

# 運動量共鳴条件をもつ ホイスラーモードに関する分散式の 高温弱相対論的近似

池 田 慎

## 要約

この論文では、ホイスラーモード線形増幅率導出のための分散式が、変数に運動量を使いながら、プラズマが高温の場合の近似として導出された。プラズマは、少ない高エネルギーの相対論的粒子を含む、弱相対論的プラズマとして仮定されている。

武蔵大学人文学会雑誌第46巻第2号(2014)<sup>1)</sup>の増幅率の結果は、プラズマが低温の場合の近似として導出され、低温近似プラズマによる、ホイスラーモード弱相対論的線形増幅率であった。今回の論文は、プラズマ圈内、放射線帯の高温弱相対論的粒子に適用される、ホイスラーモード波の線形増幅率のための分散式の導出である。数少ない相対論的高エネルギー粒子を含むプラズマに対するこれらの結果は、温度による効果を含み、まさに、プラズマ圏の内側で行われるHAARP送信実験や、放射線帯粒子によるホイスラーモード波の生成・伝播・増幅・減衰の波動探査、更には散乱・降下する相対論的粒子探査の一助となる事を期待する。

## 1. ホイスラーモード波の非相対論的線形増幅率の導出(以前の論文の紹介)

コールド電子と高速電子の数密度の変化に対応した非相対論的電子ホイスラーモードサイクロトロン不安定性の線形増幅率は、既に、池田(2012)<sup>2)</sup>により、武

蔵大学人文学会雑誌第43巻、第3・4号で与えられている。それらの結果は、次式等で与えられる。SI単位系で、

$$\frac{c^2 k^2}{\omega_k^2} = 1 + \frac{\omega_0^2 + \omega_H^2}{\omega_k(\Omega - \omega_k)} \quad (1)$$

$$\gamma_k = \sqrt{\pi} \frac{eB_{eq}}{m} \left( A - \frac{\frac{f_k}{f_H}}{1 - \frac{f_k}{f_H}} \right) \left( \frac{1 - \frac{f_k}{f_H}}{\frac{f_k}{f_H}} \right) \frac{1}{L^3} \frac{n_H}{n_0 + n_H} \left( \frac{E_R}{T_z} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left( -\frac{E_R}{T_z} \right) \quad (2)$$

上式において、 $\gamma_k$ が正のとき、波動は成長する。 $B_{eq}$ は赤道面地表上での磁束密度である。 $E_R$ は共鳴電子の運動エネルギーであり、次式で表わされる。温度異方性係数 $A$ も次のように定義される。

$$E_R = \frac{1}{2} m V_R^2 = \frac{1}{2} m c^2 \frac{(\Omega - \omega)^3}{(\omega_0^2 + \omega_H^2) \omega_k} \quad (3)$$

$$A = \frac{T_{\perp}}{T_z} - 1 \quad (4)$$

$T_{\perp}$ と $T_z$ は、それぞれエネルギーの単位で表わされた磁力線に垂直方向の電子温度であり、磁力線に平行方向の電子温度である。ダクト伝搬を考慮し、次のような平行伝搬が仮定されている。

$$k_{\perp} \rightarrow +0, k_z \rightarrow k \quad (5)$$

## 2. 高温近似によるホイスラーモード波の弱相対論的分散式の導出

相対論的プラズマのRモード電磁波不安定性の一般論は、運動量表示で、例えばBARBOSA and CORONITI (1976)<sup>3)</sup>、XIAO et al. (1998)<sup>4)</sup>等で、既に紹介されている。

IKEDA (2012)<sup>5)</sup>は相対論的取り扱いを、サイプル信号について既に行っている。その論文では、コールド電子群と温度異方性を持つ弱相対論的高速電子群の2成分を考えた。コールド電子の分布関数と相対論的電子分布関数は、それぞれ次のように表わされた。まず、コールド電子群の分布関数は、数密度を $n_0$ として、

$$f_0(p_z, p_\perp) = n_0 \frac{1}{2\pi p_\perp} \delta(p_z) \delta(p_\perp) \quad (6)$$

