小さいときにわかりやすいが，P1 モデルが最小であり，P5 モデルが最大であることが多い．つまり，主成分得点をリスクファクターとするならば，その系列数は 1 で十分であり，より多くの系列を採用するとむしろ予測精度が下がるようである．

表 1 には MSE の中央値，平均，標準偏差を示した．事前期間の長さ N_a ごとに，最大値および最小値をそれぞれ濃い灰色と薄い灰色の背景で示している．ただし，Historical モデルは最大値や最小値の対象に含めていない．なお，MSE は予測対象によって非常に小さな値となり得るため，表頭の統計量とともに記した値を乗じて

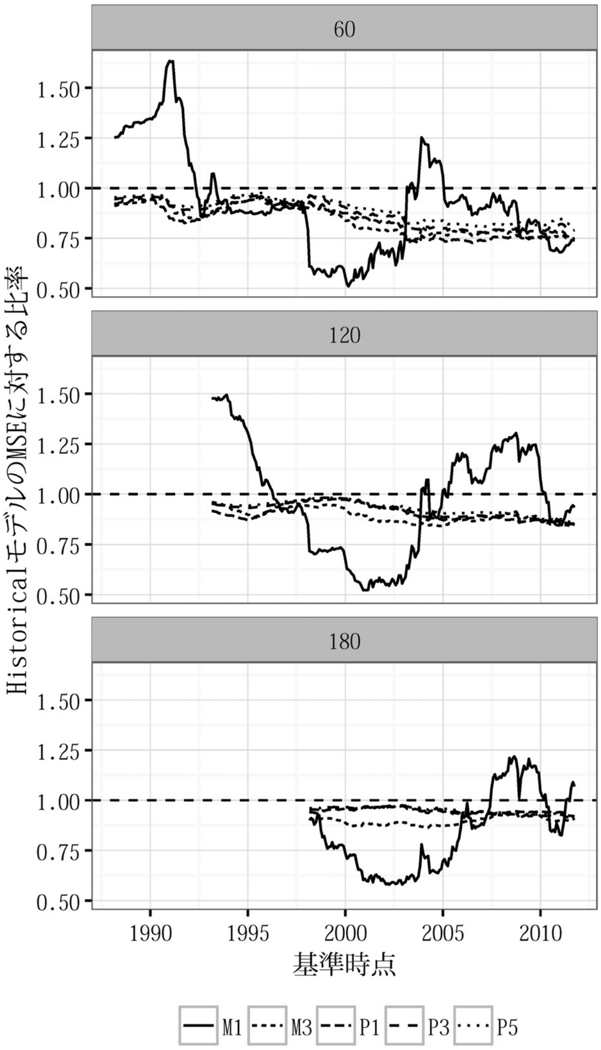

図 2　Historical モデルの MSE に対する比率（ファクターモデル）

示している．また，分散や回帰係数を修正したモデルである BH-VV モデルや BV-VH モデル，BV-VV モデルの結果も併載している．

分散や回帰係数を修正しない BH-VH モデルの部分だけをみるが，中央値や平均は M1 モデルを除いていずれのモデルであっても Historical モデルよりは小さい．つまり，いずれのモデルであっても予測精度が多少なりとも改善されているといえる．M1 モデルも N_a=180 ならば中央値，平均ともに Historical モデルより小さい．それだけでなく，このとき M1 モデルの中央値と平均はすべてのモデルの中で最小である．

図 2 からも読み取れたが，P1，P3，P5 モデルの中央値および平均は，すべて P1 モデルが最小であり，P5 モデルが最大である．また，P1 モデルと M3 モデルとを比較すると，平均と中央値で大小関係が一致せず，判断が難しい．

表 2 には MSE の差の検定結果を示した．1% 水準で有意なもの，5% 水準で有意なもの，5% 水準でも有意でないものの順に，それぞれ白色，薄い灰色，濃い灰色の背景で示している．表中の数字は表頭のモデルの MSE が表側のモデルの MSE よりも小さかった時点の割合である（単位はパーセント）．検定結果が有意であってこの値が 100 に近いならば，表頭のモデルのほうが優れていると判断できるだろう．以下，この値を優位な割合と呼ぶことにし，モデル A がモデル B に対して優位な割合といった場合（文脈からモデルが明らかな場合は単に優位な割合と省略する），表頭がモデル A かつ表側がモデル B であるような箇所の値を示すこととする．この表現は次節以降に示す同様の表と共通して用いる．

Historical モデルと比較すると，N_a=120 の場合の M1 モデルを除いてすべて 1% 水準で有意であり，優位な割合も，とくに M1 モデル以外のモデルでは常に 100 と極めて大きい．つまり，M1 モデルの例外を除いて，これらのモデルによって予測精度が明らかに向上するといえる．

P1，P3，P5 モデルを比較すると，ほとんどのケースで差が有意でなく，いずれを用いても大きな差はないといえる．つまり，主成分得点をリスクファクターとするならば，その系列数は，相関係数の予測精度にあまり影響を及ぼさないといえる．優位な割合や計算の単純さを考えれば，P1 モデルが適していると判断することもできる．

