

体系理解のための立体幾何授業モデルの設計と検証

～背理法による体系の俯瞰の検証～

赤間 祐也

（数学科）

akama.yuya@musashi.ed.jp

要 旨

本校では中学校数学科「幾何」のうち平面幾何の単元においては公理的方法により書かれた教材を利用しているが、立体幾何の単元においては教材が存在しない。筆者は平面幾何に接続する教材を作成し、背理法を用いた体系の振り返り場面を設けた授業モデルに基づき授業を行った。質問紙調査を設計して評価したところ高学力層については効果が見られたものの、それ以外の層については十分な結果が得られなかった。試験の誤答分析の結果単一の命題における活動の必要性和背理法理解の充実の必要性が示唆された。

Keywords: 幾何教育, 公理的方法, 体系の理解, 背理法, 授業評価

1. 問題の所在と背景

本校では中学校数学科の授業を「代数」と「幾何」に分けて実施している。「幾何」の授

- | | |
|--|------------------------------|
| ① 「基礎事実」（公理のようなもの）を議論の出発点として定め、ヒルベルト（2005）に準ずる公理的方法で書かれている。
基礎事実 I 結合公理
基礎事実 II 順序公理（線分の移動）
基礎事実 III 順序公理（角の移動） | 基礎事実 IV 合同公理
基礎事実 V 平行線公理 |
| ② 公理や証明済の定理、命題を用いて演繹的推論により次の定理や命題を導いていく形式である。 | |
| ③ 問題解決場面は主に今まで証明した定理を用いて証明可能である証明問題に限られている。 | |
| ④ 証明した命題に対してその逆命題を背理法を用いて証明するなど、間接証明法での証明場面を多く設けている。 | |

図 1 自校作成教材『中学の幾何』の特徴

第 1 章 図形の合同.....	1	§23 円に内接する四角形.....	69
§1 幾何学のはじまり.....	1	§24 円と直線.....	71
§2 ユークリッドの幾何学.....	2	§25 接線と弦のなす角.....	75
§3 推論の基礎 1	7	§26 三角形の五心.....	79
§4 推論の基礎 2	13	第 5 章 比と相似形.....	82
§5 三角形の合同定理相互の関係 1	16	§27 比と比例, ターレスの定理...	82
§6 三角形の合同定理相互の関係 2	17	§28 相似.....	88
§7 直角三角形の合同.....	23	§29 三角形の相似.....	89
§8 定理とその逆.....	25	§30 三角形の頂角の二等分線.....	90
§9 作図.....	27	第 6 章 面積.....	94
第 2 章 直線の平行.....	35	§31 長方形・正方形の面積.....	94
§10 二直線と一直線との交角.....	35	§32 平行四辺形・三角形の面積...	96
§11 平行線の公理.....	37	§33 等積移動.....	99
§12 三角形の内角の和.....	40	§34 一角のひとしい二つの三角形 の面積の比.....	100
§13 多角形の内角の和と外角の和...	41	§35 相似多角形の面積の比.....	101
§14 平行四辺形.....	44	§36 ピタゴラスの定理 (三平方の定理).....	105
§15 平行線の切り取る部分.....	48	§37 中線の長さ.....	110
§16 ある種の証明方法について.....	50	第 7 章 円と比例, 二つの円.....	114
第 3 章 図形の大小.....	54	§38 円と比例.....	114
§17 三角形の辺と角との関係.....	54	§39 二つの円.....	116
§18 三角形の二辺の和と差.....	56	第 8 章 軌跡.....	123
§19 二つの三角形の場合.....	57	§40 基本的な軌跡.....	123
第 4 章 円.....	60	§41 いくつかの例題.....	126
§20 円の基本性質・用語.....	60	§42 領域.....	130
§21 弦.....	61		
§22 中心角と円周角の関係.....	64		

図 2 自校作成教材『中学の幾何』目次

業では平面幾何においては自校作成教材『中学の幾何』を使用しているが、立体幾何の分野については自校作成教材はなく、友利（2020）でも報告があったように毎年担当者が各自プリントを作成するなどして授業を行っている。本校の平面幾何における教材は図 1 に示したように「基礎事実（公理のようなもの）」と定義を前提として定理を証明していく公理的方法で書かれている。図 2 は教材の目次である。この教材は数学的推論や数学の論理

的な厳密性を重視し、数学における真正な学びを実現することを目的として作成されているように思われるが、一方でこの教材が一体何のためにこのようなスタイルをとっているのか、などといったその目的や養うべき資質・能力は学習者にとって明確なものとはなっていない。また授業においてどのように生徒に活動をさせるか、についても規定されていない。

筆者は2021年度に中学3年生を対象とした「幾何」の授業を担当した際に、教材が確立されていないこと、学習者の活動が明確になっていないこと、教材や活動を評価する術がないことについて課題であると考えた。そこで、教材を作成し、授業を設計し、それら进行评估することとした。本稿ではその報告及び分析と考察を行う。

2. 研究の目的

前章において述べた通り、本研究の目的は教材作成、授業設計、および評価である。それぞれ以下のように目的を設定した。

■ 教材プリントの作成（第3章）

筆者はすでに2016年度、および2020年度に中3「幾何」の授業を担当しており、その際にある程度教材を作成した。それらについて整理し、『中学の幾何』に接続するような体系的な教材群を作成する。

■ 授業モデルおよび授業の設計（第4章）

教材プリントをもとに学習者に公理的方法に書かれていることの意義、特に体系的に議論を進めることの意義などについての理解を図るための授業モデルを設計し、それに基づいてワークシートを作成する。

■ 授業および授業モデルの評価（第5章）

作成したワークシートを用いて授業を実施し、評価を行う。そのための質問紙を作成する。

3. 教材プリントの作成

3.1 研究の方法

本章ではまず自校作成教材に接続するような教材プリント類を作成する。前章で述べた通り、本校では中学校数学科の課程において平面図形の分野では自校作成教材『中学の幾何』を利用して授業を行っている。一方で、立体幾何の分野においては教材を持たず、毎年授業担当者がプリントなどを作成して授業を行っている。

筆者は2016年度、2020年度において中学3年生を対象とした数学「幾何」の授業を担当し、その際に授業で使用するプリント教材を作成した。そこで、参考文献などをもとにすることで、自校作成教材と同様に公理的方法で書かれた教材プリントを作成する。

