

自国通貨建てと外国通貨建てのソブリンCDSを用いたリスクフリー・レートのターム・ストラクチャーの推定

－カウンターパーティ・リスクの影響の除去－

神楽岡 優昌^a

要 旨

カウンターパーティ・リスクを考慮して、CDS プレミアム調整済みのリスクフリー・レートを推定する手法を開発した。CDS プレミアム調整済みのリスクフリー・レートは、ソブリンCDSのプレミアムからその国のデフォルト・リスクを推定し、その国債金利から対応するデフォルト・スプレッドを減じて推定した。カウンターパーティ・リスクを除去するために、自国を参照体にした自国通貨建てのCDSのプレミアム、自国のスポット・レートに加えて、自国を参照体にした外国通貨建てのCDSのプレミアム、その外国通貨建てのスポット・レートが必要になる。ソブリンCDSは参照体が共通であっても対象とする通貨が異なるとプレミアムが異なっている。このプレミアム差異をCDSの売り手のカウンターパーティ・リスクで説明した。

JEL Classification Codes : G12-G13

キーワード：クレジット・デフォルト・スワップ、リスクフリー・レート、デフォルト・リスク、カウンターパーティ・リスク

1. はじめに

資産価格評価においてリスクフリー・レートは将来のキャッシュフローを現在価値に割引くときに必要であり、その重要性は強調しすぎることはない。ファイナンス理論を現実のマーケットに適用する際のリスクフリー・レートとみなせる候補は、国債金利、レポ金利、Overnight Index Swaps (OIS) などさまざまである。これらの金利はいずれも国債金利から直接的あるいは間接的に導出される。

クレジット・デフォルト・スワップ (Credit Default Swap, 以下CDSと記す) は、クレジット・デリバティブの代表的な商品であり、デフォルト・リスクの再配分を可能にする¹。同様にデフォルト・リスクによって決定される信用格付けとは異なり、企業や国のクレジット・リスクがCDSプレミアムとして定量的に測定され、日々変化する価格情報が発信されている。ソブリンCDSは対象とする国のクレジット・リスクを定量的に測定する。ソブリンCDSのプレミアムがゼロでない事実は米国債やドイツ国債のように信用格付けがAAA格であっても国債にデフォルト・リスクがあることを示唆している。

したがって冒頭にリスクフリー・レートの候補として列挙した国債金利、レポ金利、Overnight Index Swapsは全て国債のデフォルト・リスクの影響を受けるためリスクフリー・レートの代理変数とはなりえない。

リスクフリー・レートは原理的には国債金利からクレジット・スプレッドを減じればよく、クレジット・スプレッドはソブリンCDSから推定すればよい。国債とソブリンCDSからリスクフリー・レートを統合的に推定する方法はKagraoka and Moussa (2014)によって開発された。彼らは日本国債の利回りと日本円を通貨とするソブリンCDSプレミアムに基づいて日本円建てのリスクフリー・レートを推定することに成功した。このリスクフリー・レートはCDSプレミアムに変換されたクレジット・リスクを反映しており、CDSプレミアム調整済みのリスクフリー・レートとよばれる。

CDSの価格評価方法には、還元型モデルと構造型モデルがある。構造型モデルでは返済期日に資本額が返済額を下回った時にデフォルトと判別する。構造型モデルではデフォルトの定義は明確であるが、モデルのキャリブレーションに必要な財務情報はせいぜい四半期ごとにし

^a 武蔵大学経済学部 〒176-8534 東京都練馬区豊玉上 1-26-1

* 本研究は全国銀行学術研究振興財団ならびにJSPS 科研費 26380404, 25590104の助成を受けた。記して感謝の意を表す。

¹ 本論文では、デフォルト・リスクとクレジット・リスクを同義として取り扱う。

か開示されない。そこで本研究では CDS 評価は還元型モデルを採用しておこなう。具体的にはデフォルト・リスクを Cox 過程（デフォルト前は 0 の値を、デフォルト後は 1 の値をとるジャンプ過程。ある時刻までのデフォルトの発生確率は、その時刻までのデフォルト強度の時間積分値に対応）でモデル化をおこなう。

参照体とする国を共通にする CDS の通貨が異なっていると対応する CDS プレミアムも異なっており、自国通貨建てよりも外国通貨建ての CDS プレミアムが高い。ここで単純に異なる通貨建ての CDS プレミアムを比較して、デフォルト・リスクに関する議論を行うのは不適切である。CDS プレミアムを数理ファイナンスのフレームワークで価格評価をおこなうとき、その CDS プレミアムは参照体のデフォルト強度と対象とする通貨のリスクフリー・レートから決められる。CDS に係る将来のキャッシュフローを現在価値に割り引くときに対象とする通貨建てのリスクフリー・レートをを用いなければならない。その結果、デフォルト強度が同じであっても CDS の通貨間でリスクフリー・レートが異なれば、当然 CDS プレミアムの値も異なる。しかしながら、著しく流動性が低い CDS を例外として、任意の通貨建てのあらゆる満期のソブリン CDS に関して、自国通貨建てよりも外国通貨建ての CDS プレミアムが高く、この CDS プレミアム間の差異をリスクフリー・レートのみで説明を試みるのは困難である。

本研究では異なる通貨建て間のソブリン CDS のプレミアム差異を CDS の売り手のデフォルト・リスクに帰因して説明する。CDS は参照体がデフォルトしたときに、それに伴う損失を CDS の売り手が補償する契約である。しかしながら CDS の売り手がデフォルトに陥る恐れがあり、もし CDS の売り手がデフォルトすると CDS の買い手はその補償を受け取れない。とりわけソブリン CDS については参照体となっている国がデフォルトに陥ったとき、同時に CDS の売り手もデフォルトに陥る恐れが高く、CDS の買い手が補償を受け取れなくなる確率が高くなる。

CDS に限らず OTC 市場でデリバティブ取引を行う際には、取引参加者のいずれか、あるいは、双方がデフォルトしたときにあらかじめ定めた契約内容が履行されないリスクがある。このリスクはカウンターパーティ・リスクとよばれる。デリバティブ取引において、デリバティブの売り手のカウンターパーティ・リスクを考慮するとその売り手の信用力により取引価格が変わることを最初に指摘したのは Hull and White (1995) であった。Jarrow and Turnbull (1995); Jarrow and Yu (2001) はデリバティブの原資産のデフォルトだけでなくデリバティ

ブの売り手のデフォルト・リスクも考慮して、カウンターパーティ・リスクを数学的に厳密に評価した。

CDS 取引においてカウンターパーティ・リスクの影響は大きく European Central Bank (2009) もその重要性を強調している。デリバティブ取引におけるカウンターパーティ・リスクにはデリバティブの売り手のみのデフォルト・リスクを対象にする場合と、デリバティブの売り手のみならずデリバティブの買い手のデフォルト・リスクも対象にする場合がある。前者はデリバティブの買い手のデフォルト・リスクをゼロと仮定しデリバティブの売り手のデフォルトによってデリバティブ契約が履行されないリスクの影響を対象にしており、一方向カウンターパーティ・リスク (unilateral counterparty risk) とよばれる。後者は取引に係る参加者双方のデフォルト・リスク、デリバティブの売り手に加えてデリバティブの買い手のデフォルトによってデリバティブ契約が履行されないリスクを対象にしており、双方向カウンターパーティ・リスク (bilateral counterparty risk) とよばれる。CDS 取引における一方向カウンターパーティ・リスクの還元型モデルによる定量的評価は Bao, Chen, and Li (2012); Leung and Kwok (2005); Meissner, Rooder, and Fan (2013); Walker (2006) によってなされた。CDS 取引における双方向カウンターパーティ・リスクの還元型モデルによる定量的評価は Bo and Capponi (2015); Brigo and Capponi (2009, 2010); Dong and Wang (2014) によってなされた。CDS 取引における双方向カウンターパーティ・リスクで、さらに担保がある場合の還元型モデルによる定量的評価は Brigo, Capponi and Pallavicini (2014); Brigo et al. (2013) によってなされた。Brigo and Chourdakis (2009) は、CDS の参照体のデフォルト・リスクと取引相手のデフォルト・リスクが相関をもつ場合の CDS 評価をおこなった。構造型モデルでカウンターパーティ・リスク評価を扱った研究には Buckley, Wilkens, and Chorniy (2011); Lipton and Sepp (2009) などがある。Arora, Gandhi, and Longstaff (2012) は個々の CDS 契約に関する非公表の独自のデータを分析し、カウンターパーティ・リスクを考慮して CDS は価格評価されているものの、そのカウンターパーティ・リスクの効果は小さいことを見つけた。