図 1 や図 2 でみたように，M3 モデルの MSE は P1，P3，P5 モデルと似たような推移をしているが，検定結果からも多くのケースでその差が有意でないことがわかる．つまり，M3 モデルによる相関係数の予測精度は，P1 モデルでも達成できるといえる．ただし，N_a=180 の場合には，P1，P3，P5 モデルのいずれに対しても差が 5% 水準で有意であり，そのときの M3 モデルの優位な割合は十分 100 に近い．

M1 モデルは，N_a=180 のとき，他のすべてのモデルとの差が有意であり，優位な割合がどちらかといえば 100 に近い．一方で，そうでない場合には，Historical モデルを除くいずれのモデルと比較しても差が有意でない．

これらのことから，ファクターモデルの中では，N_a が十分に大きいならば M1 モデルが適しているが，そうでないならばいずれを用いてもほとんど変わらないといえる．ただし，$N_a \leq 120$ のとき，M3 モデルが優位な割合はすべてのモデルに対して 50 よりは大きいため，これまでの予測精度を重視して選ぶならば，M3 モデルが最適であるといえる．

表 1　ファクターモデルの MSE の要約統計量

	中央値（10^1）			平均（10^1）			標準偏差（10^1）		
	60	120	180	60	120	180	60	120	180
—									
Historical	.45119	.39010	.34668	.61310	.43125	.35922	.41343	.11999	.05260
BH-VH									
M1	.39147	.41368	.28593	.62064	.40536	.29104	.61936	.13099	.03673
M3	.36367	.34851	.30815	.53336	.38722	.32141	.40352	.12124	.04371
P1	.37048	.34316	.32438	.53256	.39517	.34074	.40458	.12748	.05412
P3	.38543	.36023	.33041	.55101	.40085	.34088	.40992	.12801	.05628
P5	.39546	.36505	.33255	.56079	.40429	.34201	.41090	.12681	.05505
BH-VV									
M1	.37964	.40782	.28270	.61740	.39991	.28776	.61903	.12830	.03597
M3	.37539	.34383	.31121	.54140	.38940	.32513	.39915	.12636	.04589
P1	.39050	.33668	.32721	.54095	.39822	.34546	.40035	.13379	.05667
P3	.40834	.35113	.33138	.56142	.40437	.34588	.40572	.13381	.05867
P5	.41917	.35545	.33392	.57199	.40796	.34704	.40647	.13256	.05743
BV-VH									
M1	.38156	.41856	.29193	.60843	.40768	.29619	.60734	.12951	.03801
M3	.32608	.34297	.29970	.50636	.37849	.31285	.39295	.12680	.04794
P1	.33729	.35411	.32458	.50998	.39054	.33351	.38870	.13056	.05587
P3	.34118	.36141	.32400	.51643	.39029	.33030	.39559	.13062	.05695
P5	.34455	.36212	.32520	.51971	.39062	.32997	.39871	.12968	.05584
BV-VV									
M1	.37230	.41181	.28829	.59826	.40012	.29174	.60869	.12673	.03746
M3	.31526	.33812	.29955	.49924	.37500	.31308	.39173	.12955	.04948
P1	.33928	.33876	.32494	.50658	.38922	.33567	.38727	.13492	.05787
P3	.34377	.34741	.32470	.51393	.38924	.33262	.39407	.13483	.05889
P5	.34729	.34805	.32550	.51780	.38973	.33238	.39708	.13399	.05778

表 2　ファクターモデルにおける有意差の検定結果

	Historical			**M1**			**M3**			**P1**			**P3**			**P5**		
	60	120	180	60	120	180	60	120	180	60	120	180	60	120	180	60	120	180
Historical				74	54	76	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
M1	26	46	24				57	62	34	56	58	27	52	58	29	50	55	27
M3	0	0	0	43	38	66				44	25	0	2	13	7	0	10	1
P1	0	0	0	44	42	73	56	75	100				0	12	43	0	1	39
P3	0	0	0	48	42	71	98	87	93	100	88	57				0	3	31
P5	0	0	0	50	45	73	100	90	99	100	99	61	100	97	69			

5.1.2　回帰係数を修正する効果

本節ではファクターモデルにおいて，Vasicek モデルによって修正された分散や回帰係数を用いることで，相関係数の予測精度がさらに高まるか否かを検証する．

図 3 には BH-VH モデルに対する MSE の比率の推移を示した．図 2 と異なり，BH-VH モデルとの比較であり，これが 1 を下回るならば，分散や回帰係数を修正したことによって予測精度が向上していることを示す．