表 1 中 3 幾何 2021 年度二学期作成授業プリント内容一覧

回	内容		
1	2 学期授業計画		
2	軌跡の定義，定点から定距離の点の軌跡，2 点から等距離の点の軌跡	平面幾何	
3	定直線から等距離の点の軌跡，2 点から等角である点の軌跡		
4	アポロニウスの円		
5	アポロニウスの円，軌跡の振り返り		
6	空間の公理，平面の決定条件（定理 1）		立体幾何（証明中心）
7	点・直線・平面の位置関係，直線と平面の交点の存在（定理 2）		
8	2 平面の交線（定理 3），平行な 2 平面を第 3 平面で切った交線は平行（定理 4），平行 2 平面の 1 つに交わる平面は他の 1 つにも交わる（定理 5）		
9	平行 2 直線的一方を含んで他方を含まない平面は他の一方に平行（定理 6），定理 6 の逆（定理 7）		
10	空間内の直線の推移律（定理 8・9），直線と平面の垂直（定理 10）		
11	空間内の直線のなす角の定義，2 平面の垂直の定義		
12	三垂線の定理（定理 12），三垂線の定理の逆		
13	等脚である三角錐の頂点から降ろした垂線の足は外心（定理 13）		
14	定理 13 を用いた三角錐の体積計算	立体幾何（計量中心）	
15	体積の定義，カヴァリエリの原理，角柱・角錐の体積公式（定理 14～16）		
16	円柱・円錐の体積，級の体積・表面積		
17	立体の切断		
18	多面角の定義，多面角の 2 つの面角の和は残り 1 つよりも大（定理 17），凸多面角の面角の和は 360° よりも小（定理 18）		
19	オイラーの多面体定理（定理 19）		
20	穴のある多面体の多面体定理		
21	正多面体の定義，プラトンの定理（定理 20）		

3.2 内容の吟味

教材の内容として、中学校 1 年数学「空間図形」の単元、および高等学校数学 A「空間図形」の単元で扱う内容をもとにした。

公理的方法で教材を作成するにあたり、秋山（2012）を参考とした。秋山（2012）は平面幾何における公理に、「1 つの直線とこの上にない 1 点を含む平面は必ず存在する。」を付け加えて直線や平面の位置関係について公理的方法で議論を進めている。これを参考にして公理系を定め、難解にならない範囲でなるべく直観的な説明を排除して公理的方法により教材を作成した。

表 1 は 2021 年度二学期に作成したプリントの内容一覧である。二学期の第 5 回授業までは平面幾何を扱い、第 6 回以降に立体幾何の単元を扱うこととした。

立体幾何については前半の単元（第 6 回～第 13 回）では主に図形の定性的な性質について扱い、後半の単元（第 14 回～第 21 回）では長さや体積など図形の計量について取り扱うようにした。後半ではオイラーの多面体定理などやや発展的な内容も扱い、前半に比べてやや厳密性を省略しながら扱うように配慮した。

4. 授業モデルおよび授業の設計

4.1 研究の方法

本章では授業モデルと授業の設計について述べる。本校の自校使用教材の特徴は図 1 に示した通り、公理的方法により記述されていること、背理法などの間接証明法による証明場面が多く設けられていることが挙げられる。石田（1974）によると背理法について直観を裏切っていることから理解が難しい面があるが、一方で直接証明が難しいような命題でも証明が可能であること、新しい命題を導くことができることなどから発見の方策であることなどの長所を持っており、背理法の指導の意義や立場を詳細に考える必要があることなどを提言している。そこで、本校の教材をより良いものとするために、背理法を用いた振り返り場面を意図的に設けることにより体系的に議論を進めることの意義が明確になるような授業モデルを検討し、設計する。

4.2 授業モデルの枠組み

まずは授業をモデル化する。以下の図 3 は「論理的思考を促進する初等幾何授業」として授業をモデル化したものの図式である。一般的な初等幾何の授業では証明すべき命題を証明した後すぐに類題の証明に取り掛かるのに対し、「論理的思考を促進する初等幾何授業」ではそれに加えて証明した問題の逆や対偶など関連する命題を扱い、命題の比較や評価を

【通常の初等幾何授業】



【論理的思考を促進する初等幾何授業】

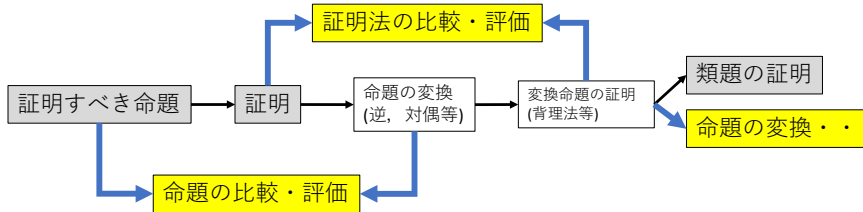


図 3 「論理的思考を促進する初等幾何授業」の図式

加える場面を設定する。また、もとの命題の逆である命題を背理法などの形式的論証による証明により証明法の比較や評価を加える場面を設定する。これにより、学習者に命題の構造や証明の方法についての省察の場面を設ける。このような授業を継続的に行うことで体系的に考えることの高さや行動傾向を形成し、定着させることを目指すものである。

4.3 授業の設計

前述した通り、本校では中学生を対象とした数学「幾何」の授業において「公理」や「定理」とその証明からなる構成で書かれている自校作成教材を利用している。この教材は数学的推論や数学の厳密性を重視し、真正な学びを実現することを目的としているように思われる。また、証明に背理法を多く採用し、ある命題を証明した後にその逆命題など派生する命題を扱う構成となっている。

そこで、この教材の特性を利用し、「論理的思考を促進する初等幾何授業」としてモデル化した授業を実施する。授業は立体幾何の単元のうち第 6 回から第 13 回の「平面の存在と位置関係」、「空間内の位置関係」、「三垂線の定理」の単元において行う。この単元ではさまざまな基本的な命題を扱うため、ある命題の逆命題を考えたり、ある命題の証明方法を変えたりして扱うことが容易である。

例えば図 4 は第 12 回授業で扱う「三垂線の定理」における例である。三垂線の定理とは「平面 α 外の 1 点 P より平面 α に下ろした垂線の足を Q, Q から α 上の任意の直線 l に引いた垂線の足を R とすると、直線 PR は l に垂直である」ことを示す定理である。この三垂線の定理から、類題として側辺の等しい三角錐において、頂点から底面に下ろした垂線の足が底面の三角形の外心に降りることが導け、三角錐の体積を計算することができるよ