本論文の目的は主として 2 つある。第 1 に国債の通貨とソブリン CDS の通貨建てを適切に選択して理論的に整合するリスクフリー・レートを推定する方法を開発することである。第 2 に異なる通貨建てのソブリン CDS のプレミアム差異を説明するモデルを提示すること、より具体的にはソブリン CDS のプレミアム差異をカウンターパーティ・リスクで説明することである。本モデル

は、ドイツ連邦共和国を参照体とし、対象とする通貨をユーロ建てあるいは米ドル建てとする CDS に適用して実証研究をおこなう。実証の結果、通貨をユーロ建てとするリスクフリー・レートおよび米ドル建てのリスクフリー・レートのターム・ストラクチャーの推定に成功した。参照体とする国が共通のソブリン CDS について、通貨間でプレミアムが異なる事実をカウンターパーティ・リスク、すなわち、CDS の売り手のデフォルト・リスクで説明できた。

本論文の構成は以下の通りである。第2節では、クレジット・リスクの評価モデルをあたえる。最初にカウンターパーティ・リスクがない場合を議論し、引き続いてカウンターパーティ・リスクが存在する場合に拡張する。第3節では実証研究の手続きとその結果を報告する。最初にデータについて説明し、次にデフォルト強度とリスクフリー・レートの推定手続きを詳解する。第4節では本論文を要約し、リスクフリー・レートの推定とカウンターパーティ・リスクについて一層の議論をおこなう。

2. モデル

2.1. クレジット・リスクの評価モデル—カウンターパーティ・リスクがない場合

CDS は債券の発行体（以下参照体とよぶ）のクレジット・イベント（信用事由）の発生に起因する損失を被らないように債券の所有者を保護する契約である。クレジット・イベントには倒産（bankruptcy）、債券の元利金の支払い不履行、債務の履行拒絶や支払猶予、リストラクチャリング（債務の条件変更など、Restructuring）がある。CDS の買い手はプロテクションの購入者、CDS の売り手はプロテクションの売却者ともよばれる。CDS の売り手は CDS の参照体の破綻による債券の減価分を CDS の買い手に支払うが、破綻と無関係な要因による減価は補償しない。CDS の買い手は CDS の売り手に契約時に定めた一定額の定期的な支払い（通常は3ヵ月ごと）をおこなう。その買い手の支払額はプレミアムとよばれ、想定元本に対するパーセンテージで表示される。CDS の契約時に CDS 契約の価値をゼロにするようにプレミアムを決定する。デフォルトがおこると CDS は以下の2つの方法のいずれかで決済がおこなわれる。現金決済では、CDS の買い手は原資産となる債券を継続して保有し、CDS の売り手がその債券のクレジット・イベントに起因する損失分を CDS の買い手に補償する。現物決済では、CDS の買い手は債券を CDS の売り手に引渡し、その代わりに CDS の売り手は債券の額面価格に相当する金額をプロテクションの購入者に支払う。以下では現金決済の CDS の価格評価モデルを議論する。

最初に、CDS 取引の参加者間にカウンターパーティ・リスクがないとの前提、すなわち、CDS の売り手・買い手の双方ともデフォルトすることはなく CDS 契約は履行されるとの前提をおく。この前提のもとで国債とソブリン CDS の価格評価をおこなう。ソブリン CDS のプレミアムがゼロでないことは、国債といえどもデフォルトするおそれがあることを示している。国債と CDS の価格評価モデルを解説するにあたり、記法を導入するために Houweling and Vorst (2005) を概説する。

参照体のデフォルト・イベントをデフォルト強度が決定論的に定まる点過程でモデル化する。額面を1、満期時刻を T とするデフォルトすることのない割引債の時刻 t の価値を $B(t, T)$ 、時刻 t におけるデフォルト強度を $\lambda(t)$ 、時刻 t から T までの生存確率（デフォルトしない確率）を $\Pr(t, T)$ で記す。このとき、生存確率について次の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \Pr(t, T) &= \mathbb{E}_t \left[\exp \left(- \int_t^T ds \lambda(s) \right) \right] \\ &:= \int_t^T \varphi(s) ds \end{aligned} \quad (1)$$

ここで $\varphi(t)$ はデフォルト過程 $\lambda(t)$ に関連付けられた確率密度関数である。Houweling and Vorst (2005) はデフォルト強度を残存期間に関する定数、線形、2次、あるいは、3次の関数と仮定した。本研究ではデフォルト強度 $\lambda(t)$ を確率変数ではなく区分的に一定値をとる階段関数と仮定し、関数値が不連続となる時点を現時点に対応する0から3ヶ月刻みで10年までの合計41個、区分数は合計40個に設定した。デフォルト強度の関数形は単純であり、かつ区分数が十分多いため、CDS プレミアムの理論値が対応する市場価格に合致するようにデフォルト強度を調整できるという利点がある。

額面を1、満期時刻を T とするデフォルトするかもしれない割引債の時刻 t における価格は次式であたえられる。

$$\begin{aligned} v(t, T) &= B(t, T) \mathbb{E} \left[1_{\{\tau > T\}} \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_t \left[B(t, \tau) \delta 1_{\{\tau \leq T\}} \right] \\ &= B(t, T) \Pr(t, T) \\ &\quad + \int_t^T ds B(t, s) \delta \varphi(s) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで τ はデフォルトが発生する停止時刻、 δ は回収率である。プレミアムの支払い時刻が $\vec{T} = (T_1, T_2, \dots, T_N)$ 、プレミアムが p 、想定元本が1、現金決済の CDS の時刻 t における価格評価をおこなう。プレミアム支払いの価値は

$$\begin{aligned}
 V(t, \vec{T}, p) &= \sum_{i=1}^N B(t, T_i) \alpha(T_{i-1}, T_i) p \mathbb{E}_t [1_{\{\tau > T_i\}}] \\
 &\quad + \mathbb{E} [B(t, \tau) \alpha(T(\tau), \tau) p 1_{\{\tau \leq T_N\}}] \\
 &= \sum_{i=1}^N B(t, t_i) \alpha(T_{i-1}, T_i) p \Pr(t, T_i) \\
 &\quad + \int_t^{T_N} ds B(t, s) \alpha(T(s), s) p \varphi(s) \quad (3)
 \end{aligned}$$

となる。ここで $\alpha(t, S)$ は時刻 t から S までの時間であり、 $T(S)$ は時刻 S の直前のプレミアム支払い時刻、すなわち、

$$T(S) = \max_{i=0, \dots, N} (T_i : T_i < S) \quad (4)$$

と定義する。式 (3) の最後の項は経過支払い (accrual payment) に対応する。これは CDS の買い手は最後にプレミアムを支払った時点からデフォルト発生時点までの経過期間に対応したプレミアムを支払う義務があるからである。補償の価値は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 V(t, \vec{T}) &= \mathbb{E}_t [B(t, \tau) (1 - \delta) 1_{\{\tau \leq T_n\}}] \\
 &= \int_t^{T_N} ds B(t, s) (1 - \delta) \varphi(s) \quad (5)
 \end{aligned}$$

CDS プレミアムは、プレミアム支払いの価値と補償の価値が等しくなる水準 $V(t, \vec{T}, p) = V(t, \vec{T})$ に設定される。

2.2. クレジット・リスクの評価モデル—カウンターパーティ・リスクがある場合

ここでカウンターパーティ・リスクを評価する。CDS 取引は OTC 市場でおこなわれるため、実際の CDS 取引における買い手および売り手の属性や特性は不明である。しかし CDS 取引参加者が為替リスクを免れるような取引をおこなっているならば、外国通貨建ての CDS の取引参加者は外国に、自国建て CDS の取引参加者は自国に取引の拠点を置いていると考えるのは自然である。CDS の参照体がデフォルトしたときに、その CDS の売り手や買い手が参照体とは異なる通貨国に活動拠点を置いているならば、参照体のデフォルトの影響が波及することなく、売り手や買い手の信用力は保持される。そこで参照体とする国の通貨と CDS の通貨が異なっていれば、その取引に関わる売り手と買い手の間にカウンターパーティ・リスクは存在しないと仮定する。逆に、CDS の通貨が参照体とする国の自国通貨と一致する場合、CDS の売り手も買い手もその参照体となっている国に活動拠点を置いているか、置いていないとしても経済的に密接な関係にあると考えられる。もしこの推測が正当であれば、その参照体とする国がデフォルトに陥ると