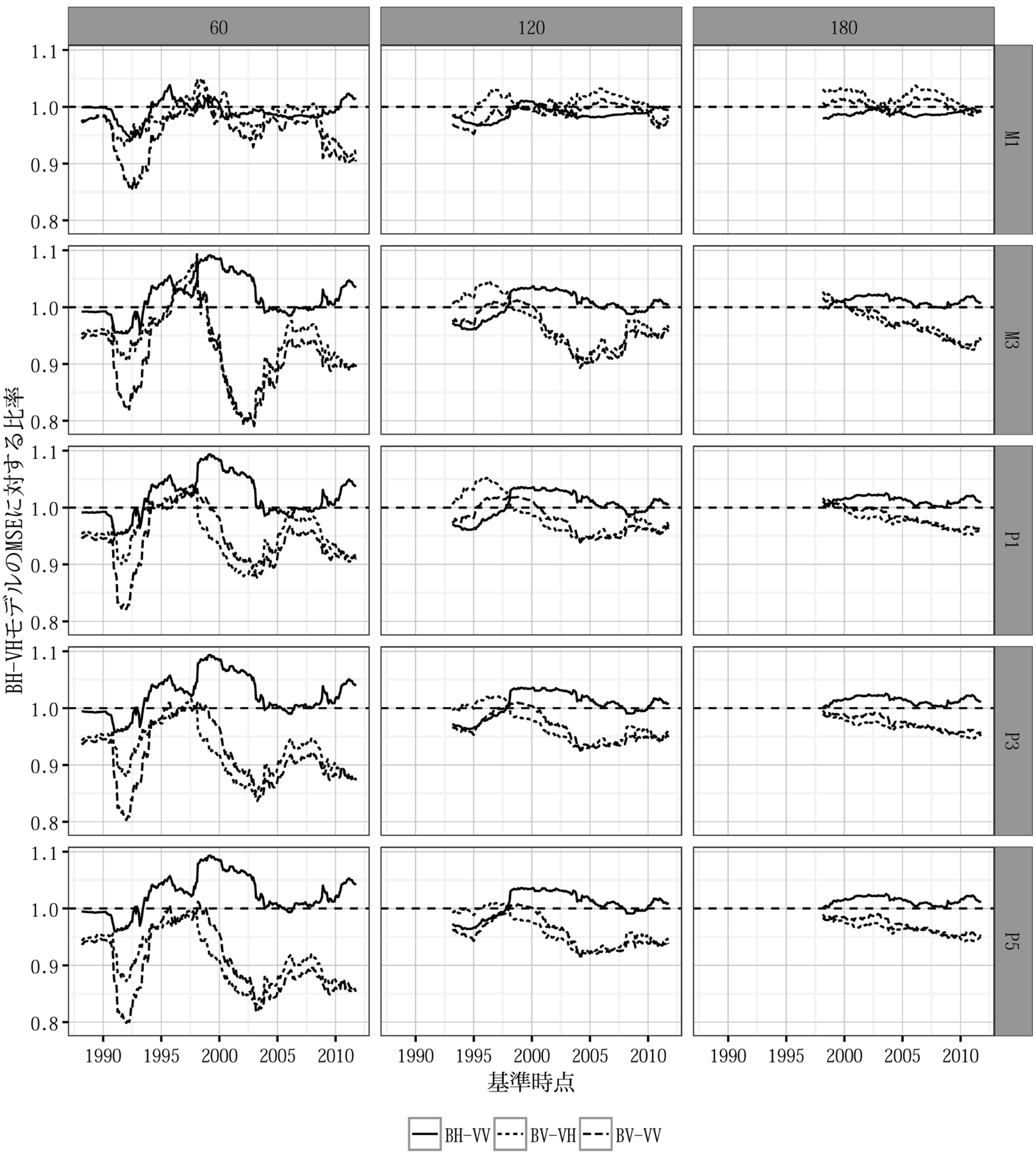

図 3　BH-VH モデルの MSE に対する比率

いずれのモデルであっても，N_a が大きくなるに従って変動が安定するようになっている．また，BV-VH モデルと BV-VV モデルが似た変動をしているのに対して，BH-VV モデルは BV-VH モデルや BV-VV モデルと異なる変動をしており，また，その水準は比較的 1 に近い．これは分散の修正がほとんど無意味であることを示唆する．とくに M1 モデル以外のモデルでは多くの時期で分散だけを修正することで，すなわち BH-VV モデルを用いることで，予測精度が悪化している．

回帰係数を修正する BV-VH モデルや BV-VV モデルは，M1 モデル以外のモデルについて，とくに N_a が大きい場合は 1 を下回る時期が多く，多少なりとも修正の効果があるといえるだろう．しかし，その水準は N_a＝180 の場合に BH-VH モデルの MSE を 5％ 程度改善させる程度であり，あまり効果的とはいえそうにない．

表 1 には，分散や回帰係数を修正した場合の MSE の中央値や平均，標準偏差も示しているが，これをみると確かに BV-VH モデルや BV-VV モデルの MSE の中央