【論理的思考を促進する初等幾何授業の例】

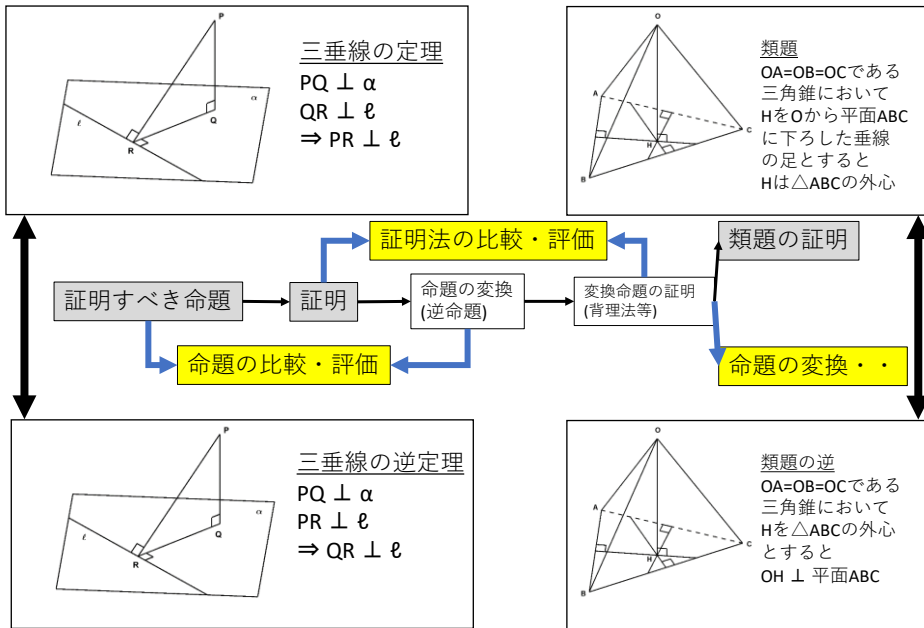


図 4 「論理的思考を促進する初等幾何授業」の三垂線定理における例

うになる。

通常の初等幾何授業であれば、例えば三垂線の定理を扱った後、そこからただちに派生する類題にとりかかるのであるが、「論理的思考を促進する初等幾何授業」においては類題を扱う前にもとの三垂線定理の逆について扱い、比較する。また類題についても逆を扱い、もとの命題および類題についてその体系性を明確にした扱いを行う。

5. 授業モデルおよび授業の評価

前章で述べたように「論理的思考を促進する初等幾何授業」の授業モデルは背理法による振り返り場面を設定することにより学習者に体系的に考えることよさを実感させることを意図したものである。そこで、この授業モデルに基づいて実際に授業を行い、学習者の体系についての認識を質問紙調査により測定することとした。

5.1 研究の方法

授業理解度や体系の認識についての項目を含む質問紙を設計し、毎回授業終了前に授業終了前に調査を行う。

5.1.1 研究の時期及び対象者

授業実施および調査の時期：2021年9月9日～12月3日

(調査は二学期 第3回授業から第21回授業まで)

対象者：武蔵中学校 中学3年生 174名

5.1.2 調査の手続き

毎回授業終了前に各回授業の出席者を対象として調査を実施した。ワークシートの末尾に所定の記入欄を設け、授業終了前に記入を依頼した。なお、回答はマークシート形式とし、ワークシートに記名欄を設けることで各学習者の回答の変容を捉えられるようにした。

二学期第1回授業に二学期授業計画について説明した際に調査を行うこと、成績には関係ないこと、希望しない場合はデータから外すことを学習者に説明し、同意を得た。

5.1.3 調査の内容

図5は学習者への質問項目である。調査項目には学習者の体系に対する認識を捉えるために設けた「体系の俯瞰」の項目のほか、授業理解度および文部科学省(2018)が中学校数学科「B 図形」領域で養うべきとしている「図形を直観的に捉えること」(図形の本質的な性質や関係を見抜くこと)、「論理的に考察すること」(演繹的な推論を考察に活用すること)に関する項目を設け、体系の俯瞰との関連を分析する。

調査は図5に示したような場面が授業中にあったかどうかを明らかにするために毎時間授業終了前に実施する。直観的思考、論理的思考についてはそれぞれ興味があったか(質問2・質問4)、活動が充実していたか(質問3・質問5)の2項目について回答を求めた。

1. 今日の授業はどの程度理解できましたか。(授業理解度)

以下では授業中に問題を解いているときのことを教えてください。

2. 問題文中の図形を変化したり、補助線を引いたりして解決の筋道を考えることが面白かった。(直観的思考の興味)
3. 問題中の図形を変形したり、補助線を引いたりして解決の筋道を考えることが充実していた。(直観的思考の充実)
4. 解決の筋道に沿って前提から結論を導くことが面白かった。(論理的思考の興味)
5. 解決の筋道に沿って前提から結論を導くことが充実していた(論理的思考の充実)
6. 例題や問題などで証明した命題間の関係や命題の意味を捉え直すことができた。(体系の俯瞰)
7. その他授業についての感想があれば教えてください。

図5 各回授業での質問項目

国立教育政策研究所（2022）では中学校 3 年生に対する各調査項目について肯定の選択肢 2 件、否定の選択肢 2 件の 4 件法で質問紙調査を行っている。本調査ではこれを参考にし、質問 1 についてはこれをより精密に調査するために肯定と否定の選択肢を 1 件ずつ増やした 6 件法で、質問 2 から質問 6 については肯定反応についてより精密に結果を得るために肯定の選択肢を 1 件増やした 5 件法で調査する。回答については質問 1 については「1 全然理解できなかった / 2 かなり理解できなかった / 3 少し理解できなかった / 4 少し理解できた / 5 かなり理解できた / 6 すごく理解できた」で、質問 2 から質問 6 については

表 2 「授業理解度」集計結果

	6 すごく理解できた	5 かなり理解できた	4 少し理解できた	3 すこし理解できなかった	2 かなり理解できなかった	1 全然理解できなかった	無回答・欠席	合計
第 3 回	18	44	69	17	4	2	20	174
第 4 回	6	38	54	36	19	4	17	174
第 5 回	18	60	55	14	10	3	14	174
第 6 回	12	48	49	27	13	4	21	174
第 7 回	27	59	55	18	3	0	12	174
第 8 回	22	58	55	20	3	1	15	174
第 9 回	16	52	66	18	8	2	12	174
第 10 回	20	63	58	17	2	4	10	174
第 11 回	15	52	58	23	6	2	18	174
第 12 回	25	67	41	17	4	2	18	174
第 13 回	28	54	47	19	7	4	15	174
第 14 回	21	53	59	24	3	4	10	174
第 15 回	19	62	60	17	3	4	9	174
第 16 回	23	40	60	30	5	2	14	174
第 17 回	30	69	44	13	4	2	12	174
第 18 回	14	56	64	19	5	3	13	174
第 19 回	24	54	65	13	3	3	12	174
第 20 回	15	54	65	20	7	3	10	174
第 21 回	34	51	57	14	4	3	11	174

表 3 「体系の俯瞰」集計結果

	5 すごく そう思う	4 かなりそ う思う	3 そう 思う	2 あまりそ う思わない	1 そう思 わない	無回答・ 欠席	合計
第 3 回	24	31	53	37	9	20	174
第 4 回	10	34	66	34	12	18	174
第 5 回	17	44	60	27	12	14	174
第 6 回	14	26	59	43	11	21	174
第 7 回	12	38	78	27	6	13	174
第 8 回	19	40	66	23	10	16	174
第 9 回	13	45	71	23	10	12	174
第 10 回	20	48	64	24	8	10	174
第 11 回	18	34	70	28	6	18	174
第 12 回	17	52	55	23	9	18	174
第 13 回	26	47	54	26	6	15	174
第 14 回	17	49	68	24	5	11	174
第 15 回	22	50	67	17	9	9	174
第 16 回	18	44	74	18	6	14	174
第 17 回	37	55	51	16	3	12	174
第 18 回	22	44	65	18	11	14	174
第 19 回	22	37	80	16	7	12	174
第 20 回	14	43	79	19	8	11	174
第 21 回	24	43	70	18	8	11	174

「1 そう思わない / 2 あまりそう思わない / 3 そう思う / 4 かなりそう思う / 5 すごくそう思う」で回答を求めた。質問 7 については自由記述とした。