弱相対論的高速電子群の分布関数は、数密度を $n_H$ として、

$$f_1(p_z, p_\perp, T_z, T_\perp) = \frac{n_H}{2\pi n_0 T_\perp} \left( \frac{1}{2\pi m_0 T_z} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{p_\perp^2}{2m_0 T_\perp}} e^{-\frac{p_z^2}{2m_0 T_z}} \quad (7)$$

である。 $m_0$ は、電子の静止質量を表わしている。分布関数は両電子群を重ねて、次のように表される。

$$F(p_z, p_\perp, T_z, T_\perp) = f_0(p_z, p_\perp) + f_1(p_z, p_\perp, T_z, T_\perp) \quad (8)$$

右回り円偏波モード、つまりホイスラーモード波の分散式は、コールド電子群と高速電子群の効果を重ねて、次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = & 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega - \Omega)} + \frac{e^2}{\omega \epsilon_0} \left\langle \frac{1}{2m_0 k} \frac{1}{T_\perp} \frac{p_\perp^2}{p_z + p_R} F \right\rangle \\ & + \frac{e^2}{\omega \epsilon_0} \left\langle -\frac{1}{2\omega m_0^2 \gamma} \left( \frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{p_z p_\perp^2}{p_z + p_R} F \right\rangle \end{aligned} \quad (9)$$

ただし、 $\langle \dots \rangle$  は次のような積分を表している。

$$\langle \dots \rangle = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \int_{-\infty}^{+\infty} dp_{\perp} \cdot p_{\perp} \dots = 2\pi \int dp_{\perp} \cdot p_{\perp} \int dp_z \dots \quad (10)$$

まず、(9) の右辺第3項の積分を、最初に考える。

$$\left\langle \frac{1}{2m_0 k T_{\perp}} \frac{1}{p_z + p_R} \frac{p_{\perp}^2}{F} \right\rangle = \frac{\pi}{m_0 k T_{\perp}} \frac{n_H}{\sqrt{2\pi m_0 T_z} 2\pi m_0 T_{\perp}} \times \int_0^{\infty} dP_{\perp} P_{\perp}^3 \exp\left(-\frac{P_{\perp}^2}{2m_0 T_{\perp}}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dP_z \frac{1}{P_z + P_R} \exp\left(-\frac{P_z^2}{2m_0 T_z}\right) \quad (11)$$

次に、(9) の右辺第4項の積分を考える。

$$\left\langle -\frac{1}{2\omega m_0^2 \gamma} \left( \frac{1}{T_{\perp}} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{p_z p_{\perp}^2}{p_z + p_R} F \right\rangle = -\frac{1}{2\omega m_0^2} \left( \frac{1}{T_{\perp}} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{n_H}{m_0 T_{\perp} \sqrt{2\pi m_0 T_z}} \times \int_0^{\infty} dP_{\perp} P_{\perp}^3 \exp\left(-\frac{P_{\perp}^2}{2m_0 T_{\perp}}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dP_z \frac{1}{\gamma} \frac{P_z}{P_z + P_R} \exp\left(-\frac{P_z^2}{2m_0 T_z}\right) \quad (12)$$

上式に現れるローレンツファクター $\gamma$ は、弱相対論的近似として、次のように近似される。

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{P_{\perp}^2}{m_0^2 c^2} + \frac{P_z^2}{m_0^2 c^2}}} \approx 1 - \frac{P_{\perp}^2}{2m_0^2 c^2} - \frac{P_z^2}{2m_0^2 c^2} \quad (13)$$

まず、(11) に示された次の積分は、プラズマ分散関数 $W(Z)$ で表現される。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dP_z \frac{1}{P_z + P_R} \exp\left(-\frac{P_z^2}{2m_0 T_z}\right) \approx \frac{\sqrt{2\pi m_0 T_z}}{P_R} \left\{ 1 - W\left(-\frac{P_R}{\sqrt{m_0 T_z}}\right) \right\} \quad (14)$$

一般的に、ICHIMARU (1973)<sup>6)</sup> によるプラズマ分散関数 $W(Z)$ は、次のように表わされた。

$$W(Z) = 1 - Z \exp(-Z^2/2) \int_0^Z dy \exp(y^2/2) + i \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} Z \exp(-Z^2/2) \quad (15)$$