表 3　ベータ値や分散の修正による有意差の検定結果

	BH-VH			BH-VV			BV-VH			BV-VV		
	60	120	180	60	120	180	60	120	180	60	120	180
BH-VH												
M1				72	85	99	77	33	12	95	82	42
M3				41	42	10	87	72	85	86	77	84
P1				44	38	0	85	73	90	80	71	84
P3				28	36	0	95	78	100	93	87	100
P5				25	36	0	100	86	100	98	89	100
BH-VV												
M1	28	15	1				63	21	8	92	49	21
M3	59	58	90				92	73	92	93	73	92
P1	56	62	100				92	73	95	99	73	95
P3	72	64	100				100	74	100	100	88	100
P5	75	64	100				100	75	100	100	100	100
BV-VH												
M1	23	67	88	37	79	92				99	99	100
M3	13	28	15	8	27	8				74	70	49
P1	15	27	10	8	27	5				68	62	21
P3	5	22	0	0	26	0				66	62	20
P5	0	14	0	0	25	0				64	60	19
BV-VV												
M1	5	18	58	8	51	79	1	1	0			
M3	14	23	16	7	27	8	26	30	51			
P1	20	29	16	1	27	5	32	38	79			
P3	7	13	0	0	12	0	34	38	80			
P5	2	11	0	0	0	0	36	40	81			

値や平均は，BH-VH モデルよりも若干小さくなっているようである．一方で，BH-VV モデルの中央値や平均は BH-VH モデルとの差が更に小さいか，あるいは BH-VH モデルよりも大きくなっているケースが多いことがわかる．

表 3 には MSE の差の検定結果を示した．表の見方は表 2 と同様である．

どのモデルについても，BH-VH モデルと BH-VV モデルとの比較および BV-VH モデルと BV-VV モデルとの比較では，すべて有意でない．つまり，分散を修正するか否かは予測精度に影響しないといえる．また，M1 モデルに関してはいずれのモデル間でも有意でなく，M1 モデルを用いる場合は分散や回帰係数の修正が必要ないといえる．

BH-VV モデルと BV-VH モデルや BV-VV モデルとを比較すると，N_a=120 の場合にはいずれのモデルでも差が有意でないが，そうでない場合には 5％水準で有意であるケースが多い．そして，有意であるか否かを問わず BH-VV モデルの優位な割合は 0 に近い．つまり，分散の修正効果は回帰係数よりも明らかに小さく，分散を修正するならば同時に回帰係数を修正することで予測精度を改善できるといえる．これらの点からも，分散を修正する必要はないと判断できる．

BH-VH モデルと BV-VH モデルや BV-VV モデルとを比較すると，N_a が大きいとき有意な例がほとんどないが（とくに有意水準を 1％とすればすべて有意でないが），N_a=60 の場合は少なくとも 5％水準で有意なモデルが多く，BH-VH モデルが優位な割合は 0 に近い．つまり，N_a があまり大きくないならば，分散の修正の有無を問わず，回帰係数を修正することで相関係数の予測精度を改善することができるといえる．