5.2 調査の結果と分析

5.2.1 調査の全体的傾向

まずは各調査の単純集計の結果について主要なものを記す。表 2 は質問 1 「授業理解度」についての集計結果である。概ねどの授業回も 5, 6 を選ぶ回答者が 70 人前後、4 を選ぶ回答者が 50 人前後、1~3 を選ぶ回答者が 40 人前後となっていた。

以下の表 3 は質問 6 「体系の俯瞰」についての集計結果である。授業回によってややば

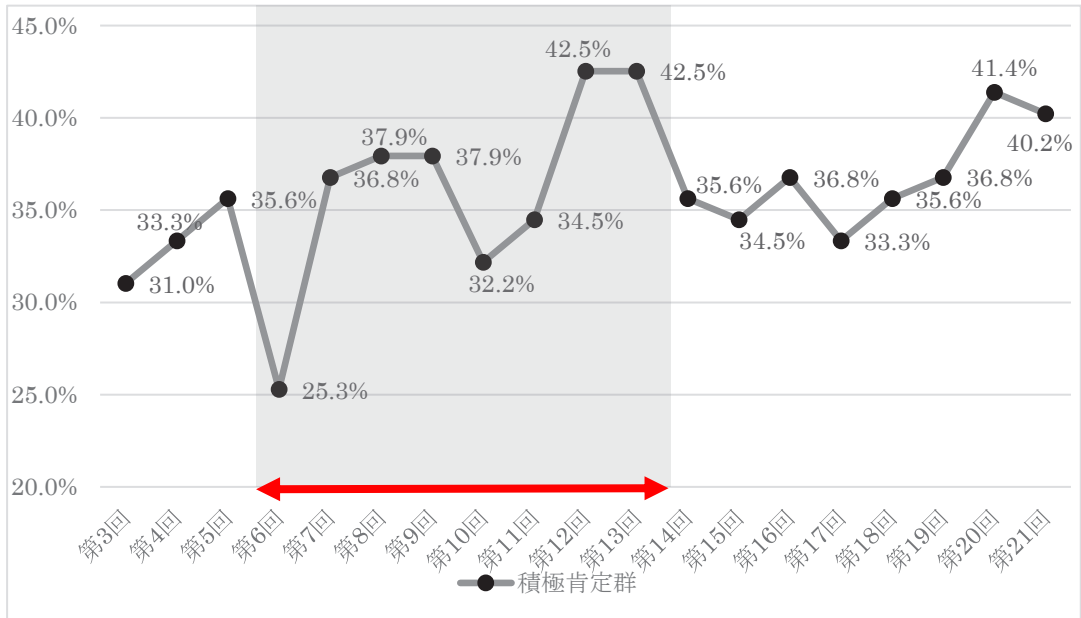


図 6 「体系の俯瞰」 積極肯定群の割合

らつきがあるが、4,5 を選択する回答者、3 を選択する回答者、1,2 を選択する回答者に大別された。この傾向は質問 2～質問 5 までについても同様であった。

5.2.2 質問 6 「体系の俯瞰」 についての分析

学習者 174 名のうち、第 3 回から第 21 回まですべての授業に出席した学習者は 87 名であった。この 87 名を母集団として分析する。

まずは学習者に体系を意識する場面があったかどうかを検討するため、質問 6 「体系の俯瞰」 に注目する。前項で見た通り回答者は 5, 4 を選択する回答者、3 を選択する回答者、1, 2 を選択する回答者の 3 群に大別された。このうち 5, 4 を選択する回答者については体系の俯瞰に強く肯定反応を示したので、5, 4 を選択する回答者を積極肯定群、3, 2, 1 を非積極群としてリコードし直す。

図 6 は全出席者 87 名について、各授業回において積極肯定群である回答者の割合をグラフに表したものである。図 6 より、いずれの授業回においても 4 分の 1 から 3 分の 1 程度が積極肯定群であった。また、第 6 回から第 13 回（図中グレーの範囲）までがモデル授業を行った授業回であるが、グラフから特徴的な変化を読み取ることはできなかった。

質問 2 「直観的思考の興味」 質問 3 「直観的思考の充実」 についても質問 6 「体系の俯瞰」と同様にリコードし、積極肯定群と非積極群に分類した。図 7 は質問 2、質問 3 について積極肯定群である回答者の割合をグラフに表したものである。直観的思考の興味、充実ともに授業回を重ねるごとにやや積極肯定群が増加したように見えるが、それほど明らかな特