売り手も買い手も信用力が低下する。参照体とする国の信用力が低下したとき、既存の CDS 契約に関してプレミアム支払いの価値よりも補償価値の方が大きくなる。その結果 CDS の買い手にとって CDS の価値がプラスになり、CDS プレミアム評価に対する CDS の買い手のデフォルト・リスクの影響は小さくなる。ゆえにソブリン CDS の価格評価において CDS の買い手に起因するカウンターパーティ・リスクを無視してよいと仮定する。参照体とする国の信用力低下にしたがって CDS の売り手の信用力も低下する。参照体とする国がデフォルトしたとき、CDS の売り手は CDS に基づく補償支払いの必要がある。その結果 CDS の売り手のデフォルト・リスクは大きくなり、CDS の買い手にとってカウンターパーティ・リスクの影響は非常に大きくなる。そこで参照体とする国がデフォルトしたならば CDS の売り手も確率 q でデフォルトすると仮定する。参照体とする国がデフォルトするよりも早く CDS の売り手がデフォルトする方が現実的なシナリオであるが、カウンターパーティ・リスクの評価を容易にするためにこのように仮定する。これらの仮定のもとで割引債と CDS の価格は、ほとんどはカウンターパーティ・リスクがない場合と同一であるが、唯一 CDS の補償額の価値だけが異なり、

$$\begin{aligned}
 V'(t, \vec{T}) &= \mathbb{E}_t [B(t, \tau) q (1 - \delta) 1_{\{\tau \leq T_n\}}] \\
 &= q \int_t^{T_N} ds B(t, s) (1 - \delta) \varphi(s) \quad (6)
 \end{aligned}$$

となる。CDS プレミアムは、プレミアム支払いの価値と補償の価値が等しくなる水準 $V(t, \vec{T}, p) = V'(t, \vec{T})$ に設定される。

実証研究では本モデルを適用して、ユーロ建てのリスクフリー・レートとドイツ連邦共和国のデフォルト強度を推定し、ドイツ連邦共和国を参照体とする CDS 取引におけるカウンターパーティ・リスクを評価する。その場合、上述の仮定は以下ようになる。

- ドイツ連邦共和国を参照体とする CDS の買い手はデフォルトすることはない。
- ドイツ連邦共和国を参照体、米ドル建ての CDS について、売り手はデフォルトすることはない。
- ドイツ連邦共和国を参照体、ユーロ建ての CDS について、ドイツ連邦共和国がデフォルトに陥った場合、売り手も確率 q でデフォルトする。
- ドイツ連邦共和国を参照体、ユーロ建ての CDS について、ドイツ連邦共和国がデフォルトしなければ、売り手もデフォルトすることはない。

CDS 取引は OTC 市場でおこなわれるため、実際の CDS

取引の国別の市場参加者の内訳は不明である。しかしながら、CDS 取引参加者が為替リスクを免れるように取引をおこなっているならば、米ドル建ての CDS の取引参加者は米国に、ユーロ建て CDS の取引参加者はヨーロッパにビジネスの拠点をおいていると考えるのは自然である。したがって、ドイツ連邦共和国がデフォルトに陥った場合に、ヨーロッパに活動基盤をおく CDS の売り手は多額の CDS の補償金を支払う必要あり、デフォルトに陥る可能性が高くなると考える。

2.3. リスクフリー・レートとデフォルト強度

社債の評価では、国債から推定されるスポット・レートをリスクフリー・レートとみなし、それに CDS プレミアムから算出されるクレジット・プレミアムを加算したものを割引金利とみなしている。しかし、国債の評価にその議論は適用できない。その国を参照体にする CDS プレミアムが正值であることはその国にデフォルト・リスクがあることを明示しており、国債から推定されるスポット・レートをリスクフリー・レートとはみなしてはいけない。正しくは、国債から推定されるスポット・レートから CDS プレミアムから算出されるクレジット・スプレッドを減算したものをリスクフリー・レートとしなければならない。そのようなリスクフリー・レートの推定手法は Kagraoka and Moussa (2014) によって開発された。彼らは CDS プレミアムをデフォルト強度に変換し、それを国債から推定されるスポット・レートから減じて、リスクフリー・レートを論理的に整合するよう推定した²。しかし、彼らは、日本国を参照体とする日本円建ての CDS を用いてリスクフリー・レートを推定しているため、カウンターパーティ・リスクの影響を考慮していない。すなわち、現地国を参照体とし現地国の通貨建ての CDS は取引参加者間のデフォルト・リスクを考慮してプレミアムが決定されているにもかかわらず、彼らはカウンターパーティ・リスクがプレミアムに反映していないとみなしてリスクフリー・レートを推定している。

CDS におけるカウンターパーティ・リスクの影響を受けないようにリスクフリー・レートを推定するには、自国通貨建てではなく外国通貨建ての CDS のプレミアムの評価を利用する。ところが、その外国通貨建ての CDS プレミアムの評価のためには、当該外国通貨のリスクフリー・レートが必要であり、計算手順が互いに入れ子構造になっている。そこで実証研究では、ドイツ連邦共和

国を参照体にしたドル建ての CDS プレミアム、米国を参照体にしたユーロ建ての CDS プレミアム、米国債のスポット・レート、ドイツ国債のスポット・レートから、ユーロ建てのリスクフリー・レート、米ドル建てのリスクフリー・レート、ドイツ連邦共和国のデフォルト強度、米国のデフォルト強度の同時推定をおこなう。リスクフリー・レートは満期が 0 年から 10 年まで 1 ヶ月刻みの時点で不連続な階段関数、デフォルト強度は満期が 0 年から 10 年まで 3 ヶ月刻みの時点で不連続な階段関数で表現する。

2.4. 流動性リスク

米国債やドイツ国債は非常に活発に取引されており、流動性リスクは極めて低い。また、ドイツ連邦共和国を参照体とするユーロ建てと米ドル建てソブリン CDS、米国を参照体とするユーロ建てのソブリン CDS も流動性リスクは低い。一方、米国を参照体とする米ドル建てのソブリン CDS は流動性が低く、マーケット・データに欠損値が数多く存在する。そこで、本研究では米国債、ドイツ国債、ドイツ連邦共和国を参照体とするソブリン CDS、米国を参照体とするユーロ建てのソブリン CDS の流動性リスクは無視する。米国を参照体とする米ドル建てのソブリン CDS のデータは欠損値が多く信頼性に欠けるため、実証研究の分析対象とはしない。

2.5. モデルの推定手順

米ドル建てのドイツ連邦共和国を参照体とする CDS のプレミアムは、売り手が米国にビジネスの活動拠点をおいており、ドイツ連邦共和国がデフォルトしても売り手がデフォルトすることはないと仮定する。したがって、米ドル建てのドイツ連邦共和国を参照体とする CDS のプレミアムはカウンターパーティ・リスクがないとして価格評価する。同様にユーロ建ての米国を参照体とする CDS のプレミアムは、売り手がユーロ圏にビジネスの活動拠点をおいており、米国がデフォルトしても売り手がデフォルトすることはないと仮定する。したがって、ユーロ建ての米国を参照体とする CDS のプレミアムはカウンターパーティ・リスクがないとして価格評価する。ドイツ国債から推定されたスポット・レート、米国債から推定されたスポット・レート、米ドル建てのドイツ連邦共和国を参照体とするソブリン CDS、ユーロ建ての米国を参照体とするソブリン CDS から同時に、ユーロ建てのリスクフリー・レート、米ドル建てのリス

2 実務家は、ある残存時間の国債利回りから、それと同じ残存期間の CDS のプレミアムを減じた数値を、その残存期間のリスクフリー・レートと見なしている。しかし、この方法は簡便法であり、正しくない。