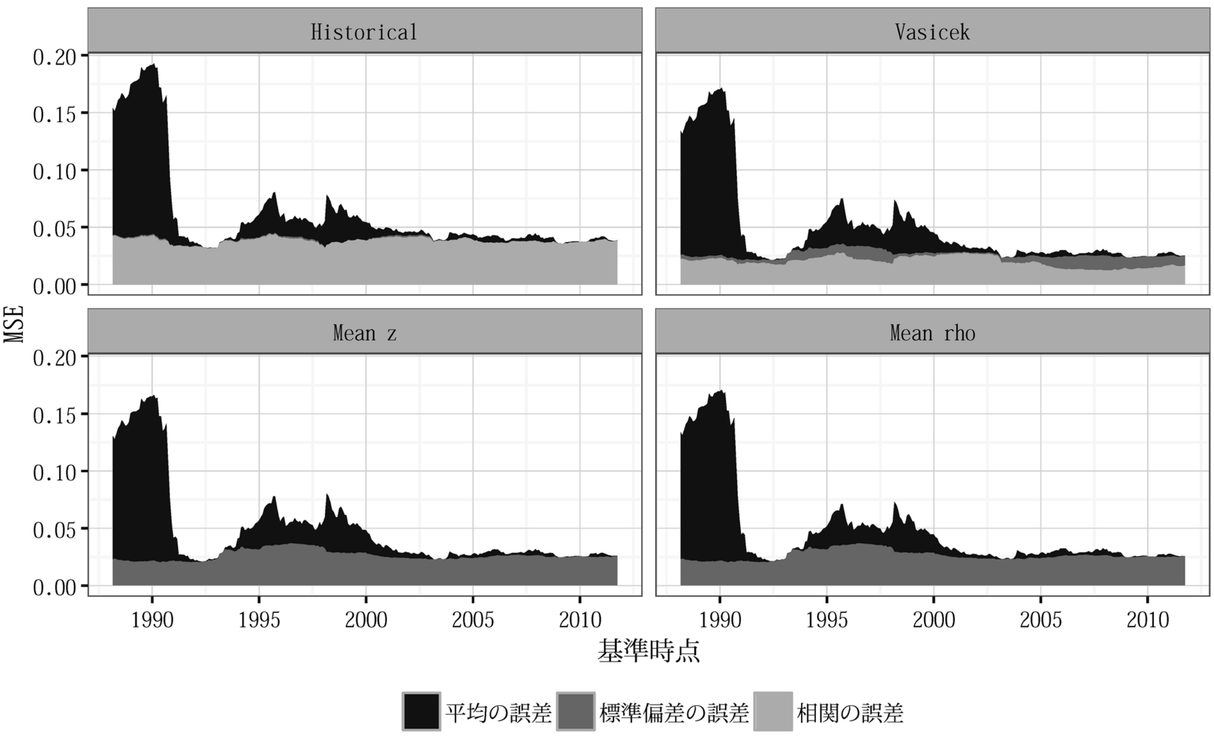

図 4　N_a＝60 のときの MSE の各成分の推移（ベイズモ修正）

5.2　ベイズ修正

5.2.1　ベイズ修正の効果

本節ではベイズ修正を適用することで予測精度が高まるか否かについて検証する．なお，ベイズ修正は第 4 章で業種の組ごとに適用する Sector モデルとすべてまとめて適用する All モデルとを定義したが，本節では All モデルについてだけ述べ，Sector モデルを用いることの効果については次節で検証する．ゆえに，本節ではとくに明記しないかぎり All モデルを指すものとする．

まず，図 4 には図 1 と同様に，N_a＝60 のときの各モデルの MSE の推移を「平均の誤差」，「標準偏差の誤差」，「相関の誤差」ごとに示した．

Vasicek モデルも Mean モデルも，Historical モデルに比べて標準偏差の誤差が大きいことがわかる．これらのモデルは推定値をその全体の平均ないしは中心付近に近づけるような修正となるため，予測値の標準偏差は元の推定値よりも小さくなる．さらに，Historical モデルの標準偏差の誤差が極めて小さかったことを考えると，本来予測精度の高かった予測値全体の標準偏差をより小さなものに改めて予測しているのであるから，標準偏差の誤差は大きくなるのが当然である．

とくに，Mean モデルは標準偏差の誤差が極めて大きく，代わりに相関の誤差が 0 である．これは Mean モデルの予測値の標準偏差が 0 であり，事後の値との共分散が 0 であるためである．つまり，Mean モデルにおける標準偏差の誤差は（事後の値の）分散の推移を表しており，これが経時的に安定していることが，Historical モデルにおける標準偏差の誤差の小ささにつながる．

これらのモデル間ではとくに大きな差はみられず，各誤差の変動もおおむね同じようである．すなわち，平均の誤差は 1990 年前後と 1990 年代後半に著しく大きく，標準偏差の誤差は 1990 年前後と 2000 年前後に比較的小さいというような傾向などは同様である．また，その程度もモデル間であまり変わらない．

図 5 には図 2 と同様に Historical モデルに対する MSE の比率の推移を示した．

ファクターモデルの場合（図 2）と異なり，Vasicek モデルも Mean モデルもともにほとんどの時点で 1 を下回っており，少なくとも Historical モデルよりは予測精度が高いことがわかる．いずれのモデルも似たような推移をしているが，Mean z モデルは 1 を超える時期もあり，他と比べてこの比率の水準が大きな時期が目立つ．つまり，これら 3 つのモデルの中では，やや予測精度が劣るようである．

表 4 には表 1 と同様に MSE の中央値，平均，標準偏差を示した．なお，Sector モデルの結果も併載している．

図 5 からも推察されるように，Vasicek モデルも Mean モデルも，MSE の中央値や平均は Historical モデルよりも小さい．しかし，Vasicek モデル，Mean z モデル，