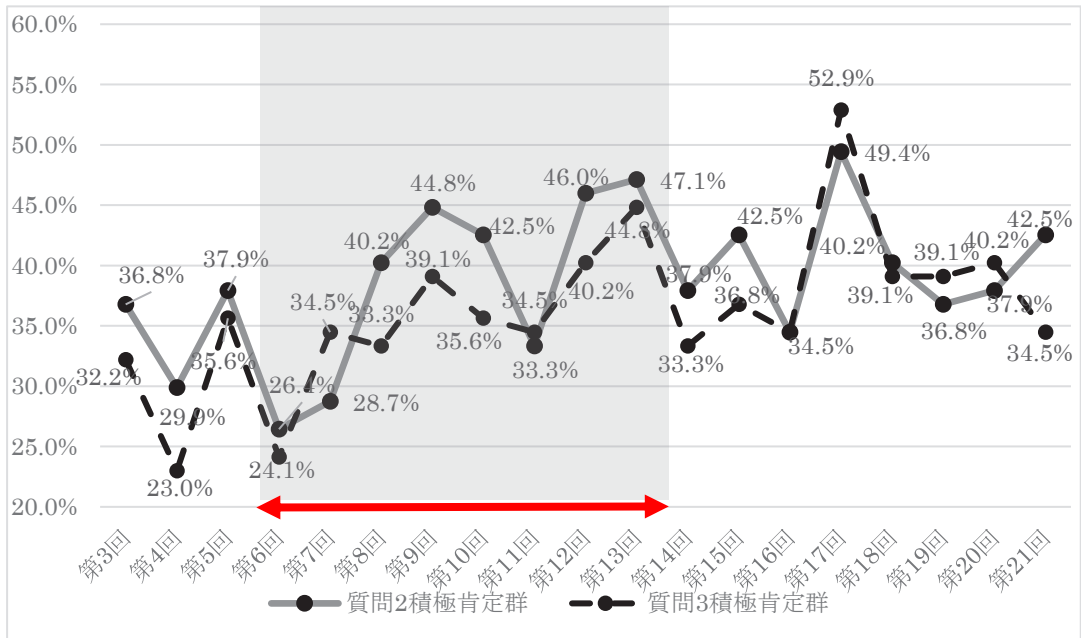


図 7 質問 2「直観的思考の興味」質問 3「直観的思考の充実」積極肯定群

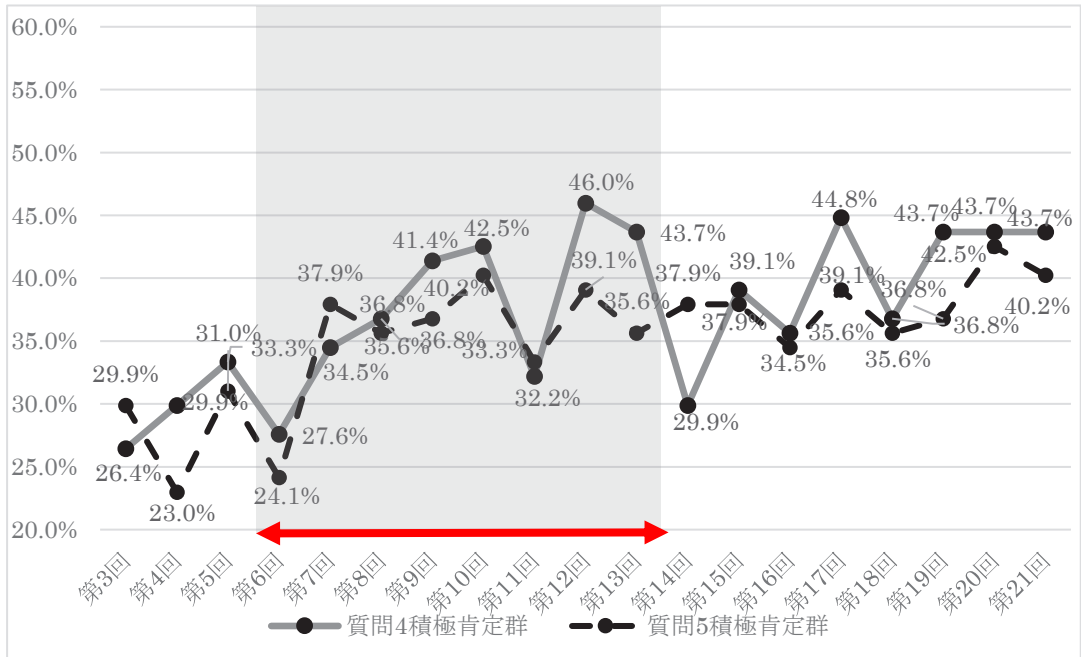


図 8 質問 4「論理的思考の興味」質問 5「論理的思考の充実」積極肯定群

徴としては現れなかった。

質問 4「論理的思考の興味」質問 5「論理的思考の充実」についても質問 6「体系の俯

瞰」と同様にリコードし、積極肯定群と非積極群に分類した。図 8 は質問 2, 質問 3 について積極肯定群である回答者の割合をグラフに表したものである。直観的思考と同様に論理的思考の興味, 充実ともに授業回を重ねるごとにやや積極肯定群が増加したように見えるが, それほど明らかな特徴としては現れなかった。

5.2.3 質問 6「体系の俯瞰」についての学力層別の分析

前項において「体系の俯瞰」積極肯定群の傾向はそれほど明らかにはならなかった。そこで, 本項では学習者を学力層別に分類し, その傾向を分析する。

学力層の判定には回答者が 2021 年 5 月 19 日に受験した中間試験と 2021 年 6 月 28 日に受験した期末試験の平均得点を利用した。175 名のうちおおむね上位 30%にあたる 49 名を G 群, 中位 40%にあたる 76 名を M 群, 下位 30%にあたる 49 名を P 群と定める。

図 9 はこのうち第 3 回から第 21 回まですべての授業に出席した G 群の学習者 31 名, M 群の学習者 36 名, P 群の学習者 20 名について, 「体系の俯瞰」積極肯定群の割合を図示したものである。P 群についてははじめの第 4 回, 第 5 回を除き各回とも積極肯定群は 30%を下回っていたが, M 群と G 群については各回ごとに一定の変化が見られた。

M 群については第 13 回, 第 20 回において積極肯定群が 4 割を超え, G 群については第

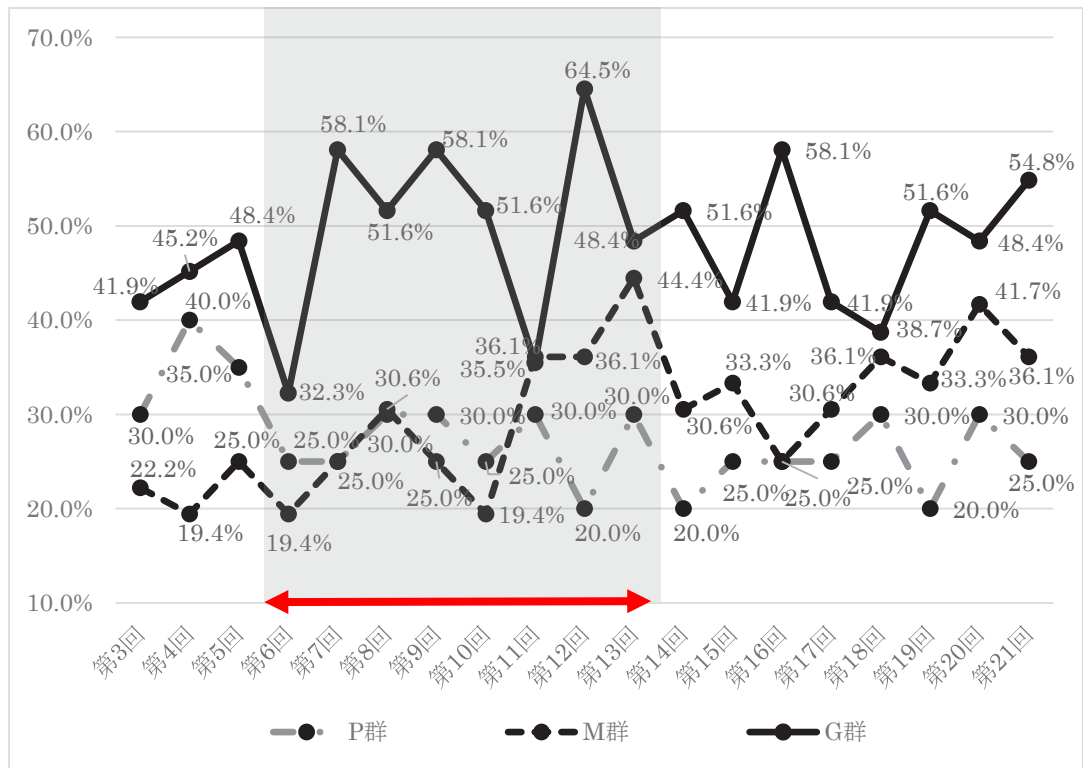


図 9 各学力層別の「体系の俯瞰」積極肯定群の割合

7回～第10回、第12回、第14回、第16回、第19回、第21回において積極肯定群が5割を超えた。

5.2.4 質問6「体系の俯瞰」についての学力層別の分析

次に、「体系の俯瞰」について単元の初回である第3回授業、および最終回である第21回授業両方に参加した学習者147名について、各群の間でどのように移動しているのかを分析する。以下の表4は、「体系の俯瞰」について第3回での回答結果と第21回での回答結果のクロス集計をとったものである。147名中最も多かったのは非積極群→非積極群であった回答者で75名であった。非積極群→積極肯定群であった回答者（27名）は積極肯定群→非積極群であった回答者（17名）よりも多かったものの、第3回と第21回について有意差は見られなかった。