高温近似の場合は、 $Z$ が非常に小さくなり、

$$|Z| = \left| -\frac{P_R}{\sqrt{m_0 T_z}} \right| \ll 1 \quad (16)$$

が仮定されるので、プラズマ分散関数 $W(Z)$ は次のように表わされる。 $Z$ を負として、

$$W(Z) \approx -i\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} Z \exp(-Z^2/2) + 1 - Z^2 \quad (17)$$

上記の近似を使う事により、(14)のプラズマ分散関数 $W(Z)$ は、次のよう近似される。

$$W\left(-\frac{P_R}{\sqrt{m_0 T_z}}\right) \approx 1 - \frac{P_R^2}{m_0 T_z} + i\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{P_R}{\sqrt{m_0 T_z}} e^{-\frac{P_R^2}{2m_0 T_z}} \quad (18)$$

さらに、(14)に、上式を代入すると、

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dP_z \frac{1}{P_z + P_R} \exp\left(-\frac{P_z^2}{2m_0 T_z}\right) \\ & \approx \frac{\sqrt{2\pi m_0 T_z}}{P_R} \left\{ 1 - 1 + \frac{P_R^2}{m_0 T_z} - i\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{P_R}{\sqrt{m_0 T_z}} e^{-\frac{P_R^2}{2m_0 T_z}} \right\} \\ & = \frac{\sqrt{2\pi m_0 T_z}}{P_R} \left\{ \frac{P_R^2}{m_0 T_z} - i\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{P_R}{\sqrt{m_0 T_z}} e^{-\frac{P_R^2}{2m_0 T_z}} \right\} = \sqrt{\frac{2\pi}{m_0 T_z}} P_R - i\pi e^{-\frac{P_R^2}{2m_0 T_z}} \end{aligned} \quad (19)$$

(19)を(11)に代入すると、積分の第1項が導出される。

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{1}{2m_0 k} \frac{1}{T_{\perp}} \frac{p_{\perp}^2}{p_z + P_R} F \right\rangle = \frac{\pi}{m_0 k T_{\perp}} \frac{n_H}{\sqrt{2\pi m_0 T_z} \sqrt{2\pi m_0 T_{\perp}}} \\ & \times \int_0^{\infty} dP_{\perp} P_{\perp}^3 \exp\left(-\frac{P_{\perp}^2}{2m_0 T_{\perp}}\right) \left[ \sqrt{\frac{2\pi}{m_0 T_z}} P_R(P_{\perp}) - i\pi e^{-\frac{P_R^2}{2m_0 T_z}} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

次に、(9)の右辺第4項の積分を行い、ローレンツファクター $\gamma$ として(13)を使

用し、整理する。

$$\begin{aligned}
 & \left\langle -\frac{1}{2\omega_0^2\gamma} \left( \frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{P_z P_\perp^2}{P_z + P_R} F \right\rangle = -\frac{1}{2\omega_0^2} \left( \frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{n_H}{m_0 T_\perp \sqrt{2\pi m_0 T_z}} \times \\
 & \int_0^\infty dP_\perp P_\perp^3 \exp\left(-\frac{P_\perp^2}{2m_0 T_\perp}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dP_z \frac{1}{\gamma} \frac{P_z}{P_z + P_R} \exp\left(-\frac{P_z^2}{2m_0 T_z}\right) \\
 & \approx -\frac{\pi}{\omega_0^2} \left( \frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{n_H}{2\pi m_0 T_\perp \sqrt{2\pi m_0 T_z}} \int_0^\infty dP_\perp P_\perp^3 \exp\left(-\frac{P_\perp^2}{2m_0 T_\perp}\right) \\
 & \times \left[ \left\{ \left( 1 - \frac{P_\perp^2}{2m_0^2 c^2} \right) \left( 1 - \frac{P_R(P_\perp)^2}{m_0 T_z} \right) - \frac{m_0 T_z}{2m_0^2 c^2} - \frac{P_R(P_\perp)^2}{2m_0^2 c^2} \right\} \sqrt{2\pi m_0 T_z} \right. \\
 & \left. + i\pi P_R(P_\perp) \left\{ \left( 1 - \frac{P_\perp^2}{2m_0^2 c^2} \right) + \frac{P_R(P_\perp)^2}{2m_0^2 c^2} \right\} \exp\left(-\frac{P_\perp^2}{2m_0 T_\perp}\right) \right] \quad (21)
 \end{aligned}$$