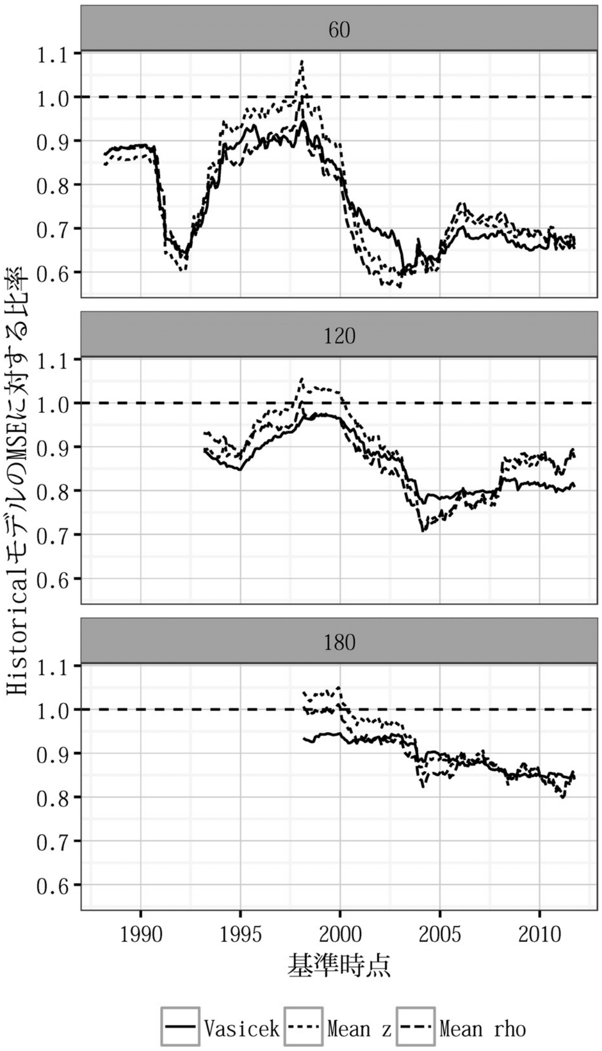

図 5　Historical モデルの MSE に対する比率（ベイズ修正）

Mean rho モデルの中で，MSE の平均が最小あるいは最大であるモデルを特定するのは難しい．平均をみれば Mean z モデルは N_a を問わず最大であるが，中央値では必ずしもそうではない．この表をみるかぎりでは，これらのモデルが Historical モデルより優れることはわかるものの，いずれのモデルが最も予測精度が高いかは判断し難い．

ただし，Mean z モデルの中央値や平均は，わずかな差ではあるものの，Mean rho モデルより大きい傾向にあるため，推定値全体を平均化する Mean モデルを用いる場合，z 変換は必要ないと判断できる．

表 5 には表 2 と同様に MSE の差の検定結果を示した．

Vasicek モデルも Mean モデルも，Historical モデルと比較すると 1% 水準で有意であって，Historical モデルが優位な割合は十分 0 に近い．ゆえに，これらのモデルは相関係数の予測精度を有意に改善することができるといえる．

しかし，これら 3 つのモデル間で比較した場合，すべて 5% 水準でさえ有意でない．ゆえに，これらのモデルの中ではいずれのモデルを用いても相関係数の予測精度に大きな違いは生じないといえる．これらのモデルの中では Mean rho モデルが最も計算が簡単で，なおかつ利用しやすいモデルであるから，このモデルが相関係数の予測に最も適しているといえるだろう．

5.2.2　業種ごとに修正することの効果

本節ではベイズ修正を業種ごとに適用すること，すなわち Sector モデルとして定義したモデルを用いることによる予測精度の変化について検証する．

図 6 には All モデルに対する MSE の比率の推移を示した．図 5 と異なり，All モデルとの比較である．いずれのモデルであっても 1 よりやや下を推移する傾向にある．ゆえに，Sector モデルを用いることで多少なりとも予測精度が高まることがわかる．ただし，1990 年前後および 2010 年代には 1 を上回るケースがみられる．Mean モデルにおけるこの比率の変動は，Vasicek モデルに比べて明らかに激しく，Vasicek モデルでは最大でも 5% 程度の改善しか見られないが，Mean モデルでは 10% 以上改善する時期もある．

Mean モデルでは N_a が大きいほど効果的に改善するが，これはより多くの事前期間のデータを用いたほうが標準誤差が小さくなり，（業種の組ごとに母相関係数の分布が明確に異なるならば）業種の組ごとの母相関係数の分布の違いが，推定される相関係数に現れやすくなるためだと考えられる．

表 4 には Sector モデルの結果も示したが，これをみると実際に MSE の中央値や平均は例外なく All モデルよりも Sector モデルのほうが小さくなっていることがわかる．つまり，いずれのモデルでも業種ごとに修正を行うことで予測精度が若干向上するといえる．

また，Sector モデルにおいて，Vasicek モデルの MSE の中央値や平均は常に最大である．ゆえに，前節では Mean rho モデルに他のモデルとの有意差がないことから最適なモデルと結論づけたが，Sector モデルを用いるならば MSE の中央値や平均で判断しても，Vasicek モデルよりは優れるといえる．

表 6 には表 3 と同様に MSE の差の検定結果を示した．

Vasicek モデルは All モデルと Sector モデルとの差が 5% 水準でも有意でない．つまり，Vasicek モデルは業種ごとに適用する必要がないといえる．

一方で，Mean モデルは N_a=120 の場合には 5% 水準で有意であり，N_a=180 では 1% 水準でも有意差が認め

表 4　ベイズ修正の MSE の要約統計量

	中央値（10^1）			平均（10^1）			標準偏差（10^1）		
	60	120	180	60	120	180	60	120	180
—									
Historical	.45119	.39010	.34668	.61310	.43125	.35922	.41343	.11999	.05260
All									
Vasicek	.31464	.33353	.31535	.49139	.37769	.32306	.39183	.13350	.05932
Mean z	.30475	.34686	.31267	.49555	.38972	.33195	.38126	.14660	.06882
Mean rho	.30710	.34596	.30203	.48839	.38107	.32359	.39178	.13385	.06157
Sector									
Vasicek	.30851	.32737	.30812	.48710	.37091	.31759	.39894	.13280	.05885
Mean z	.29193	.32573	.29195	.48531	.36925	.31392	.39404	.14158	.06514
Mean rho	.29225	.32732	.28336	.47830	.36173	.30683	.40257	.13115	.05941

表 5　ベイズ修正における有意差の検定結果

	Historical			**Vasicek**			**Mean z**			**Mean rho**		
	60	120	180	60	120	180	60	120	180	60	120	180
Historical				100	100	100	98	86	84	100	100	96
Vasicek	0	0	0				39	26	34	47	43	47
Mean z	2	14	16	61	74	66				53	57	76
Mean rho	0	0	4	53	57	53	47	43	24			