第3回、第21回授業両方の参加者147名について学力層別ではG群が43名、M群が66名、P群が38名であった。表5はG群、M群、P群について「体系の俯瞰」についての第3回と第21回での回答結果についてそれぞれクロス集計をとったものである。いずれの学力層においても非積極群→非積極群である回答者が最も多かった。また、G群、M群は非積極群→積極肯定群であった回答者の数が積極肯定群→非積極群であった回答者の数を若干上回った。

表4 「体系の俯瞰」第3回と第21回のクロス集計

体系の俯瞰 第3回	第21回		合計
	積極肯定群	非積極群	
積極肯定群	28 (19%)	17 (12%)	45 (31%)
非積極群	27 (18%)	75 (51%)	102 (69%)
合計	55 (37%)	92 (63%)	147 (100%)

表 5 「体系の俯瞰」第 3 回と第 21 回の学力層別クロス集計

体系の俯瞰 第 3 回 G 群	第 21 回 G 群		合計	体系の俯瞰 第 3 回 M 群	第 21 回 M 群		合計
	積極肯 定群	非積極 群			積極肯 定群	非積極 群	
積極肯定群	13 (30%)	4 (9%)	17 (39%)	積極肯定群	13 (20%)	5 (8%)	18 (28%)
非積極群	8 (19%)	18 (42%)	26 (61%)	非積極群	11 (16%)	37 (56%)	48 (72%)
合計	21 (49%)	22 (51%)	43 (100%)	合計	24 (36%)	42 (64%)	66 (100%)

体系の俯瞰 第 3 回 P 群	第 21 回 P 群		合計
	積極肯 定群	非積極 群	
積極肯定群	2 (5%)	8 (21%)	10 (26%)
非積極群	8 (21%)	20 (53%)	28 (74%)
合計	10 (26%)	28 (74%)	38 (100%)

5.2.5 質問 6 「体系の俯瞰」についての学習者の変容について

図 10 は第 3 回から第 21 回までの授業に少なくとも 1 回は出席した 171 名について、「体系の俯瞰」について積極肯定群と非積極群とのあいだでの変容の回数により分類したものである。第 3 回から第 21 回までで全く群間で移動がなかった回答者が 42 名（うちすべて非積極群であった回答者が 36 名、すべて積極肯定群であった回答者が 6 名）見られた。すなわち、全体の 4 分の 1 の学習者は全授業を通じて質問 6 に対する態度は変わらなかったということになる。一方で残り 4 分の 3 の学習者に対しては各回の授業を通して少なくとも 1 回は何らかの変容を与えていた。

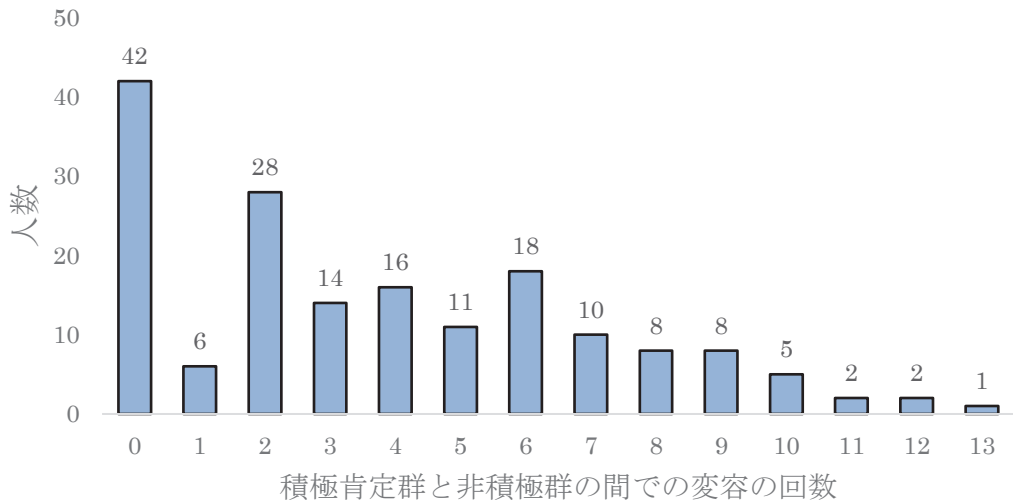


図 10 「体系の俯瞰」積極肯定群と非積極群の間での変容回数の集計

5.2.6 「体系の俯瞰」と論理的思考のクロス集計

次に、「体系の俯瞰」と論理的思考の関係についてみることにする。以下の表 6, 7, 8 はそれぞれ「体系の俯瞰」と質問 4「論理的思考の興味」、質問 5「論理的思考の充実」についてクロス集計をとったものである。表 6 は「論理的思考を促進する授業」の初回である第 6 回授業について、出席者 153 名を対象に「体系の俯瞰」と質問 4 のクロス集計、および「体系の俯瞰」と質問 5 のクロス集計をとったものである。表 7 は「論理的思考を促進する授業」の最終回である第 13 回について、表 8 は終了後に最も「体系の俯瞰」積極肯定群の割合が高かった第 20 回授業についてそれぞれ出席者（第 13 回 159 名、第 20 回 164 名）を対象に表 2-6 と同様にクロス集計をとったものである。

いずれの表においても直接確率計算を行ったところ $p=0.0000$ （両側検定）となり、有意水準 1% で有意となった。このことから、第 6 回、第 13 回、第 20 回いずれの授業回においても、質問 4「論理的思考の興味」あるいは質問 5「論理的思考の充実」において「5 すごくそう思う」「4 かなりそう思う」と強く肯定的に捉えた回答者ほど、質問 6「体系の俯瞰」においても「5 すごくそう思う」「4 かなりそう思う」と強く肯定的に捉えることができる。

一方で、この傾向は第 6 回、第 13 回、第 20 回のいずれの授業でも認められたため、この傾向は「論理的思考を促進する授業」であるかどうかに関わらないものであるといえる。

表 6 第 13 回授業での「体系の俯瞰」と質問 4, 質問 5 のクロス集計

質問 4 論理的思考 の興味	体系の俯瞰		合計	質問 5 論理的思考 の充実	体系の俯瞰		合計
	積極 定群	肯 非積 極 群			積極 定群	肯 非積 極 群	
積極肯定群	53 (33%)	9 (6%)	62 (39%)	積極肯定群	50 (31%)	8 (5%)	58 (36%)
非積極群	9 (6%)	88 (55%)	97 (61%)	非積極群	12 (8%)	89 (56%)	101 (64%)
合計	62 (39%)	97 (61%)	159 (100%)	合計	62 (39%)	97 (61%)	159 (100%)