この論文では、 $\gamma$ については、結果的にプラズマポーズの内側での弱相対論的近似を想定している。従って、

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{P_\perp^2}{m_0^2 c^2} + \frac{P_z^2}{m_0^2 c^2}} \approx 1 + \frac{P_\perp^2}{2m_0^2 c^2} + \frac{P_z^2}{2m_0^2 c^2} \quad (22)$$

更に、(20)と同様に、(21)では、次式の共鳴条件を導入した。

$$P_z + P_R = 0 \quad (23)$$

この論文では、簡単に、共鳴条件として、

$$P_z = -P_R \quad (24)$$

を仮定したが、別の解として、

$$P_z \rightarrow 0 \quad (25)$$

そして、同時に、

$$P_R \rightarrow 0 \quad (26)$$

と云う共鳴条件も存在する。その問題と解については、又、別の機会に報告する。

(20) と (21) において、共鳴運動量  $P_R$  は次式のように与えられた。 $V_R$  に関しては、IKEDA (2012)<sup>2)</sup> を参照されたい。

$$p_R = m_0 \gamma V_R$$

$$= m_0 \frac{\Omega k - \sqrt{\Omega^2 k^2 - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \left\{ (\Omega^2 - \omega^2) - \frac{P_\perp^2}{m_0^2 c^2} \omega^2 \right\}}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (27)$$

補足説明として、(21) に既に行われた  $P_z$  の積分について、まとめておく。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dP_z \exp\left(-\frac{P_z^2}{2m_0 T_z}\right) = \sqrt{2\pi m_0 T_z} \quad (28)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dP_z P_z^2 \exp\left(-\frac{P_z^2}{2m_0 T_z}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2m_0 T_z)^{\frac{3}{2}} \quad (29)$$

(20) と (21) の結果を (9) に代入することにより、相対論的粒子によるホイスラーモード波の高温近似による分散式が得られる。この場合、低温近似の場合と比較して、例えば (18) の指数関数の項が零にならず、波動の伝搬について無視できないし、逆に伝搬の問題に温度が大きく関わるようである。

$$\begin{aligned} \frac{c^2 k^2}{\omega^2} &\approx 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega(\Omega - \omega)} + \frac{e^2}{\omega \varepsilon_0} \left\langle -\frac{1}{2\omega m_0^2 \gamma} \left(\frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z}\right) p_z p_\perp^2 F \right\rangle \\ &+ \frac{e^2}{\omega \varepsilon_0} \left\langle \frac{1}{2m_0 k} \frac{1}{T_\perp} \frac{p_\perp^2}{p_z + p_R} F \right\rangle \\ &= 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega(\Omega - \omega)} + \frac{e^2}{\omega \varepsilon_0} \left\{ -\frac{\pi}{\omega m_0^2} \left(\frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z}\right) \frac{n_H}{2\pi m_0 T_\perp \sqrt{2\pi m_0 T_z}} \int_0^\infty dP_\perp P_\perp^3 \exp\left(-\frac{P_\perp^2}{2m_0 T_\perp}\right) \right. \\ &\quad \times \left[ \left\{ \left(1 - \frac{P_\perp^2}{2m_0^2 c^2}\right) \left(1 - \frac{P_R(P_\perp)^2}{m_0 T_z}\right) - \frac{m_0 T_z}{2m_0^2 c^2} - \frac{P_R(P_\perp)^2}{2m_0^2 c^2} \right\} \sqrt{2\pi m_0 T_z} \right. \\ &\quad \left. \left. + i\pi P_R(P_\perp) \left\{ \left(1 - \frac{P_\perp^2}{2m_0^2 c^2}\right) + \frac{P_R(P_\perp)^2}{2m_0^2 c^2} \right\} \exp\left(-\frac{P_R(P_\perp)^2}{2m_0 T_z}\right) \right] \right\} \\ &+ \frac{e^2}{\omega \varepsilon_0} \frac{\pi}{m_0 k} \frac{1}{T_\perp} \frac{n_H}{2\pi m_0 T_\perp \sqrt{2\pi m_0 T_z}} \int_0^\infty dP_\perp P_\perp^3 \exp\left(-\frac{P_\perp^2}{2m_0 T_\perp}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[ \sqrt{\frac{2\pi}{m_0 T_z}} P_R(P_\perp) - i\pi e^{-\frac{P_R^2}{2m_0 T_z}} \right] \\
 = & 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega(\Omega - \omega)} - \pi \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \left( \frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{1}{m_0} \frac{1}{2\pi m_0 T_\perp} \int_0^\infty dP_\perp P_\perp^3 \exp\left(-\frac{P_\perp^2}{2m_0 T_\perp}\right) \\
 & \times \left[ \begin{aligned} & \left(1 - \frac{P_\perp^2}{2m_0^2 c^2}\right) \left(1 - \frac{P_R(P_\perp)^2}{m_0 T_z}\right) - \frac{T_z}{2m_0 c^2} - \frac{P_R(P_\perp)^2}{2m_0^2 c^2} \\ & + i\pi \frac{P_R(P_\perp)}{\sqrt{2\pi m_0 T_z}} \left\{ \left(1 - \frac{P_\perp^2}{2m_0^2 c^2}\right) + \frac{P_R(P_\perp)^2}{2m_0^2 c^2} \right\} \exp\left(-\frac{P_R(P_\perp)^2}{2m_0 T_z}\right) \end{aligned} \right] \quad (30)
 \end{aligned}$$