られる．また，Sector モデルが優位な割合は十分 100 に近い．つまり，Mean モデルを用いる場合，N_a が十分に大きければ，Sector モデルを適用することで予測精度のさらなる向上が期待できるといえる．すなわち，相関係数（あるいはそれを z 変換したもの）を業種組ごとの平均でもって予測すべきだということである．

なお，有意差の検定等は行っていないが，表 4 と表 1 をみれば，Sector モデルを適用したときの Mean モデルの MSE の中央値や平均は，$N_a \leq 120$ の場合に，ファクターモデルも含めた他のすべてのモデルよりも小さいことがわかる．$N_a = 180$ の場合にも M1 モデルに次ぐ水準である．Mean モデルが計算の単純さに反して高い予測精度を示す結果は，Elton and Gruber（1973）や Eun and Resnick（1984）でも示されている．

6. おわりに

本稿では株価変化率の銘柄間の相関係数の予測について，一般的な推定量（Historical モデル）でもって予測する場合と，ファクターモデルに従って予測する場合，および相関係数を z 変換した値にベイズ修正（全体の平均で予測する Mean モデルを含む）を適用する場合とで，予測精度がいかに異なるかを検証した．また，ファクターモデルに従って予測する場合では，その際に分散や回帰係数に対してベイズ修正を適用することで予測精度が向上するか否かについても検証し，ベイズ修正を適用する場合では，対象とするすべての銘柄組に対してその修正を適用するか（All モデル），あるいは業種組ごとに適用するか（Sector モデル）の違いによる予測精度の差についても検証した．

検証結果から主として次の 4 つの結論を得た．これは第 3 章 2 節で挙げた 4 つの目的に対する結論である．

第一に，ファクターモデルに従い，誤差項間の相関を除外して相関係数を予測する場合，リスクファクターの選択として最も適したモデルは，事前期間が長く過去のデータが 180ヶ月分程度利用できるならば株価指数（本稿では野村スタイルインデックスの Total Market インデックス）の変化率だけを用いるモデル（M1 モデル）であるが，事前期間が短いならばいずれのモデルであっても大きな違いはない．ただし，基本的にいずれのモデルも予測精度は改善されるため，ファクターモデル自体は相関係数の予測に有効である．