表 7 第 20 回授業での「体系の俯瞰」と質問 4, 質問 5 のクロス集計

質問 4 論理的思考 の興味	体系の俯瞰		合計	質問 5 論理的思考 の充実	体系の俯瞰		合計
	積極 定群	肯 非積 極 群			積極 定群	肯 非積 極 群	
積極肯定群	55 (34%)	10 (6%)	65 (40%)	積極肯定群	54 (33%)	6 (4%)	60 (37%)
非積極群	5 (3%)	94 (57%)	99 (60%)	非積極群	6 (4%)	98 (59%)	104 (63%)
合計	60 (37%)	104 (63%)	164 (100%)	合計	60 (37%)	104 (63%)	164 (100%)

6. 考察

前章までに授業プリントおよび授業の設計について説明し、それに基づいた授業において幾つかの項目について質問紙調査を行った結果について述べた。ここでは前章の評価に基づいた考察を述べる。

6.1 単元を通して「体系を俯瞰する活動」を実現できたか

図 6 より、質問 6 「体系の俯瞰：例題や問題などで証明した命題間の関係や命題の意味を捉え直すことができた」について、積極的に肯定的に捉えたのは全体の 4 割前後に留まった。図 10 より 4 分の 3 以上の学習者は少なくとも一度は「例題や問題などで証明した

命題間の関係や命題の意味を捉え直すことができた」ことを積極的に肯定はしたものの、単元全体を通して「体系を俯瞰する活動」を多くの学習者に実感させることは実現できなかった。

図9の結果より、学力層別にみるとG群においては各回ともに半数前後が積極肯定群であったのに対し、M群においては3割前後、P群に至っては4分の1程度に留まっていた。M群については授業回を重ねるにつれて積極肯定群が増加する傾向が見て取れるものの、多くの学習者に対して実感させることのできる状況までは至らなかった。

このことから高学力層に対しては比較的多くの学習者に対して活動を実感させることができたのに対し、そうでない学習者に対してはそれほど効果しなかったと捉えざるを得ないだろう。

6.2 「体系の俯瞰」と論理的思考の関係について

図8の結果より、「論理的思考の興味：解決の筋道に沿って前提から結論を導くことが面白かった」および「論理的思考の充実：解決の筋道に沿って前提から結論を導くことが充実していた」について、授業回が進むにつれて積極肯定群が増加傾向があることが見て取れる。このことから、一連の授業が論理的思考を促進した可能性はあるだろう。また、表6、表7、表8より「体系の俯瞰」と「論理的思考の興味」や「論理的思考の充実」との間には少なくとも3回の授業において統計的に有意な関係があることが見て取れた。このことから、体系を俯瞰するような場面を設けるためには、論理的思考に対する興味や活動の充実を図ることが必要であることが示唆される。

6.3 「論理的思考を促進する授業」モデルについて

図6、図7、図8、表6、表7、表8のいずれの結果についても、「論理的思考を促進する授業」モデルにおいて授業を行った第6回から第13回と、それ以外の授業回との間に何らかの差を見出すことはできなかった。このことから、論理的思考や「体系の俯瞰」が「論理的思考を促進する授業」により促進されたかどうかについては現状では肯定的な評価は得られなかった。

7. 「論理的思考を促進する初等幾何授業」モデルの成立条件について

前章における考察より、「体系の俯瞰」と「論理的思考の興味」や「論理的思考の充実」には相関があることが示唆されたが、「論理的思考を促進する初等幾何モデル」によって「体系の俯瞰」を認識させることは認められなかった。また、「体系の俯瞰」についても高学力層については積極肯定群が半数程度認められたものの、中・低学力層に対しては高い効果が認められなかった。

「論理的思考を促進する初等幾何授業」の授業モデルを再考すると、逆命題を背理法などで証明する場面を含んでいることがわかる。すなわち、このモデルがうまく機能するためには背理法への理解が必要となっている。中・低学力層においては背理法についての理解が十分ではなく、命題の変換後の扱いが十分にうまくいかなかった可能性がある。

そこで、調査対象である学習者が同時期に受験した二学期中間試験の特に背理法が関係する問題について、誤答分析を行った。

7.1 調査の方法

7.1.1 調査の時期及び対象者

武蔵中学校中学3年生174名のうち、2021年10月22日9:35～10:25において行われた「幾何」の二学期中間試験受験者172名を対象とする。

7.1.2 調査問題について

二学期中間試験の問題は4つの大問からなり、それぞれ第1問は空間図形における基本的命題について、第2問は空間図形における位置関係について、第3問は軌跡について、第4問は空間図形における角についての問題で、回答は2枚の解答用紙の所定の箇所にそれぞれ回答や証明を書く形とした。

このうち第1問(4)の問題が背理法を利用する問題である。以下の図11を参照されたい。本問では授業で扱った「定理5」を題材に、定理5を既知の知識として前提とし、その逆命題について背理法で証明することを課題とした。

7.1.3 正答例および予想される誤答について

問題1(4)について、正答例および予想される誤答についてまずは見ておく。図12は正答の例である。この問題は背理法を利用した問題であるので、証明の手順としては①命題の仮定($\alpha // \beta$ かつ $\beta // \gamma$)が真であることを前提として結論($\alpha // \gamma$)の否定($\alpha \# \gamma$)が成り立つことを仮定する、②新たに得られた条件($\alpha \# \gamma$)から定理5を利用して新たな条件($\alpha \# \beta$)を得る、③もともとの仮定にある条件($\alpha // \beta$)と②で得られた条件($\alpha \# \beta$)とが矛盾することから最初の仮定が否定され、命題の成立が証明される、となる。

1 ~ 4 の各問に答えよ。ただし、解答は全て解答用紙に記入すること。

1

以下は授業で「定理5」として扱った定理である。以下の問いに答えよ。

定理5

3平面 α, β, γ について $\alpha // \beta$ かつ $\alpha \not\parallel \gamma \implies \beta \not\parallel \gamma$
(ただし、 $\not\parallel$ の記号は平行でないことを表すものとする。)

- (1) 2平面 α, β について $\alpha // \beta$ であることの定義を述べよ。
 (2) 2直線 l, m について $l // m$ であることの定義を述べよ。
 (3) 以下の命題が成り立つかどうかを判断し、常に成り立つものには○を、成り立たない場合があるものには×をそれぞれ回答欄に記入せよ。ただし、 α, β, γ はそれぞれ異なる平面を、 l, m, n は異なる直線を表し、直線 l, m, n は平面 α, β, γ 上にはないものとする。

(i) $l // m$ かつ $l \not\parallel n \implies m \not\parallel n$

(ii) $l // \alpha$ かつ $m // \alpha \implies l // m$

(iii) $l // \alpha$ かつ $l // m \implies m // \alpha$

(iv) $l // \alpha$ かつ $m \not\parallel \alpha \implies m \not\parallel n$

- (4) 定理5および背理法を用いて、以下の命題の成立を証明せよ。

$$\alpha // \beta \text{ かつ } \beta // \gamma \implies \alpha // \gamma$$

図 11 二学期中間試験問題 1 問題

(証明) 背理法で証明する。いま

$\alpha // \beta$ かつ $\beta // \gamma$ が成り立つとき、 $\alpha \not\parallel \gamma$ が成り立つと仮定。・・・①

すると①より $\gamma // \beta$ かつ $\gamma \not\parallel \alpha$ であるから、定理5より $\alpha \not\parallel \beta$ 。・・・②

一方、①より仮定から $\alpha // \beta$ 。・・・③

②、③より $\alpha \not\parallel \beta$ かつ $\alpha // \beta$ となり矛盾。

よって、 $\alpha // \beta$ かつ $\alpha \not\parallel \beta \implies \alpha // \gamma$ である。(Q.E.D.)