上式 (30) は高温近似の結果ではあるが、相対論的効果を若干無視して、次のような準高温近似として、(30) を変形してみる。つまり、(27) において、次のような近似を導入する。あるいは、 $P_\perp$  があまり大きくない場合を考えてみる。

$$\frac{P_\perp^2}{m_0^2 c^2} \ll 1 \quad (31)$$

結果的に積分が可能になり、(27) から次式が得られる。ただし、将来においては、上記の補正項 (31) を根号の外に出し、改めて積分しなおし、加える事も可能であると思われる。

$$\begin{aligned}
 p_R(p_\perp) &= m_0 \gamma \mathcal{V}_R \\
 & \approx m_0 \frac{\Omega k - \sqrt{\Omega^2 k^2 - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) (\Omega^2 - \omega^2)}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \text{const.} \equiv P_R \quad (32)
 \end{aligned}$$

この時、(30) の積分が簡単になるので、その結果を示す。

$$\begin{aligned}
 \frac{c^2 k^2}{\omega^2} & \approx 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega(\Omega - \omega)} + \frac{e^2}{\omega \varepsilon_0} \left\langle -\frac{1}{2\omega m_0^2 \gamma} \left( \frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{p_z p_\perp^2}{p_z + p_R} F \right\rangle \\
 & + \frac{e^2}{\omega \varepsilon_0} \left\langle \frac{1}{2m_0 k} \frac{1}{T_\perp} \frac{p_\perp^2}{p_z + p_R} F \right\rangle
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega(\Omega - \omega)} + \frac{e^2}{\omega \varepsilon_0} \left\{ -\frac{\pi}{\omega m_0^2} \left( \frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{n_H}{2\pi m_0 T_\perp \sqrt{2\pi m_0 T_z}} \int_0^\infty dP_\perp P_\perp^3 \exp\left(-\frac{P_\perp^2}{2m_0 T_\perp}\right) \right. \\
 &\quad \times \left[ \left\{ \left( 1 - \frac{P_\perp^2}{2m_0^2 c^2} \right) \left( 1 - \frac{P_R(P_\perp)^2}{m_0 T_z} \right) - \frac{m_0 T_z}{2m_0^2 c^2} - \frac{P_R(P_\perp)^2}{2m_0^2 c^2} \right\} \sqrt{2\pi m_0 T_z} \right. \\
 &\quad \left. \left. + i\pi P_R(P_\perp) \left\{ \left( 1 - \frac{P_\perp^2}{2m_0^2 c^2} \right) + \frac{P_R(P_\perp)^2}{2m_0^2 c^2} \right\} \exp\left(-\frac{P_R(P_\perp)^2}{2m_0 T_z}\right) \right] \right\} \\
 &\approx 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega(\Omega - \omega)} - \pi \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \frac{1}{m_0} \left( \frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{1}{2\pi m_0 T_\perp} \cdot \int_0^\infty dP_\perp P_\perp^3 \exp\left(-\frac{P_\perp^2}{2m_0 T_\perp}\right) \cdot \\
 &\quad \cdot \left[ \left\{ \left( 1 - \frac{P_\perp^2}{2m_0^2 c^2} \right) \left( 1 - \frac{P_R^2}{m_0 T_z} \right) - \frac{T_z}{2m_0 c^2} - \frac{P_R^2}{2m_0^2 c^2} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + i\pi \frac{P_R}{\sqrt{2\pi m_0 T_z}} \left\{ \left( 1 - \frac{P_\perp^2}{2m_0^2 c^2} \right) + \frac{P_R^2}{2m_0^2 c^2} \right\} \exp\left(-\frac{P_R^2}{2m_0 T_z}\right) \right] \quad (33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega(\Omega - \omega)} - \pi \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \frac{1}{m_0} \left( \frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{1}{2\pi m_0 T_\perp} \cdot \\