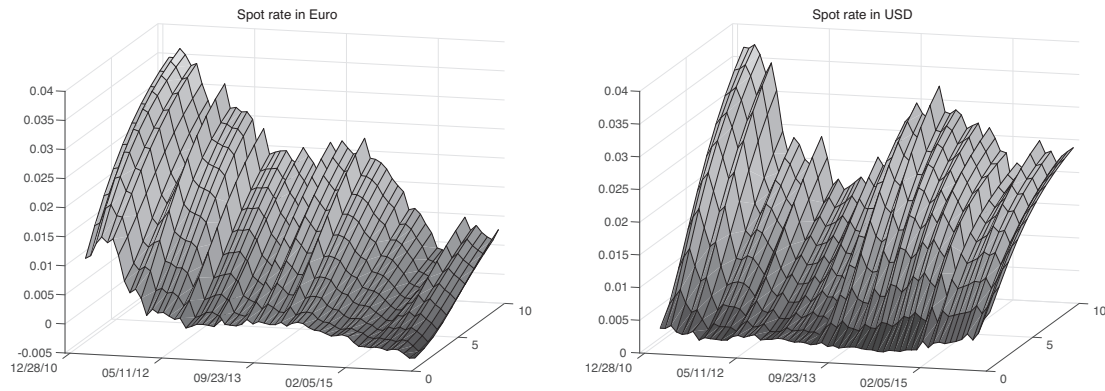


図 1 国債のスポットレート
左図：ドイツ国債，右図：米国債。

タフリー・レート，ドイツ連邦共和国のデフォルト強度，米国のデフォルト強度を推定する。キャリブレーションは，ドイツ国債のスポット・レート，米国債のスポット・レート，米ドル建てのドイツ連邦共和国を参照体とするソブリン CDS のプレミアム，ユーロ建ての米国を参照体とするソブリン CDS のプレミアムのそれぞれについて，理論価格と市場価格が一致するようにパラメータ推定をおこなった。

ユーロ建てのリスクフリー・レート，ドイツ連邦共和国のデフォルト強度に基づいて，ドイツ連邦共和国を参照体とするユーロ建ての CDS 評価をおこなう。その際には CDS の売り手のカウンターパーティ・リスクを考慮し，ドイツ連邦共和国がデフォルトすると同時に確率 q で CDS の売り手がデフォルトに陥ると仮定する。任意の CDS について，満期が 5 年の CDS の流動性が最も高い。そこでドイツ連邦共和国を参照体とするユーロ建ての満期が 5 年の CDS について，算出された CDS の理論プレミアムが対応する市場価格と一致するようにこの確率を推定する。

3. 実証研究

3.1. データ

分析期間は 2011 年から 2015 年の 5 年間で，月次データを分析対象とした。10 年を超える満期の CDS は流動性が低く，データの信頼性が保証されないため，満期が 10 年までの CDS を分析対象とした。これに対応して，スポット・レートも最大 10 年の満期を分析対象とした。

ドイツ国債のスポット・レートは European Central Bank が公表しているヨーロッパの AAA 格のスポット・レートを採用した。このデータは満期が 3 ヶ月から 30 年まで 1 ヶ月刻みのスポット・レートを記録している。米国債のスポット・レートは Datastream から入手した。

このデータは満期が 1 年から 30 年まで 1 年刻みの値を記録している。これらのスポット・レートの時系列のグラフを図 1 に掲げる。リスクフリー・レートおよびデフォルト強度を推定するには原データを直接使うことはせずに次の処理をおこなった。ドイツ国債のスポット・レートについては，満期が 1, 2 ヶ月のスポット・レートを外挿すると同時に個々の満期のスポット・レートに内在するエラーを除去するため，原データに 3 次のスプライン関数を適用して満期が 1 ヶ月から 10 年まで 1 ヶ月刻みのスポット・レートをえた。同様に米国債のスポット・レートについては，原データに 3 次のスプライン関数を適用して満期が 1 ヶ月から 10 年まで 1 ヶ月刻みのスポット・レートをえた。

ドイツ連邦共和国，米国を参照体とする CDS のプレミアムは Markit から入手した。データベースが記録する CDS の満期は 6 ヶ月，1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20, 30 年であり，原データに 3 次のスプライン関数を適用して満期が 3 ヶ月から 10 年まで 3 ヶ月刻みの CDS プレミアムをえた。ドイツ連邦共和国を参照体にするユーロ建ておよび米ドル建ての CDS のプレミアムの原データの時系列のグラフを図 2，米国を参照体にするユーロ建ておよび米ドル建ての CDS のプレミアムの原データの時系列のグラフを図 3 に掲げる。

図 2 から明らかなように共通にドイツ連邦共和国が参照体であっても対象とする通貨が異なれば CDS のプレミアムは異なっており，ユーロ建てよりもドル建ての CDS の方がプレミアムは高い。異なる通貨建て間の CDS のプレミアム差異を外国通貨建て CDS のプレミアムから自国通貨建ての CDS プレミアムを減じたものと定義する。ドイツ連邦共和国を参照体とする米ドル建ての CDS プレミアムからそのユーロ建ての CDS プレミアムを減じたプレミアム差異の時系列グラフを図 4 に

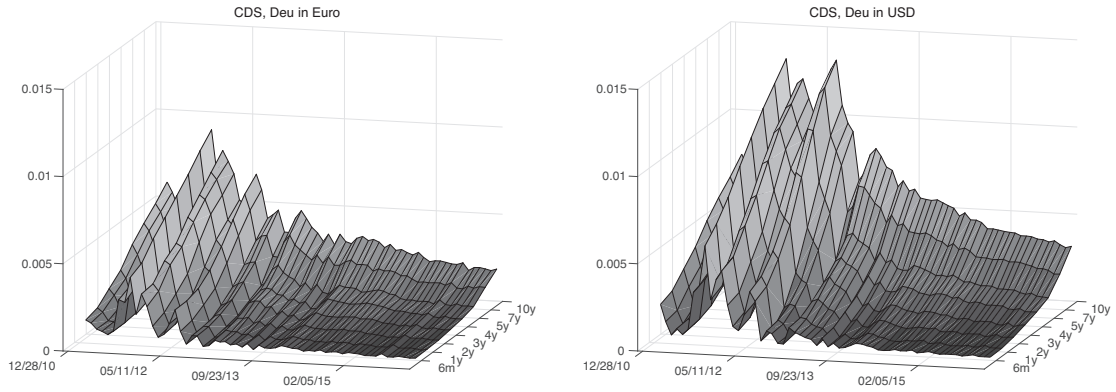


図2 ドイツ連邦共和国を参照体とするCDSのプレミアム
左図：ユーロ建て、右図：米ドル建て。

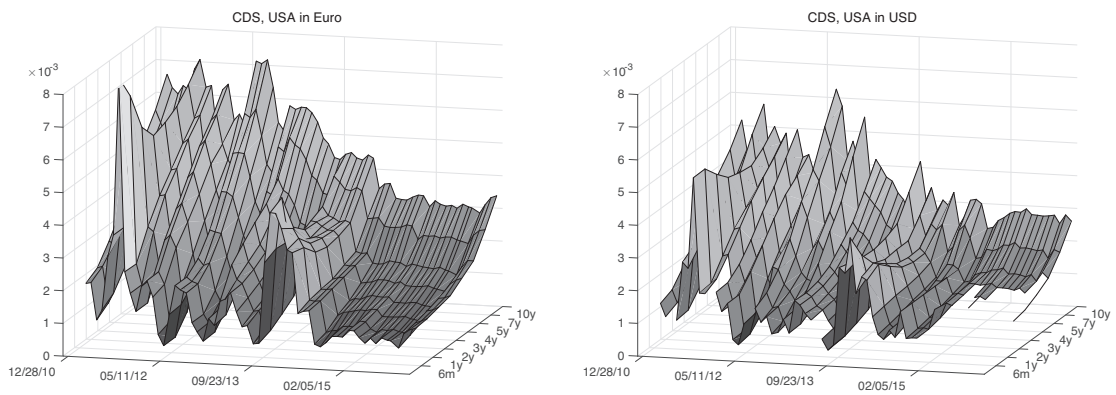


図3 米国を参照体とするCDSのプレミアム
左図：ユーロ建て、右図：米ドル建て。

掲げる。ドイツ連邦共和国を参照体とするユーロ建てのCDSプレミアム、同じく米ドル建てのCDSプレミアム、両者の差異（米ドル建て－ユーロ建て）の要約統計量を表1に掲げる。異なる通貨間での差異の最小値は、満期が6ヶ月のCDSで-3.3386、満期が1年のCDSで-1.8399と負値をとっているが、それ以外は最小値はもちろん平均値も正値となっており、ドル建てのCDSプレミアムがユーロ建てのそれよりも高いことがわかる。満期が6ヶ月および1年のCDSは他の満期よりも流動性が低くデータの信頼性が低くなっており、そのエラーため負値になったと考えられる。

