

# 相対論的共鳴条件を使用した ホイスラーモード弱相対論的線形増幅率

池 田 慎

## 要約

終了したサイブル人工電波送信実験ではあるが、1975年と1979年に行われた観測の特徴を検討した武蔵大学人文学会雑誌第46巻第1号(2014)<sup>1)</sup>の結果を踏まえ、それらの結果をプラズマ圏内、放射線帯の相対論的粒子に適用されるように、ホイスラーモード波の線形増幅率が導出された。今後、プラズマ圏の内側で行われるHAARP送信実験や、放射線帯相対論的粒子の地上探査の一助となることを望む。

## 1. ホイスラーモード波の非相対論的線形増幅率の導出

コールド電子と高速電子の数密度の変化に対応した非相対論的電子ホイスラーモードサイクロトロン不安定性の線形増幅率は、既に、池田(2012)<sup>2)</sup>により、武蔵大学人文学会雑誌第43巻、第3・4号で与えられている。それらの結果は次式等で与えられる。SI単位系で、

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_0^2 + \omega_H^2}{\omega_k(\Omega - \omega_k)} \quad (1)$$

$$\gamma_k \approx \sqrt{\pi} \frac{eB_{eq}}{m} \left( A - \frac{f_k}{f_H} \right) \left( \frac{1 - \frac{f_k}{f_H}}{2} \right) \frac{1}{L^3} \frac{n_H}{n_0 + n_H} \left( \frac{E_R}{T_z} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{E_R}{T_z} \right) \quad (2)$$

上式において、 $\gamma_k$ が正のとき、波動は成長する。 $B_{eq}$ は赤道面地表上での磁束密

度である。 $E_R$ は共鳴電子の運動エネルギーであり、次式で表わされる。温度異方性係数  $A$  も次のように定義される。

$$E_R = \frac{1}{2} m V_R^2 = \frac{1}{2} m c^2 \frac{(\Omega - \omega)^3}{(\omega_0^2 + \omega_H^2) \omega_k} \quad (3)$$

$$A = \frac{T_\perp}{T_z} - 1 \quad (4)$$

$T_\perp$ と  $T_z$ は、それぞれエネルギーの単位で表わされた磁力線に垂直方向の電子温度であり、磁力線に平行方向の電子温度である。ダクト伝搬を考慮し、平行伝搬を仮定して、

$$k_\perp \rightarrow +0, \quad k_\perp \rightarrow k \quad (5)$$

とした。

## 2. ホイスラーモード波の弱相対論的線形増幅率の導出

相対論的プラズマの R モード電磁波不安定性の一般論は、運動量表示で、例えば BARBOSA and CORONITI (1976)<sup>3)</sup>、XIAO et al. (1998)<sup>4)</sup> 等で紹介されている。

Ikeda (2012)<sup>5)</sup> は相対論的取り扱いを、サイブル信号についても既に行っている。この論文では、コールド電子群と温度異方性を持つ弱相対論的高速電子群の 2 成分を考える。したがって、コールド電子の分布関数と相対論的電子分布関数は、それぞれ次のように表わされる。まず、コールド電子群の分布関数は、数密度を  $n_0$  として、

$$f_0(p_z, p_\perp) = n_0 \frac{1}{2\pi p_\perp} \delta(p_z) \delta(p_\perp) \quad (6)$$

弱相対論的高速電子群の分布関数は、数密度を  $n_H$  として、

$$f_1(p_z, p_\perp, T_z, T_\perp) = \frac{n_H}{2\pi m_0 T_\perp} \left( \frac{1}{2\pi m_0 T_z} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{p_z^2}{2m_0 T_z}} e^{-\frac{p_\perp^2}{2m_0 T_\perp}} \quad (7)$$

である。 $m_0$ は、電子の静止質量を表わしている。分布関数は両電子群を重ねて、次のように表される。

$$F(p_z, p_\perp, T_z, T_\perp) = f_0(p_z, p_\perp) + f_1(p_z, p_\perp, T_z, T_\perp) \quad (8)$$