 &\quad \cdot \left[ \int_0^\infty dP_\perp P_\perp^3 \exp\left(-\frac{P_\perp^2}{2m_0 T_\perp}\right) \cdot \left\{ \left( 1 - \frac{P_\perp^2}{2m_0^2 c^2} \right) \left( 1 - \frac{P_R^2}{m_0 T_z} \right) - \frac{T_z}{2m_0 c^2} - \frac{P_R^2}{2m_0^2 c^2} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + i\pi \frac{P_R}{\sqrt{2\pi m_0 T_z}} \int_0^\infty dP_\perp P_\perp^3 \exp\left(-\frac{P_\perp^2}{2m_0 T_\perp}\right) \left\{ \left( 1 - \frac{P_\perp^2}{2m_0^2 c^2} \right) + \frac{P_R^2}{2m_0^2 c^2} \right\} \exp\left(-\frac{P_R^2}{2m_0 T_z}\right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} dP_\perp \exp\left(-\frac{P_\perp^2}{2m_0 T_\perp}\right) P_\perp^3 = 2m_0^2 T_\perp^2 \quad (34)$$

$$\int_0^{+\infty} dP_\perp \exp\left(-\frac{P_\perp^2}{2m_0 T_\perp}\right) P_\perp^5 = 8m_0^3 T_\perp^3 \quad (35)$$

であるから、上2式を(33)に代入して積分が完了し、目的の分散式が導出される。\$P\_R\$としては、(32)を使う。結果的に、下記に、弱相対論的高温プラズマの分散式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \frac{c^2 k^2}{\omega^2} &\approx 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega(\Omega - \omega)} \\
 &- \pi \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \frac{1}{m_0} \left( \frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{1}{2\pi m_0 T_\perp} \cdot
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{aligned} & \left\{ \left( 2m_0^2 T_{\perp}^2 - \frac{8m_0^3 T_{\perp}^3}{2m_0^2 c^2} \right) \left( 1 - \frac{P_R^2}{m_0 T_z} \right) - 2m_0^2 T_{\perp}^2 \left( \frac{T_z}{2m_0 c^2} + \frac{P_R^2}{2m_0^2 c^2} \right) \right\} \\ & + i\pi \frac{P_R}{\sqrt{2\pi m_0 T_z}} \left\{ \left( 2m_0^2 T_{\perp}^2 - \frac{8m_0^3 T_{\perp}^3}{2m_0^2 c^2} \right) + 2m_0^2 T_{\perp}^2 \frac{P_R^2}{2m_0^2 c^2} \right\} \exp\left(-\frac{P_R^2}{2m_0 T_z}\right) \end{aligned} \right] \\
 & \approx 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega(\Omega - \omega)} \\
 & - \pi \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \frac{1}{m_0} \left( \frac{1}{T_{\perp}} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{1}{2\pi m_0 T_{\perp}} \left[ \begin{aligned} & \left\{ \left( 2m_0^2 T_{\perp}^2 - \frac{4m_0 T_{\perp}^3}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{P_R^2}{m_0 T_z} \right) - 2m_0^2 T_{\perp}^2 \left( \frac{T_z}{2m_0 c^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{P_R^2}{2m_0^2 c^2} \right) \right\} - i\pi^2 \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \frac{1}{m_0} \left( \frac{1}{T_{\perp}} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{1}{2\pi m_0 T_{\perp}} \right. \\ & \left. \left[ \frac{P_R}{\sqrt{2\pi m_0 T_z}} \left\{ 2m_0^2 T_{\perp}^2 - 4m_0 \frac{T_{\perp}^3}{c^2} + T_{\perp}^2 \frac{P_R^2}{c^2} \right\} \exp\left(-\frac{P_R^2}{2m_0 T_z}\right) \right] \right] \end{aligned} \right] \tag{36}
 \end{aligned}$$