同様に図3から明らかなように共通に米国が参照体であっても対象とする通貨が異なればCDSのプレミアムは異なっており、ドル建てよりもユーロ建てのCDSの方がプレミアムは高い。米国を参照体とするユーロ建てのCDSプレミアムからその米ドル建てのCDSプレミアムを減じた差異の時系列グラフを図5に掲げる。米国を参照体とするユーロ建てのCDSプレミアム、同じく米ドル建てのCDSプレミアム、両者の差異（ユーロ建て－

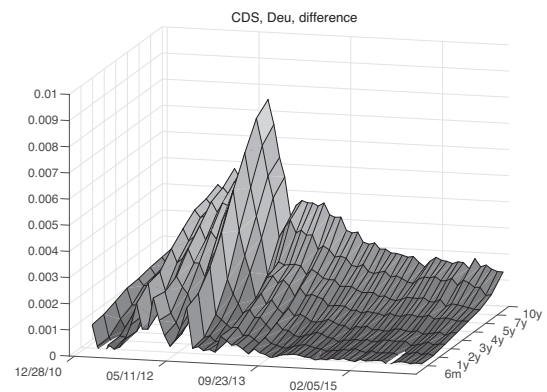


図4 ドイツ連邦共和国を参照体とするCDSのプレミアムの差異
(米ドル建てのCDSプレミアム) - (ユーロ建てのCDSプレミアム)

米ドル建て)の要約統計量を表2に掲げる。米国を参照体にした米ドル建てのCDSは流動性に欠け、CDSプレミアムのデータに欠損値が多数存在する。欠損値が存在

表 1 ドイツ連邦共和国を参照体とする CDS プレミアムの要約統計量

	6ヶ月	1年	2年	3年	4年	5年	7年	10年
ユーロ建て								
平均	6.6576	7.4296	9.7851	12.6259	17.0907	22.1025	30.1470	37.7143
標準偏差	7.9990	8.8083	10.6249	11.9986	14.4155	16.7975	17.2172	17.3662
最小値	1.0677	0.8285	1.7020	2.7420	4.2630	6.4494	11.1879	16.7798
中央値	3.1250	3.5049	5.2887	7.3806	10.5512	14.0571	23.9783	33.0833
最大値	39.0124	42.4751	51.6402	58.7536	66.3390	73.8854	82.3520	89.7014
米ドル建て								
平均	9.8063	11.1828	15.9167	22.0684	30.9154	40.0677	53.2338	65.1010
標準偏差	11.8771	13.2709	16.2615	19.6871	23.9741	28.1607	28.9164	28.4908
最小値	1.6258	1.7959	3.0623	4.4860	8.1781	11.5739	20.1560	30.4777
中央値	4.4640	5.2034	9.0479	13.0710	19.3486	27.3854	44.5202	59.1189
最大値	56.9970	64.8704	75.1660	88.0086	99.9452	111.4097	120.9494	131.0907
差異 = (ドル建て) - (ユーロ建て)								
平均	3.1487	3.7532	6.1316	9.4425	13.8247	17.9652	23.0868	27.3867
標準偏差	4.6576	5.1487	6.5195	8.8629	11.3093	13.5258	14.7430	14.7450
最小値	-3.3386	-1.8399	0.3841	1.5268	3.7815	5.0644	7.1994	13.0354
中央値	1.0400	1.5881	3.2875	6.2572	10.3089	13.8377	16.3740	19.9744
最大値	20.4105	22.3953	26.3444	36.2670	49.2391	60.3163	70.3204	74.2799

CDS の満期別のユーロ建てのプレミアム、米ドル建てのプレミアム、および、米ドル建ての CDS プレミアムからユーロ建ての CDS プレミアムを差し引いた差異。単位は basis point (bp), 100bp = 1%。

するデータ系列については平均、標準偏差、中央値を算出してない。異なる通貨間での差異の最小値は、すべての満期で負値をとっているが、図 5 から読み取れるように大部分の観測日、満期に関してプレミアム差異は正值であり、プレミアム差異の平均値も正值である。プレミアム差異の最小値が負値をとっている原因は、米国を参照体とした米ドル建て CDS の低流動性にあると推測される。したがって一般にユーロ建ての CDS プレミア

ムが米ドル建てのそれよりも高いことがわかる。米国を参照体とする米ドル建て CDS はデータの信頼性が欠けるため分析対象とはしない。したがって米国を参照体とするユーロ建ておよび米ドル建てのソブリン CDS の差異の分析やカウンターパーティ・リスクの推定はおこなわない。

本論文ではデータを示さないが、ドイツ以外でも、オーストリア、ベルギー、フィンランド、フランス、ギリシア、アイルランド、イタリア、オランダ、ポルトガル、スペインを参照体とする CDS のプレミアムは、ユーロ建てよりも米ドル建ての方が高い。同一国を参照体とする CDS で、自国通貨建てよりも外国通貨建ての方がプレミアムが低くなる事例は存在していなかった。一般にソブリン CDS のプレミアムは自国通貨建てよりも外国通貨建ての方が高くなることが判明した。

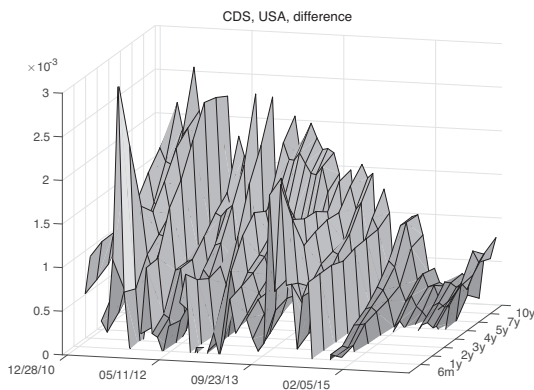


図 5 米国を参照体とする CDS のプレミアムの差異

(ユーロ建ての CDS プレミアム) - (米ドル建ての CDS プレミアム)

3.2. カウンターパーティ・リスクを考慮したリスクフリー・レートとデフォルト強度の同時推定

ドイツ連邦共和国を参照体とするドル建て CDS プレミアム、米国を参照体とするユーロ建ての CDS プレミアム、ドイツ国債のスポット・レート、米国債のスポット・レートから、ドイツ連邦共和国のデフォルト強度、米国のデフォルト強度、ユーロ建てのリスクフリー・レート、米ドル建てのリスクフリー・レートを同時推定した。

表 2 米国を参照体とする CDS プレミアムの要約統計量

	6ヶ月	1年	2年	3年	4年	5年	7年	10年
ユーロ建て								
平均	15.6655	16.3382	18.6871	21.7406	26.1314	31.0750	38.8851	46.9230
標準偏差	13.4895	12.4780	10.5672	10.5963	11.6116	13.0533	12.9086	13.9084
最小値	2.0250	2.0450	7.0500	9.7843	12.0448	14.4713	21.5049	28.2472
中央値	11.1731	11.6798	15.9888	20.4252	26.4668	29.7124	39.0862	45.8261
最大値	83.3606	75.0689	62.9135	57.7917	59.1771	61.4951	65.6317	71.7109
米ドル建て								
平均						23.2041	29.1090	35.7714
標準偏差						9.6318	9.9387	9.8389
最小値	2.0890	2.4785	3.7520	5.6999	9.4953	10.8864	15.8566	22.4269
中央値						20.8680	26.9729	33.0225
最大値	52.6699	52.7654	48.5291	44.9901	43.9032	43.4071	53.6482	62.5951
差異 = (ユーロ建て) - (ドル建て)								
平均						7.8709	9.7760	11.1515
標準偏差						5.1547	5.9418	7.1601
最小値	-9.5500	-8.3317	-5.2700	-4.0100	-1.2900	-0.1006	-0.6983	-0.0552
中央値						8.6238	10.1218	12.4363
最大値	30.6907	22.3035	14.3889	16.6197	20.1146	23.5498	23.1463	25.4562