第二に，ファクターモデルに従って相関係数を予測するとき，予測精度を向上させるためには，その計算に用いる回帰係数の予測にベイズ修正（Vasicek モデル）を

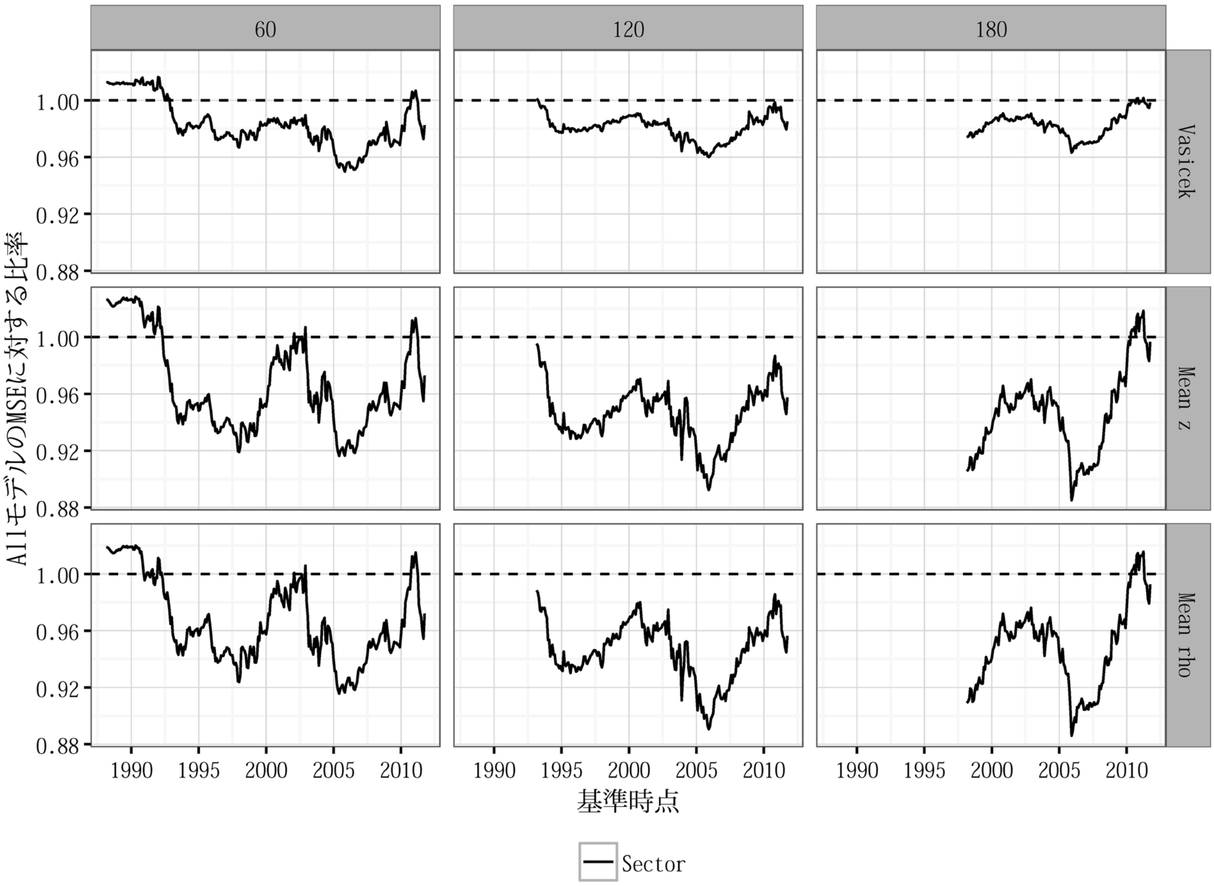

図 6　All モデルの MSE に対する比率

表 6　All モデルと Sector モデルとの有意差の検定結果

	All			Sector		
	60	120	180	60	120	180
All						
Vasicek				78	99	98
Mean z				79	100	93
Mean rho				83	100	93
Sector						
Vasicek	22	1	2			
Mean z	21	0	7			
Mean rho	17	0	7			

適用すべきであるが，分散の予測に対して修正を行っても予測精度はほとんど改善されない．

第三に，本稿でベイズ修正として検証した Vasicek モデルと Mean モデルは，いずれも少なからず相関係数の予測精度を向上させることができる．しかし，これらの間では予測精度に大きな差がなく，いずれを用いても予測精度はあまり変わらない．計算と利用のしやすさから考えれば，z 変換しない値に対してすべての推定値を平均して予測する Mean rho モデルが適しているといえる．

第四に，ベイズ修正のように予測値全体をその平均付近に縮小するような修正では，業種の組ごとに適用することで予測精度が若干高まるが，Vasicek モデルの場合，その差はわずかであり，そのような適用を行う必要はない．しかし，Mean モデルを用いる場合には明白な効果があり，とくに過去のデータが多く利用できるならば，業種の組ごとに Mean モデルを適用すべきである．

本稿では，モデルの優劣を MSE によって比較したが，MSE が改善されたモデルであっても，銘柄の組によっては常に予測精度が悪化しているようなものが存在してもおかしくない．これは相関係数だけでなく，回帰係数や分散の予測についてもいえることだが，もしそのような銘柄あるいは銘柄組が存在するならば，それにどのような特徴があるかという点は興味深い．また，相関係数はポートフォリオを構成する際に重要な役割を果たす指標であり，ポートフォリオのリスクに影響を与えることになるが，この予測精度の改善がポートフォリオのリスクをいかに改善するかという点も検証する必要があるだろう．これらの検証を今後の課題としたい．

参考文献

金崎芳輔（1987）「修正ベータの有効性の検証」『証券アナリストジャーナル』第 25 巻第 11 号 62-75 頁.

隅田誠・今井英彦（2016）「平均，分散，ベータ係数のベイズ修正効果」『武蔵大学論集』第 64 巻第 1 号 77-101 頁.

吉原正善（1990）「日本市場における β 値の実証研究」『証券アナリストジャーナル』第 28 巻第 8 号 34-50 頁.

Chan, Louis K.C., Karceski, Jason and Lakonishok, Josef (1999) “On Portfolio Optimization: Forecasting Covariances and Choosing the Risk Model,” *The Review of Financial Studies*, Vol. 12, No. 5, pp 937-974.

Elton, Edwin J. and Gruber, Martin J. (1973) “Estimating the Dependence Structure of Share Prices – Implications for Portfolio Selection,” *The Journal of Finance*, Vol. 28, No. 5, pp. 1203-1232.

Elton, Edwin J. and Gruber, Martin J. (1978) “Are Betas Best?” *The Journal of Finance*, Vol. 33, No. 5, pp. 1375-1384.

Eun, Cheol S. and Resnick, Bruce G. (1984) “Estimating the Correlation Structure of International Share Prices,” *The Journal of Finance*, Vol. 39, No. 5, pp. 1311-1324.

Fama, Eugene F. and French, Kenneth R. (1993) “Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds,” *Journal of Financial Economics*, Vol. 33, No. 1, pp. 3-56.

James, W. and Stein, Charles (1961) “Estimation with Quadratic Loss,” *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Vol. 1, pp. 361-379.

Ledioit, O. and Wolf, M. (2003) “Improved Estimation of the Covariance Matrix of Stock Returns with an Application to Portfolio Selection,” *Journal of Empirical Finance*, Vol. 10, No. 5, pp. 603-621.

Ledioit, O. and Wolf, M. (2004) “Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix,” *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 30, No. 4, pp. 110-119.

Vasicek, Oldrich A. (1973) “A Note on Using Cross-Sectional Information in Bayesian Estimation of Security Betas,” *The Journal of Finance*, Vol. 28, No. 5, pp. 1233-1239.