右回り円偏波モードの分散式は、コールド電子群と高速電子群の効果を重ねて、次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = & 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega - \Omega)} + \frac{e^2}{\omega \varepsilon_0} \left\langle \frac{1}{2m_0 k} \frac{1}{T_\perp} \frac{p_\perp^2}{p_z + p_R} F \right\rangle \\ & + \frac{e^2}{\omega \varepsilon_0} \left\langle -\frac{1}{2\omega m_0^2 \gamma} \left( \frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{p_z p_\perp^2}{p_z + p_R} F \right\rangle \end{aligned} \quad (9)$$

ただし、 $\langle \dots \rangle$  は次のような積分を表している。

$$\langle \dots \rangle = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \int_{-\infty}^{+\infty} dp_\perp \cdot p_\perp \dots = 2\pi \int dp_\perp \cdot p_\perp \int dp_z \dots \quad (10)$$

一般に、プラズマ分散関数  $Z(\zeta)$  は次のように近似される。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{y - \zeta} e^{-y^2} \approx \sqrt{\pi} Z(\zeta) \approx \sqrt{\pi} \left( -\frac{1}{\zeta} - i\sqrt{\pi} e^{-\zeta^2} \right) \quad (11)$$

この論文では、プラズマ圏プラズマに対して低温近似を使い、相対論的共鳴運動量  $p_R$  に対して次式を仮定した。

$$\zeta = \left| -\frac{P_R}{\sqrt{2m_0 T_z}} \right| \gg 1 \quad (12)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{y - \zeta} e^{-y^2} \approx \sqrt{\pi} Z(\zeta) \approx -i\pi e^{-\zeta^2} \quad (13)$$

従って、(11) は上式のように、簡単化、近似される。これは、コールド電子が、プラズマ圏内では放射線帯電子より大量にあると云う近似に対応する。勿論、プラズマ分散関数  $Z(\zeta)$  を正確に計算できるなら上記近似をする必要はないが、この論文では、概略を導くための計算を目的にしている。 $\gamma$  はローレンツファクターであり、結果的にプラズマポーズの内側での弱相対論的近似を仮定すると、

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{p_\perp^2}{m_0^2 c^2} + \frac{p_z^2}{m_0^2 c^2}} \approx 1 + \frac{p_\perp^2}{2m_0^2 c^2} + \frac{p_z^2}{2m_0^2 c^2} \quad (14)$$

上式を (9) の第2項に代入し、計算すると、

$$\left\langle -\frac{1}{2\omega m_0^2 \gamma} \left( \frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{p_z p_\perp^2}{p_z + p_R} F \right\rangle \approx \frac{1}{2\omega m_0^2 \gamma} \left( \frac{1}{T_\perp} - \frac{1}{T_z} \right) \frac{n_H}{m_0 T_\perp \sqrt{2\pi m_0 T_z}} \quad (15)$$

$$* \int_0^{+\infty} dp_\perp p_\perp^3 e^{-\frac{p_\perp^2}{2m_0 T_\perp}} i\pi p_R \left( 1 - \frac{p_\perp^2}{2m_0^2 c^2} - \frac{p_R^2}{2m_0^2 c^2} \right) e^{-\frac{p_R^2}{2m_0 T_z}}$$

更に (9) の第1項を計算する。

$$\left\langle \frac{1}{2m_0 k} \frac{1}{T_\perp} \frac{p_\perp^2}{p_z + p_R} F \right\rangle \approx \frac{-i\pi}{m_0 k T_\perp} \frac{n_H}{\sqrt{2\pi m_0 T_z} 2m_0 T_\perp} * \int_0^{+\infty} dp_\perp p_\perp^3 e^{-\frac{p_\perp^2}{2m_0 T_\perp}} e^{-\frac{p_R^2}{2m_0 T_z}} \quad (16)$$

(12) と (13) を (9) に代入し、(4) で示された温度異方性  $A$  を導入して、

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega(\Omega - \omega)}$$

$$+ i\pi \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \left[ \frac{1}{2m_0^2} \frac{A}{T_\perp^2 \sqrt{2\pi m_0 T_z}} \int_0^{+\infty} dp_\perp p_\perp^3 e^{-\frac{p_\perp^2}{2m_0 T_\perp}} e^{-\frac{p_R^2}{2m_0 T_z}} P_R \left( 1 - \frac{p_\perp^2}{2m_0^2 c^2} - \frac{p_R^2}{2m_0^2 c^2} \right) \right]$$

$$- i\pi \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \left[ \frac{1}{2m_0^2} \frac{\omega}{k} \frac{1}{T_\perp^2 \sqrt{2\pi m_0 T_z}} \int_0^{+\infty} dp_\perp p_\perp^3 e^{-\frac{p_\perp^2}{2m_0 T_\perp}} e^{-\frac{p_R^2}{2m_0 T_z}} \right] \quad (17)$$