CDS の満期別のユーロ建てのプレミアム、米ドル建てのプレミアム、および、ユーロ建ての CDS プレミアムから米ドル建ての CDS プレミアムを差し引いた差異。米ドル建てのプレミアムのデータは欠損値が多数あり、欠損値が存在するデータ系列については平均、標準偏差、中央値を算出してない。単位は basis point (bp), 100 bp = 1%。

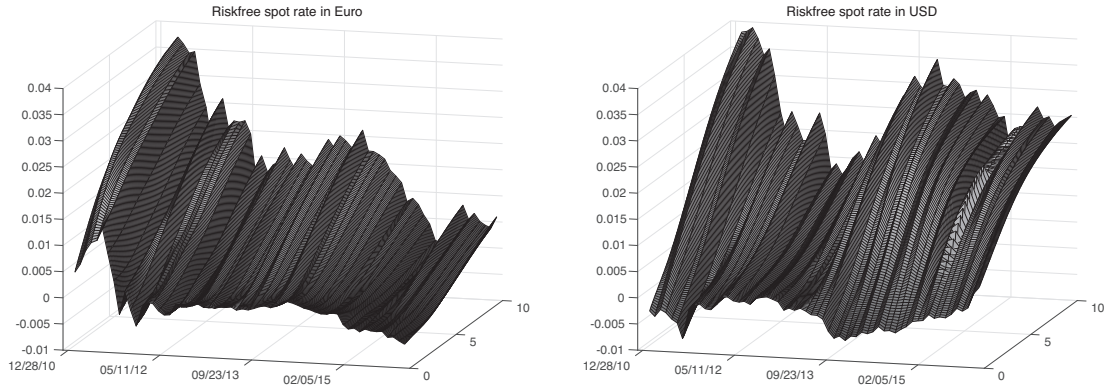


図 6 リスクフリー・レート
左図：ユーロ建て、右図：米ドル建て。

デフォルト強度は満期が 10 年まで 3 ヶ月刻みの階段関数、リスクフリー・レートは満期が 10 年まで 1 ヶ月刻みの階段関数と、柔軟な関数形を仮定しているため、推定されたパラメータに基づく CDS プレミアムおよびスポット・レートの理論値はマーケットで観測される対応する値と一致した。回収率はドイツ連邦共和国、米国とも共通に 1/3 に設定した。推定されたユーロ建ておよび米ドル建てのリスクフリー・レートを図 6 に掲げる。また推定されたドイツ連邦共和国のデフォルト強度および米国のデフォルト強度を図 7 に掲げる。これらのリスク

フリー・レートはカウンターパーティ・リスクを考慮しており（カウンターパーティ・リスクの影響を免れている）、リスクフリー・レートとして理論的に整合している。ドイツ連邦共和国のデフォルト強度のターム・ストラクチャーは、満期が 5 年程度のところに山があるか、右肩上がりの単調増加の形状をとっている。米国のデフォルト強度のターム・ストラクチャーは、満期が 5 年から 7 年の程度のところに山があり、その後、満期が 7 から 8 年のところで底をうって再び右肩上がりに増加する形状をとっている観測日が多い。米国のデフォルト強

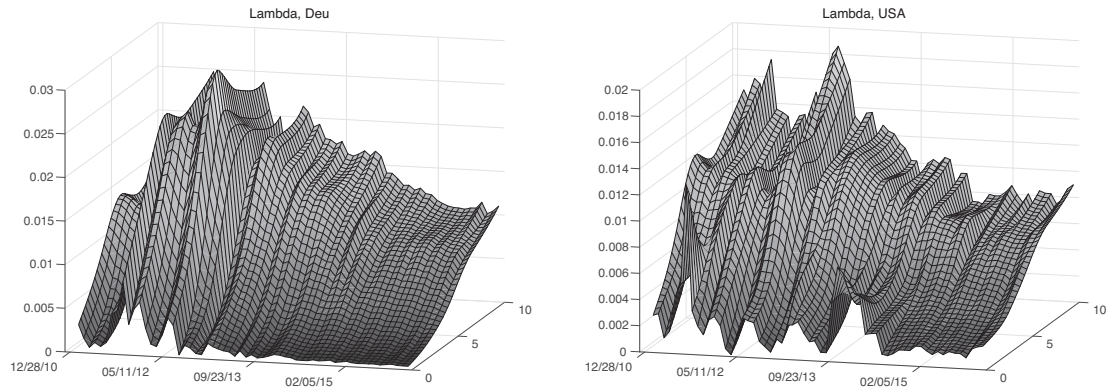


図7 デフォルト強度

左図：ドイツ連邦共和国，右図：米国。

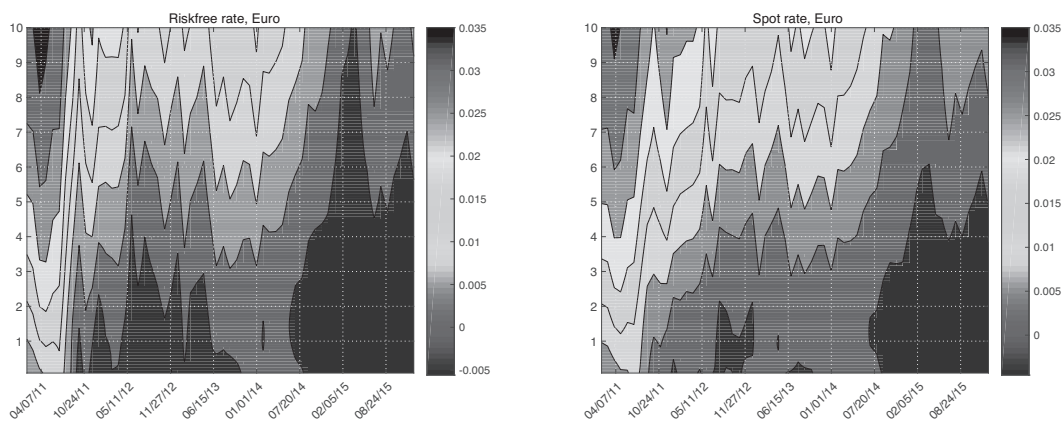


図8 ユーロ建てのリスクフリー・レートとスポット・レートの比較

左図：リスクフリー・レート，右図：スポット・レート。

度のターム・ストラクチャーで、満期が1年未満の短期のデフォルト強度が満期が2年程度のデフォルト強度よりも高くなっている観測日がある。これは短期のCDSの低流動性による価格エラーと推察されるが、その原因は不明である。

ドイツ国債のスポット・レートとカウンターパーティ・リスクを考慮したユーロ建てのリスクフリー・レートの等高線図を図8に掲げる。もっとも色の濃い領域は金利が負値の満期と観測日に対応する。ドイツ国債のスポット・レートは、2012年7月～2012年12月は満期が2年未満の短中期金利、2014年6月以降は満期が6年未満の中短期金利において負値をとっている。一方ユーロ建てのリスクフリー・レートはドイツ国債のスポット・レートよりも低く、2011年9月以降短中期金利が頻繁に負値をとっており、2015年3月には満期が10年の長期金利まですべての満期にわたって負値をとっている。同様に米国債のスポット・レートとカウンターパーティ・リスクを考慮した米ドル建てのリスクフリー・レートの等高線図を図9に掲げる。もっとも色の濃い領域は金利が

負値の満期と観測日に対応する。米国債のスポットレートは、2011年1月～6月は満期が3ヶ月程度の短期金利、2013年7月以降は満期が3～6ヶ月程度の短期金利において負値をとっている。推定された米建てのリスクフリー・レートは、米国債のスポット・レートよりも低く、2011年1月～2012年1月は満期が2年未満の短中期金利、2013年1月以降は満期が2年未満の短中期金利において負値をとっている。このようにユーロ建て、米ドル建て共にCDSプレミアムを反映したリスクフリー・レートは対応する国債のスポット・レートよりも低く、金利が負値をとる満期やその時期はスポット・レートのそれよりもCDSプレミアムを反映したリスクフリー・レートの方が広範にわたっている。