図 12 二学期中間試験問題 1(4)正答例

よって、予想される誤答としてはそれぞれの段階におけるつまずき、すなわち(ア)①の段階での背理法の仮定に関するつまずき、(イ)定理5の使用に関するつまずき、(ウ)矛盾を述べる段階でのつまずきの3段階の誤りが考えられる。問題の採点についても同様の観点から採点基準を設けた。

採点基準

- (ア) 背理法の前提 「 $\alpha // \beta$ かつ $\beta // \gamma$ が成り立つとき $\alpha \# \gamma$ 」を仮定していること
 (イ) 前提と定理 5 から $\alpha \# \beta \dots$ ①が導いている
 (ウ) ①と前提である $\alpha \# \beta \dots$ ②が矛盾することが言えている

図 13 二学期中間試験問題 1(4) 採点基準

表 8 問題 1(4) 回答状況

回答状況	人数(割合)
a. 概ね正答であるもの	54 (31.4%)
b. 概ね正答であるが背理法の処理に軽微な誤りを含むもの	57 (33.1%)
c. (イ)の説明に不足があるもの	20 (11.6%)
d. (ア)の仮定のみ正しいもの	18 (10.5%)
e. (ア)で $\alpha \# \beta$ など前提を否定しているもの	10 (5.8%)
f. (ア)で $\alpha // \gamma$ など結論を仮定しているもの	2 (1.2%)
g. (ア)が不明確で背理法になっていないもの	3 (1.7%)
h. ほぼ白紙	8 (4.7%)
合計	172 (100%)

(証明) 背理法で証明する. いま
 $\alpha // \beta$ かつ $\beta // \gamma \Rightarrow \alpha \# \gamma$ が成り立つと仮定. . . . ①'
 (以下図 11 と同様)

図 14 「b. 概ね正答であるが背理法の処理に軽微な誤りを含むもの」で見られた例

7.1.4 調査の手続き

学習者の二学期中間試験受験者 172 名分の問題 1(4) の答案について図 13 の基準をもとに分類した。

7.2 調査の結果

学習者の答案について分類した結果が表 9 である。少なくとも背理法の証明で最初に行うべき (ア) の仮定が正しい「a. 概ね正答であるもの」「b. 概ね正答であるが背理法の処理に軽微な誤りを含むもの」「c. (イ)の説明に不足があるもの」「d. (ア)の仮定のみ正しい

もの」の項目を合わせた 86.6%の学習者については背理法の考え方についてある程度の理解ができている、と考えることもできる。

一方で、「b. 概ね正答であるが背理法の処理に軽微な誤りを含むもの」については図 14 のように背理法の否定の場面に誤りを含んでいるものが多く見られた。

二学期中間試験問題 1(4) において扱った「定理 5」については第 8 回授業において取り扱った。20 分程度配布資料を用いて説明し、その後ワークシートで問題を考えさせ解答を共有した。

問題 5 の説明に際しては図や幾何ソフトを用いて全員に対してその意味を直観的に理解させ、その後今まで用いた知識を利用して証明できることを説明した。また、ワークシートにおいては「問題 2」として試験と同じ問題を取り扱っている。

表 2 の結果によると、第 8 回授業は理解度において「6 すごく理解できた」「5 かなり理解できた」と回答した学習者はあわせて 80 名で、授業の出席者 159 名の 50.3%であった。

7.3 考察

表 9 の結果より、背理法をもとに複数の命題の関係についてとりあげる以前に、多くの学習者がそもそも命題や証明の構造に対する理解が手続きとしての「型」としての理解に留まっており、その知識や意義について十分に定着していない可能性が示唆される。

8. まとめと今後の課題

前章における誤答分析の結果より、「論理的思考を促進する初等幾何授業」モデルが機能するためには背理法の十分な理解が必要となること、それが達成された高学力層については授業モデルにより「体系の俯瞰」について強い肯定反応が得られることが示唆された。

このことから、1 つはより多くの学習者に対して体系的に考えることのよさを実感させるためには背理法の理解を必要としない、より単純である単一の命題についての授業モデルや活動が必要であること、もう 1 つは逆命題を扱うことにより体系的に考えることのよさを実感させるためにはその手段である背理法についての理解が十分に必要とされることが課題として残る。

特に前者については既にいくつかの結果が得られているが、また別の機会に報告することとする。

9. 謝辞

本論文は筆者が岐阜大学大学院教育学研究科総合教科教育専攻において 2021 年度に研究した内容をもとに執筆いたしました。指導教官である益子典文先生には感謝申し上げます。

引用・参考文献

- 秋山武太郎, 春日屋伸昌 編 (2012) わかる立体幾何学 第 6 版 (わかる数学全書 IV). 日新出版, 東京
- D. ヒルベルト, 中村幸四郎 訳 (2005) 幾何学基礎論 (ちくま学芸文庫). 筑摩書房, 東京
- 国立教育政策研究所 (2022) 令和 4 年度全国学力・学習状況調査 報告書【質問紙調査】. <https://www.nier.go.jp/22chousakekkahoukoku/report/data/22qn.pdf> (参照日 2023.02.03)
- 国宗進, 風間喜美江, 小沢慶晃 (1985) 空間図形の指導について. 日本数学教育学会誌, **67** (1) : 24-32
- 文部科学省編 (2018) 中学校学習指導要領 (平成 29 年告示) 解説 数学編. 日本文教出版, 大阪
- 文部科学省編 (2019) 高等学校学習指導要領 (平成 30 年告示) 解説 数学編 理数編. 学校図書, 東京
- 武蔵中学校数学科編 (編集時期不明) 中学の幾何. 武蔵中学校, 東京
- 日本発達心理学会編 (2013) 発達心理学辞典—態度をはかる—, 丸善出版, 東京, pp.524-525.
- 難波誠 (2010) ヒルベルトの第 3 問題. 数学セミナー2010 年 11 月号 : 22-25
- プラトン, 種山恭子・田之頭泰彦訳 (1975) ティマイオス. プラトン全集 12, 岩波書店, 東京
- 瀬山士郎 (1988) トポロジー : 柔らかい幾何学. 日本評論社, 東京
- 志賀浩二 (2009) 数学の流れ 30 講 (中) —17 世紀から 19 世紀まで—. 朝倉書店, 東京
- 友利将吾 (2020) 2018 年度中 3 幾何授業実践報告. 武蔵高等学校中学校紀要, **4** : 125-145
- ヨハネス・ケプラー, 大槻真一郎・岸本良彦 訳 (1982) 宇宙の神秘. 工作舎, 東京
- 和田信哉 (2020) 日数教論文における空間図形の研究の動向と展望. 第 8 回春季大会論文集 : 113-121