上式において、共鳴運動量  $p_R$  は次式のように与えられる。 $V_R$  に関しては、Ikeda (2012)<sup>5)</sup> を参照されたい。

$$p_R = m_0 \gamma V_R$$

$$= m_0 \frac{\Omega k - \sqrt{\Omega^2 k^2 - \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left\{ (\Omega^2 - \omega^2) - \frac{p_\perp^2}{m_0^2 c^2} \omega^2 \right\}}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (18)$$

次に、(17) の不安定性解析を行う。

$$\omega = \omega_k - i\gamma_k \quad (19)$$

$$\omega_k \gg \gamma \quad (20)$$

の条件で、(17) に代入すると、次のように近似される。

$$\frac{c^2 k^2}{\omega_k^2} + i \frac{2\gamma_k}{\omega_k} \frac{c^2 k^2}{\omega_k^2}$$

$$\begin{aligned}
 &\approx 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_k(\Omega - \omega_k)} \\
 &+ i\pi \frac{\omega_H^2}{\omega_k^2} \left[ \frac{1}{2m_0^2} \frac{A}{T_\perp^2 \sqrt{2\pi m_0 T_z}} \int_0^{+\infty} dp_\perp p_\perp^3 e^{-\frac{p_\perp^2}{2m_0 T_\perp}} e^{-\frac{p_\parallel^2}{2m_0 T_z}} P_R \left( 1 - \frac{p_\perp^2}{2m_0^2 c^2} - \frac{p_\parallel^2}{2m_0^2 c^2} \right) \right] \\
 &- i\pi \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \left[ \frac{1}{2m_0^2} \frac{\omega_k}{k} \frac{1}{T_\perp^2 \sqrt{2\pi m_0 T_z}} \int_0^{+\infty} dp_\perp p_\perp^3 e^{-\frac{p_\perp^2}{2m_0 T_\perp}} e^{-\frac{p_\parallel^2}{2m_0 T_z}} \right]
 \end{aligned} \quad (21)$$

上式の実部と虚部で、それぞれ等式を作ると、

$$\frac{c^2 k^2}{\omega_k^2} \approx 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_k(\Omega - \omega_k)} \quad (22)$$

上式はホイスラーモードの分散式になり、非相対論的な (1) に対応する。虚数部に対して、

$$\begin{aligned}
 \frac{2\gamma_k}{\omega_k} \frac{c^2 k^2}{\omega_k^2} &\approx \pi \frac{\omega_H^2}{\omega_k^2} \left[ \frac{1}{2m_0^2} \frac{A}{T_\perp^2 \sqrt{2\pi m_0 T_z}} \int_0^{+\infty} dp_\perp p_\perp^3 e^{-\frac{p_\perp^2}{2m_0 T_\perp}} e^{-\frac{p_\parallel^2}{2m_0 T_z}} P_R \left( 1 - \frac{p_\perp^2}{2m_0^2 c^2} - \frac{p_\parallel^2}{2m_0^2 c^2} \right) \right] \\
 &- \pi \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \left[ \frac{1}{2m_0^2} \frac{\omega_k}{k} \frac{1}{T_\perp^2 \sqrt{2\pi m_0 T_z}} \int_0^{+\infty} dp_\perp p_\perp^3 e^{-\frac{p_\perp^2}{2m_0 T_\perp}} e^{-\frac{p_\parallel^2}{2m_0 T_z}} \right]
 \end{aligned}$$