Kagraoka and Moussa (2014) はリスクフリー・レートを推定する際にカウンターパーティ・リスクを考慮していない。すなわちリスクフリー・レートを、自国のスポット・レートと自国を参照体とする自国通貨建てのCDSプレミアムから推定しており、この推定されたリスクフリー・レートは真のそれよりも高くなるバイアスが

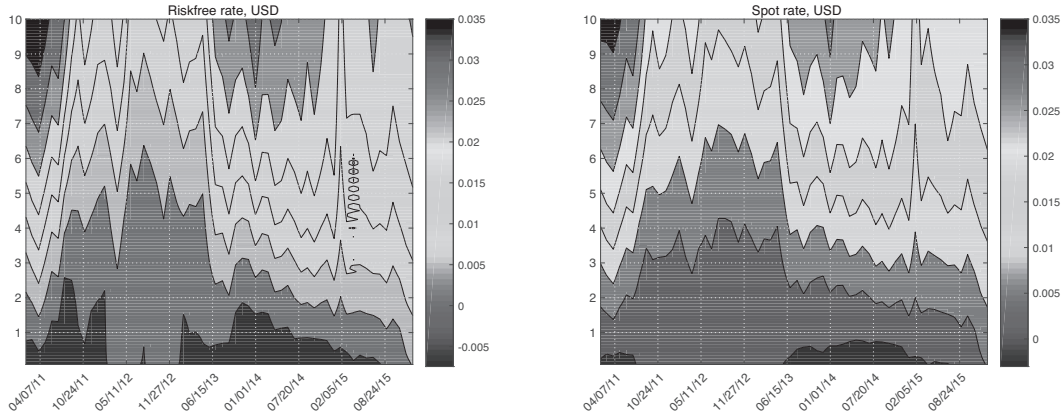


図9 米ドル建てのリスクフリー・レートとスポット・レートの比較
左図：リスクフリー・レート，右図：スポット・レート。

かかる。その理由は以下のとおりである。ある国を参照体とする外国通貨建てのCDSプレミアムは本国通貨建てのCDSプレミアムよりも高く、その結果その国のデフォルト強度は外国通貨建てのCDSプレミアムから推定された水準が本国通貨建てのCDSプレミアムから推定された水準よりも高くなる。したがってスポット・レートからデフォルト・スプレッドを減じて求められるリスクフリー・レートに関して、外国通貨建てCDSプレミアムから推定されたデフォルト強度を用いずに本国通貨建てのCDSプレミアムから推定されたデフォルト強度を用いると、求められたリスクフリー・レートは高くなるバイアスを内在する。

3.3. 通貨間のデフォルト強度の差異

ドイツ連邦共和国を参照体とするユーロ建てのCDSの評価は、CDSに係るキャッシュフローをユーロ建てのリスクフリー・レートで現在価値に割引く。一方、ドイツ連邦共和国を参照体とする米ドル建てのCDSの評価は、CDSに係るキャッシュフローを米ドル建てのリスクフリー・レートで現在価値に割引く。通貨建てが異なればリスクフリー・レートも異なっている。そのため通貨建てで異なるCDSプレミアムの差異の原因をリスクフリー・レートの差異に帰することも否定できない。そこで異なる通貨建てのCDSプレミアムを共通の尺度で測られるデフォルト強度に変換して比較した。前小節の手續きによって推定したユーロ建てのリスクフリー・レートとドイツ連邦共和国を参照体とするユーロ建てのCDSからドイツ連邦共和国のデフォルト強度を推定した。ユーロ建てCDSから推定されたデフォルト強度、米ドル建てのCDSから推定されたデフォルト強度からユーロ建てのCDSから推定されたデフォルト強度を減じた差異をそれぞれ図10、11に掲げる。ドイツ連邦共

和国のデフォルト強度は、CDSプレミアムの通貨によらず一意のはずであるが、図11から明らかのようにドル建てとユーロ建てで異なる。この結果、異なる通貨建て

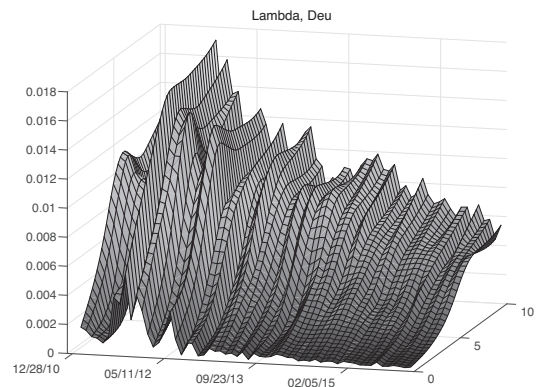


図10 ドイツ連邦共和国のユーロ建てのCDSプレミアムから推定されたデフォルト強度

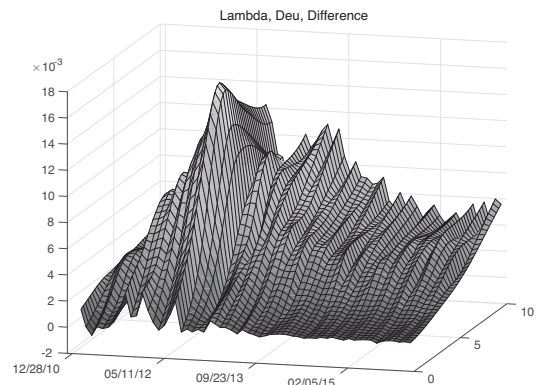


図11 ドイツ連邦共和国のデフォルト強度の通貨間の差異
(米ドル建てCDSから推定されたデフォルト強度) - (ユーロ建てCDSから推定されたデフォルト強度)

CDS のプレミアム差異を通貨間で異なるリスクフリー・レートで説明できないことが確認された。本研究ではこの異なる通貨建て CDS のプレミアム差異をカウンターパーティ・リスクで説明する。

3.4. 売り手のカウンターパーティ・リスクの評価

これまでの実証分析において、米ドル建て CDS とユーロ建ての CDS から、それぞれドイツ連邦共和国のデフォルト強度を推定した。本来一意に定まるべきドイツ連邦共和国のデフォルト強度が、図 11 から明白なように、米ドル建て CDS とユーロ建て CDS で異なっており、この差異を説明するモデルが必要であった。前節で議論したようにこの差異を売り手のカウンターパーティ・リスクで説明を試みる。モデルによれば、CDS の参照体がデフォルトしたときに CDS の売り手は確率 q でデフォルトに陥る。満期が 5 年の CDS は最も流動性が高いため、ユーロ建ての満期 5 年の CDS プレミアムが市場価格と一致するように確率 q を推定した。すなわち、すでに推定されたユーロ建てのリスクフリー・レートとドイツ連邦共和国のデフォルト強度にもとづき、ドイツ連邦共和国を参照体とするユーロ建ての満期を 5 年とする CDS のプレミアムが、対応するマーケットの市場価格と一致するようにこの確率 q を推定した。推定された q の時系列グラフを図 12 に掲げる。推定結果から、ヨーロッパのソブリン危機を経験するまでは売り手のデフォルト・リスクは低く見積もられていたことがわかる。しかし、ソブリン危機の深刻化と共にデフォルト確率 q は急上昇し、2012 年 7 月には最高値の 0.666381 をつけた。その後は低下するものの 0.35 から 0.55 の範囲を推移しており、平均値は 0.457861 であった。参照体のドイツ連邦