次回には、前回の武蔵大学人文学会雑誌第46巻第2号(2014)<sup>1)</sup>の低温近似モデルと同様に、(36)の不安定性解析を行う。ただし、その際、高温近似であるので、(32)に現れた $P_R$ は、被微分関数として残っており、 $\omega$ と $k$ の関数として考慮する必要があるかもしれない。

$$\omega = \omega_k - i\gamma_k \tag{37}$$

$$\omega_k \gg \gamma \tag{38}$$

の条件で、上式を(36)の右辺と左辺に代入して増幅率が導出される。それらの結果は、次の論文として紹介する予定である。

卷田(2015)<sup>7)</sup>によると、放射線帯粒子の降込みがブラジル磁気異常帯で確認された。今後、プラズマポーズ付近やプラズマ圏内放射線帯の様々な波動の励起と粒子との相互作用、伝搬問題が、地上でも観測される可能性がある。この時、弱相対論的粒子が関わる可能性は十分にあるだろう。又、特に高温プラズマの場合は、分散式に温度が導入されるので、波動の伝搬にも大きく関わり、散乱や異常伝搬等、スペクトル上にプラズマ圏内における高温プラズマ特有の波動の伝搬特性が観測される可能性もあるだろう。又、HAARP<sup>8)</sup>の電離層加熱によるELF／

VLF放射実験、それらと放射線帯粒子等との相互作用のような、温度についての新たな観測と実験、理論的研究を含めて、今後、相対論的高温プラズマの特性を一層検討する必要があると思われる。

## 謝辞

この研究は、筆者が武蔵大学特別研究員として、2009年度にインドとアメリカアラスカ州アラスカ大学を訪問していた時に着想され、その後、筆者が修士課程在学中の研究から発展させたものです。2014年(平成26年)に、その結果を低温近似の論文として発表しました。さらに、私が東京大学理学系研究科修士課程に在学中から御指導頂いた文部科学省宇宙科学研究所鶴田浩一郎名誉教授、拓殖大学巻田和男教授の御好意に、心から御礼を申し上げます。そして、適切なアドバイスを下さった理化学研究所松本紘理事長に感謝申し上げます。又、特別研究員の間、お世話になりました武蔵大学教職員の皆様他、多くの方々に深く感謝の意を表したいと思います。さらに、その間、2012年、2015年と相次いで亡くなり、いつも励まして下さった両親に心から感謝したいと思います。

- 
- 1) 池田 慎、武蔵大学人文学会雑誌、第46巻、第1号、裏P49 (2014)
  - 2) 池田 慎、武蔵大学人文学会雑誌、第43巻、第3・4号、裏P89 (2012)
  - 3) D. D. BARBOSA and F. V. CORONITI, *J. Geophys. Res.* 81, 4531 (1976)
  - 4) F. XIAO et al., *Physics Plasmas*, 5, 2489 (1998)
  - 5) M. IKEDA, *Indian J. Radio Space Phys.*, 41, 579 (2012)
  - 6) S. ICHIMARU, "Basic Principles of Plasma Physics: A Statistical Approach", 57 (1973)
  - 7) 巻田 和男、極地研共同研究終了報告書 (2015)
  - 8) M. GOLKOWSKI et al., *J. Geophys. Res.* 113, A10201, doi:10.1029/2008JA013157 (2008)