更に整理すると、

$$\begin{aligned}
 \gamma_k &\approx \sqrt{\pi} \Omega \frac{\omega_H^2}{\omega_0^2} \frac{1 - \frac{\omega_k}{\Omega}}{2} \frac{1}{2(m_0 T_\perp)^2 \sqrt{2m_0 T_z}} * \\
 &\left[ A \int_0^{+\infty} dp_\perp p_\perp^3 P_R \left( 1 - \frac{p_\perp^2}{2m_0^2 c^2} - \frac{p_\parallel^2}{2m_0^2 c^2} \right) e^{-\frac{p_\perp^2}{2m_0 T_\perp}} e^{-\frac{p_\parallel^2}{2m_0 T_z}} - \frac{\omega_k}{k} \int_0^{+\infty} dp_\perp p_\perp^3 e^{-\frac{p_\perp^2}{2m_0 T_\perp}} e^{-\frac{p_\parallel^2}{2m_0 T_z}} \right]
 \end{aligned} \quad (23)$$

(23) は、非相対論的なホイスラーモード線形増幅率の式 (2) に対応する弱相対論的ホイスラーモード増幅率の表式となる。

### 3. 結論と議論

この論文の目的は、プラズマ圏内でホイスラーモード波と相互作用する相対論的粒子の振る舞いを検討することである。地上で観測されたサイブル信号が、南極大陸から送信され、磁気圏内を伝搬し、反対半球で受信されるサイブル実験が 1975 年と 1979 年に行われ、その結果が池田 (2014)<sup>1)</sup> によって紹介された。そ

これらの結果によると、Kp 指数から予想されたプラズマポーズの位置の赤道方向側を、ホイスラーモードのサイプル信号が伝搬、増幅したようである。つまり、地上観測によると、プラズマ圏内を伝搬してきたホイスラーモード波が地上で観測され得るという事である。それらが地上で観測されるためには、地上までホイスラーモード波を導くダクトやプラズマポーズダクティング<sup>6)</sup>等の何らかのメカニズムが必要になると考えられている。池田 (2012)<sup>2)</sup> が示したように、導かれた線形増幅率は、磁気圏赤道面付近で生成され、地上で観測されるホイスラーモード波の分布を、ほとんど正確に記述し、磁気圏の高エネルギー電子の情報を与えると思われる。その論文において、緩やかに変化するプラズマポーズの直ぐ内側で生成するホイスラーモード波が、地上で観測される可能性も示された。更に、巻田 (2014)<sup>7)</sup> によると、放射線帯粒子の降込みがブラジル磁気異常帯で確認された。今後、プラズマポーズ付近やプラズマ圏内の様々な波動の励起と粒子との相互作用が、地上でも観測される可能性がある。この時、弱相対論的粒子が関わる可能性は十分にあるだろう。プラズマ圏内における HAARP<sup>8)</sup> の電離層加熱による ELF/VLF 放射実験、それらと放射線帯粒子等との相互作用のような、新たな観測と実験、理論的研究を含めて、一層検討する必要があるだろう。

## 謝 辞

この研究は、筆者が武蔵大学特別研究員として、2009年度にインドとアメリカアラスカ州アラスカ大学を訪問していた時に着想され、その後、筆者が修士課程在学中の研究から発展させたものです。さらに、私が東京大学理学系研究科修士課程に在学中から御指導頂いた文部科学省宇宙科学研究所鶴田浩一郎名誉教授、拓殖大学巻田和男教授の御好意に、心から御礼を申し上げます。又、特別研究員の間、お世話になりました武蔵大学教職員の皆様他、多くの方々に深く感謝の意を表したいと思います。本当に、有難うございました。

## 〔註〕

1) 池田 愼、武蔵大学人文学会雑誌、第46巻、第1号、裏P49 (2014)

- 2) 池田 慎、武蔵大学人文学会雑誌、第 43 巻、第 3・4 号、裏 P89 (2012)
- 3) D. D. BARBOSA and F. V. CORONITI, *J. Geophys. Res.* 81, 4531 (1976)
- 4) F. XIAO et al., *Physics Plasmas*, 5, 2489 (1998)
- 5) M. IKEDA, *Indian J. Radio Space Phys.*, 41, 579 (2012)
- 6) U. S. INAN and T. F. BELL, *J. Geophys. Res.* 82, 2819 (1977)
- 7) 卷田 和男、極地研共同研究終了報告書 (2014)
- 8) M. GOLKOWSKI et al., *J. Geophys. Res.* 113, A10201, doi:10.1029/2008JA013157 (2008)