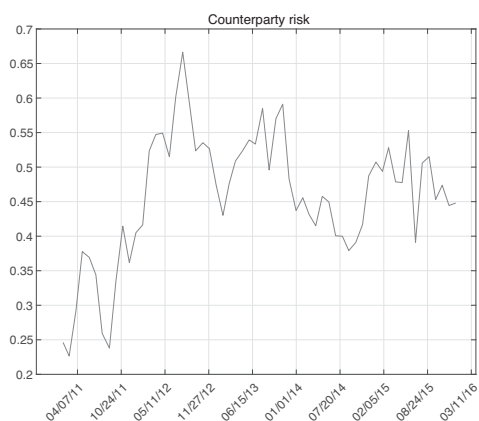


図 12 CDS の売り手のデフォルト・リスク

共和国がデフォルトした場合、高い確率で CDS の売り手もデフォルトに陥ると予想されるため、この推定されたデフォルト確率の水準は妥当と考えられる。

4. 結論

本研究の貢献は、第 1 にカウンターパーティ・リスクを考慮して、CDS プレミアム調整済みのリスクフリー・レートを推定する手法を開発したことである。リスクフリー・レートの推定には、自国を参照体にした自国通貨建ての CDS のプレミアム、自国のスポット・レートに加えて、自国を参照体にした外国通貨建ての CDS のプレミアム、その外国通貨建てのスポット・レートの情報が必要になる。推定されたリスクフリー・レートはいくつかの満期・期間で負値をとり、ファイナンス理論と整合しない。この矛盾を解消するには、リスクフリー・レートは純粋に理論的な対象物であって取引可能でなく、国債金利のように取引可能な金利の正值性が必要条件と解釈すればよい。第 2 の貢献は、参照体が共通であっても対象とする通貨が異なるとその CDS プレミアムが異なることを説明するためにカウンターパーティ・リスクを導入し、そのカウンターパーティのデフォルト確率を推定したことである。

既存の研究は国債から直接推定される金利をリスクフリー・レートとみなしており、CDS 評価と債券評価を統合的にできなかった。CDS プレミアム調整済みのリスクフリー・レートは、CDS と国債を統一されたフレームワークで評価できる唯一の金利である。金融機関におけるリスク管理において、CDS プレミアム調整済みのリスクフリー・レートの果たす役割は大きい。債券や CDS、証券化商品のリスク管理において、CDS プレミアム調整済みのリスクフリー・レートのみが、統合的にマーケット・リスクとクレジット・リスクの測定と管理を可能にする。

本研究は CDS の価格評価において、カウンターパーティ・リスクの影響が大きいことを明らかにした。これは金融機関におけるリスク管理において CVA (Credit Valuation Adjustment; 取引相手が将来デフォルトした際に受ける損失の期待値の現在価値) (Crépey and Bielecki, 2014) が重要であることを意味する。しかし、現行の会計基準が公表する公正価値測定のもとでは、自分自身のデフォルトも含める双方向カウンターパーティ・リスクを考慮すると、自分自身の信用力の低下に伴って利益が増大する³。したがって CDS の売り手のモラル・

3 Citigroup の 2009 年第 1 四半期の決算においては “A net \$2.5 billion positive CVA on derivative positions, excluding monolines, mainly due to the widening of Citi’s CDS spreads” と記している。(Citigroup, 2009)

ハザードが発生する懸念がある。これは公正価値測定の限界であり、中央清算 (Central Counterparty Clearing; CCP) の導入は1つの解決策として検討に値する (Domanski, Gambacorta, and Picillo, 2015)。

本研究はさまざまな方向へ発展させることができる。CDSの参照体およびCDSの売り手がデフォルトに陥る恐れがあったが、より一般的にはCDSの買い手がデフォルトすることも考慮に入れるべきである。またCDSの売り手がデフォルトする確率のモデル化では、CDSの参照体がデフォルトした場合に限ってCDSの売り手が確率的にデフォルトすると前提したが、この仮定は現実的ではない。参照体を国家とした場合、CDSの売り手が当該国家に属していれば、その国家がデフォルトしたとき、CDSの売り手がデフォルトする恐れは高いが、CDSの売り手のデフォルトがその国家のデフォルトに先行するのが通常である。本研究では参照体のデフォルト強度 $\lambda(t)$ を確率変数ではなく区分的に一定値をとる階段関数と仮定した。参照体およびCDSの売り手・買い手のデフォルト強度 $\lambda(t)$ を確率変数とし、デフォルト強度間に相関構造を導入するとより現実的なモデルになる。相関構造はコンピュータによるモデル化が有効である (Bielecki, Crépey, Jeanblanc, and Zargari, 2010; Crépey, Jeanblanc, and Zargari, 2009; Harb and Lohhichi, 2016)。

参考文献

- Arora, Navneet, Priyank Gandhi, Francis A. Longstaff (2012) Counterparty credit risk and the credit default swap market, *Journal of Financial Economics*, 103-2, 280–293.
- Bao, Qunfang, Si Chen, Shenghong Li (2012) Unilateral CVA for CDS in a contagion model with stochastic pre-intensity and interest *Economic Modelling*, 29-2, 471–477.
- Bielecki, T. R., S. Crépey, M. Jeanblanc, B. Zargari (2010) Valuation and hedging of CDS counterparty exposure in a Markov copula model, working paper.
- Bo, Lijun, Agostino Capponi (2015) Counterparty risk for CDS: Default clustering effects *Journal of Banking & Finance* 52, 29–42.
- Brigo, Damiano, Agostino Capponi (2009) Bilateral counterparty risk valuation with stochastic dynamical models and application to credit default swaps, working paper.
- Brigo, Damiano, Agostino Capponi (2010) Bilateral counterparty risk with application to CDSs *Risk* 23-3, 85–90.
- Brigo, Damiano, Agostino Capponi, Andrea Pallavicini (2014) Arbitrage-free bilateral counterparty risk valuation under collateralization and application to credit default swaps, *Mathematical Finance* 24-1, 125–146
- Brigo, Damiano, Agostino Capponi, Andrea Pallavicini, Vasileios Papatheodorou (2013) Pricing counterparty risk including collateralization, netting rules, re-hypothecation and wrong-way risk, *International Journal of Theoretical & Applied Finance* 16-2, 1350007.
- Brigo, Damiano, Kyriakos Chourdakis (2009) Counterparty risk for credit default swaps: impact of spread volatility and default correlation *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 12-7, 1007–1026.
- Buckley, Kirk, Sascha Wilkens, Vladimir Chorniy (2011) Capturing credit correlation between counterparty and underlying, *Risk*, 24-4, 70–74.
- Citigroup (2009) Citi reports first quarter revenues of \$24.8 billion, <http://www.citigroup.com/citi/news/2009/090417a.htm>.
- Crépey, Stéphane, Tomasz R. Bielecki (2014) Counterparty Risk and Funding: A Tale of Two Puzzles, Chapman & Hall/CRC.
- Crépey, S., M. Jeanblanc, B. Zargari (2009) CDS with counterparty risk in a Markov chain copula model with joint defaults, working paper.
- Domanski, Dietrich, Leonardo Gambacorta, Cristina Picillo (2015) Central clearing: trends and current issues, *BIS Quarterly Review*, December, 59–76.
- Dong, Yinghui, Guojing Wang (2014) Bilateral counterparty risk valuation for credit default swap in a contagion model using Markov chain, *Economic Modelling* 40, 91–100.
- European Central Bank (2009). Credit default swaps and counterparty risk.
- Harb, Etienne, Wael Louhichi, Pricing CDS spreads with credit valuation adjustment using a mixture copula, *Research in International Business and Finance*, forthcoming.
- Houweling, Patrick, Ton Vorst (2005) Pricing default swaps: empirical evidence, *Journal of International Money and Finance* 25, 1200–1225.
- Hull, John, Alan White (1995) The impact of default risk on the prices of options and other derivative securities, *Journal of Banking & Finance*, 19, 299–322.
- Jarrow, Robert A., Stuart M. Turnbull (1995), Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk, *The Journal of Finance*, 50, 53–85.
- Jarrow, Robert A., Fan Yu (2001) Counterparty risk and the pricing of defaultable securities, *The Journal of Finance* 56-5, 1765–1799.
- Kagraoka, Yusho, Zakaria Moussa (2014) Estimation of the term structure of CDS-adjusted risk-free interest rates, *The Journal of Fixed Income*, 24-2, 29–44.
- Leung, Seng Yuen, Yue Kuen Kwok (2005) Credit default swap valuation with counterparty risk, *The Kyoto Economic Review*, 74, 25–45.
- Lipton, Alexander, Artur Sepp (2009) Credit value adjustment for credit default swaps via the structural default model, *The Journal of Credit Risk*, 5-2, 127–150.
- Meissner, Gunter, Seth Rooder, Kristofor Fan (2013) The impact of different correlation approaches on valuing credit default swaps with counterparty risk, *Quantitative Finance* 13, 1903–1913.
- Walker, Michael B. (2006) Credit default swaps with counterparty risk: a calibrated Markov model, *Journal of Credit Risk*, 2-1, 31–49.